Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.929.4

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

И. И. Матвеева

Аннотация. Рассматриваются периодические системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. С использованием функционала Ляпунова — Красовского указаны условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения. Получены оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.208

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, периодические коэффициенты, экспоненциальная устойчивость, оценки решений.

§ 1. Введение

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом (см., например, монографии [1–9] и имеющуюся в них библиографию). Повышенный интерес к таким уравнениям обусловлен тем, что они возникают во многих прикладных задачах при изучении процессов, скорость протекания которых определяется не только настоящим, но и предшествующим состояниями (см., например, книги [10–12] и библиографию, содержащуюся в них). Одной из важных является проблема исследования экспоненциальной устойчивости решений таких уравнений. В отличие от автономных уравнений эта проблема для неавтономных уравнений является менее изученной.

В статье рассматриваются системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad C(t+T) \equiv C(t),$$

$\tau > 0$ — параметр запаздывания. Наша цель — изучение экспоненциальной устойчивости решений и получение оценок решений на полуоси $\{t > 0\}$, характеризующих экспоненциальное убывание при $t \to \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–01–00592).

Работа продолжает наши исследования экспоненциальной устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах (см, например, [13–16]). В [13, 14] рассматривались системы с $C(t) \equiv 0$, в [15, 16] — системы, когда $C(t) \equiv C$ — постоянная матрица. Были указаны условия экспоненциальной устойчивости, получены оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности и оценки множеств притяжения. При получении этих результатов авторы перечисленных статей использовали введенные ими функционалы Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$\langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau))\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds,$$

где матрицы $H(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+) \cap C^1([lT, (l+1)T])$, $l = 0, 1, \dots,$ $K(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что

$$H(t) = H^*(t), \quad H(t) = H(t+T) > 0, \quad t \geq 0,$$

$$K(s) = K^*(s), \quad K(s) \geq 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Здесь и далее матричное неравенство $S > 0$ (или $S < 0$) означает, что S — положительно (или отрицательно) определенная эрмитова матрица. Для матриц используем спектральную норму.

В этой статье мы рассматриваем случай, когда $C(t) \not\equiv C$ — T-периодическая матрица. При получении результатов вводим функционал Ляпунова — Красовского, не зависящий от $C(t)$. В частности, он позволяет получать оценки решений системы (1.1) без дополнительных ограничений на запаздывание τ и период T. При построении функционала используем критерий асимптотической устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [17]. В § 2 вводим необходимые обозначения и формулируем основные результаты, доказательство которых проводится в § 3.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за полезные обсуждения.

§ 2. Основные результаты

Пусть матрицы $H(t) \in C^1[0,T]$, $K(s)$, $L(s) \in C^1[0,\tau]$ такие, что

$$H(t) = H^*(t),\ t \in [0,T], \quad H(0) = H(T) > 0, \tag{2.1}$$

$$K(s) = K^*(s) \geq 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{2.2}$$

$$L(s) = L^*(s) \geq 0, \quad \frac{d}{ds}L(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau]. \tag{2.3}$$

Определим матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

с элементами

$$
\begin{gathered}
Q_{11}(t)=-\frac{d}{dt}H(t)-H(t)A(t)-A^*(t)H(t)-K(0)-A^*(t)L(0)A(t),\\
Q_{12}(t)=-H(t)B(t)-A^*(t)L(0)B(t),\\
Q_{13}(t)=-H(t)C(t)-A^*(t)L(0)C(t),\\
Q_{22}(t)=K(\tau)-B^*(t)L(0)B(t),\\
Q_{23}(t)=-B^*(t)L(0)C(t),\\
Q_{33}(t)=L(\tau)-C^*(t)L(0)C(t).
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Теорема 1. *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)\in C^1[0,T]$, $K(s),L(s)\in C^1[0,\tau]$, *удовлетворяющие условиям* (2.1)–(2.3), *такие, что для матрицы* $Q(t)$ *в* (2.4) *справедливо неравенство*

$$
\left\langle Q(t)\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right\rangle\ge\langle P(t)u,u\rangle,\quad u,v,w\in\mathbb{C}^n,\ t\in[0,T],\tag{2.6}
$$

где $P(t)>0$ — *положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Если существуют* $k,\,l>0$ *такие, что*

$$
\frac{d}{ds}K(s)+kK(s)\le0,\quad \frac{d}{ds}L(s)+lL(s)\le0,\quad s\in[0,\tau],\tag{2.7}
$$

то нулевое решение системы (1.1) *экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1):

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}y(t)=A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau),\quad t>0,\\
y(t)=\varphi(t),\ t\in[-\tau,0],\quad y(+0)=\varphi(0),
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

где $\varphi(t)\in C^1[-\tau,0]$ — заданная вектор-функция. Ниже установим оценки для решений начальной задачи (2.8), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t\to\infty$.

Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то

$$
\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)\le-P(t)-K(0)-A^*(t)L(0)A(t),
$$

т. е. $H(t)$ является решением специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова

$$
\frac{d}{dt}H+HA(t)+A^*(t)H=-G(t),\ t\in[0,T],\quad H(0)=H(T)>0,\tag{2.9}
$$

где $G(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. В этом случае из результатов работы [17] следует, что $H(t)>0$ на всем отрезке $[0,T]$. Продолжим T-периодическим образом матрицы $H(t)$, $P(t)$ на всю полуось $\{t\ge0\}$, сохраняя те же обозначения. Обозначим через $h_{\min}(t)>0$ минимальное собственное значение матрицы $H(t)$, через $p_{\min}(t)>0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для решения задачи* (2.8) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)\,d\xi \right), \quad t > 0, \tag{2.10}$$

где

$$V(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int_{-\tau}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\,ds + \int_{-\tau}^{0} \left\langle L(-s)\frac{d}{ds}\varphi(s), \frac{d}{ds}\varphi(s)\right\rangle ds, \tag{2.11}$$

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\} > 0. \tag{2.12}$$

Замечание 1. В частном случае $B(t) \equiv 0$, $C(t) \equiv 0$ теорема 1 дает условие экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2.13}$$

установленное в [17]. Действительно, выбирая $K(s) \equiv 0$, $L(s) \equiv 0$, с учетом (2.5) из (2.6) приходим к тому, что нулевое решение системы (2.13) экспоненциально устойчиво, если существует эрмитово решение $H(t)$ краевой задачи (2.9) с $G(t) \geq P(t) > 0$. Поскольку $K(s) \equiv 0$, $L(s) \equiv 0$, можно выбрать k, l любыми положительными. Тогда $\gamma(t) = \frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}$ и (2.10) дает оценку для решений системы (2.13) следующего вида (см. [17]):

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\|H(0)\|}{h_{\min}(t)}}\|x(0)\| \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{p_{\min}(\xi)}{\|H(\xi)\|}\,d\xi \right).$$

Замечание 2. Неравенство (2.10) позволяет оценить скорость экспоненциального убывания решений системы (1.1) на бесконечности, при этом не используем спектральную информацию (спектр оператора монодромии или корни квазимногочленов в случае постоянных коэффициентов).

Скорость убывания в (2.10) зависит от матрицы $P(t)$. Поэтому естественно возникает вопрос о нахождении этой матрицы. Ниже при чуть более ограничительных условиях по сравнению с теоремой 1 укажем такую матрицу в явном виде. Этот факт может быть полезен при исследовании конкретных задач.

В силу теоремы 1 если существуют матрицы $H(t) \in C^1[0,T]$, $K(s)$, $L(s) \in C^1[0,\tau]$, удовлетворяющие условиям (2.1)–(2.3), (2.7), такие, что матрица $Q(t)$ в (2.4) положительно определена при $t \in [0,T]$, то нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво. Требование положительной определенности $Q(t)$ влечет условие

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0) - A^*(t)L(0)A(t),$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи (2.9), где $G(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Как отмечалось выше, из [17] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим $H(t)$, сохраняя то же обозначение, T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицы $K(s)$, $L(s)$, введем матрицу

$$P(t) = Q_{11}(t) - \left[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\right]\left[Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\right]^{-1} \times \left[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\right]^* - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{13}^*(t), \quad (2.14)$$

где $Q_{ij}(t)$ определены в (2.5). Нетрудно показать, что $P(t)$ положительно определена, если $Q(t)$ положительно определена (см. лемму в § 3). Обозначим через $p_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P(t)$, через $h_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$.

Теорема 3. *Предположим, что существуют матрицы* $H(t) \in C^1[0, T]$, $K(s), L(s) \in C^1[0, \tau]$, *удовлетворяющие условиям* (2.1)–(2.3), (2.7), *такие, что матрица* $Q(t)$ *в* (2.4) *положительно определена при* $t \in [0, T]$. *Тогда для решения задачи* (2.8) *имеет место оценка* (2.10), *где матрица* $P(t)$ *определена в* (2.14).

§ 3. Доказательство основных результатов

Очевидно, утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из оценки (2.10), поэтому достаточно доказать теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Будем следовать схеме из [13]. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.8). Используя матрицу $H(t)$, определенную перед формулировкой теоремы 2 на всей полуоси $\{t > 0\}$, и матрицы $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, рассмотрим на решении следующий функционал Ляпунова — Красовского:

$$V(t, y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds + \int_{t-\tau}^{t} \left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds. \quad (3.1)$$

Дифференцируя его, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(t, y) = &\left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle \\ &+ \left\langle H(t)\left(A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), y(t)\right\rangle \\ &+ \left\langle H(t)y(t), \left(A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle \\ &+ \langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle + \int_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds \\ &+ \left\langle L(0)\frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle - \left\langle L(\tau)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\rangle\end{aligned}$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (1.1), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)=-\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \tag{3.2}$$

где матрица $Q(t)$ определена в (2.4). В силу (2.6) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le -p_{\min}(t)\|y(t)\|^2$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds,$$

где $p_{\min}(t)>0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Очевидно,

$$h_{\min}(t)\|y(t)\|^2\le\langle H(t)y(t),y(t)\rangle\le\|H(t)\|\,\|y(t)\|^2, \tag{3.3}$$

где $h_{\min}(t)>0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Используя (2.7), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\,\langle H(t)y(t),y(t)\rangle$$
$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\, ds-l\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.1) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le-\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t)$ определено в (2.12). Из этого дифференциального неравенства вытекает оценка

$$V(t,y)\le V(0,\varphi)\exp\left(-\int\limits_0^t\gamma(\xi)\,d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (2.11). Используя (3.3), с учетом определения функционала (3.1) получаем

$$\|y(t)\|^2\le\frac{1}{h_{\min}(t)}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle\le\frac{V(t,y)}{h_{\min}(t)}\le\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}\exp\left(-\int\limits_0^t\gamma(\xi)\,d\xi\right).$$

Отсюда имеем требуемое неравенство (2.10).

Теорема 2 доказана.

Для доказательства теоремы 3 воспользуемся вспомогательной леммой из теории матриц. Здесь и далее через I будем обозначать единичную матрицу.

Лемма. *Пусть*

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) & R_{13}(t) \\ R_{12}^*(t) & R_{22}(t) & R_{23}(t) \\ R_{13}^*(t) & R_{23}^*(t) & R_{33}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T],$$

— положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Тогда имеет место представление

$$R(t) = \begin{pmatrix} I & \widetilde{R}_1(t)\widetilde{R}_2^{-1}(t) & R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t) \\ 0 & I & R_{23}(t)R_{33}^{-1}(t) \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} R_{11}(t) - \widetilde{R}_1(t)\widetilde{R}_2^{-1}(t)\widetilde{R}_1^*(t) - R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{13}^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{R}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & R_{33}(t) \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \widetilde{R}_2^{-1}(t)\widetilde{R}_1^*(t) & I & 0 \\ R_{33}^{-1}(t)R_{13}^*(t) & R_{33}^{-1}(t)R_{23}^*(t) & I \end{pmatrix},$$

где

$$\widetilde{R}_1(t) = R_{12}(t) - R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{23}^*(t), \quad \widetilde{R}_2(t) = R_{22}(t) - R_{23}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{23}^*(t),$$

причем матрицы

$$R_{11}(t) - \widetilde{R}_1(t)\widetilde{R}_2^{-1}(t)\widetilde{R}_1^*(t) - R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{13}^*(t), \quad \widetilde{R}_2(t), \quad R_{33}(t)$$

положительно определены.

Доказательство теоремы 3. Используя матрицу $H(t)$, определенную перед формулировкой теоремы 3 на всей полуоси $\{t > 0\}$, и матрицы $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3, рассмотрим на решениях задачи (2.8) функционал (3.1). Как при доказательстве теоремы 2, после дифференцирования получаем (3.2). В силу леммы

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle P(t)y(t), y(t)\rangle,$$

где $P(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (2.14). Тогда

$$\langle P(t)y(t), y(t)\rangle \geq p_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $p_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Используя (2.7) и (3.3), из (3.2) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$
$$- k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds - l\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.1) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t)$ определено в (2.12). Отсюда, как при доказательстве теоремы 2, имеем неравенство (2.10).

Теорема 3 доказана.

Следствие. *Предположим, что существуют матрицы* $H(t) \in C^1[0,T]$, $K(s), L(s) \in C^1[0,\tau]$, *удовлетворяющие условиям* (2.1)–(2.3), (2.7), *такие, что*

$$P(t) > 0, \quad Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t) > 0, \quad Q_{33}(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$

где $Q_{ij}(t)$ *и* $P(t)$ *заданы в* (2.5) *и* (2.14) *соответственно. Тогда нулевое решение системы* (1.1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. В силу леммы, сформулированной перед доказательством теоремы 3, матрица $Q(t)$ в (2.4) положительно определена тогда и только тогда, когда матрица $P(t)$ в (2.14) и матрицы $Q_{22}(t)-Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)$, $Q_{33}(t)$ положительно определены.

Замечание 3. Отметим, что требование положительной определенности матрицы $Q_{33}(t)$ влечет условие принадлежности спектра матрицы $C(t)$ при всех $t \in [0,T]$ единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| < 1\}$, что согласуется с хорошо известными результатами для уравнений нейтрального типа с постоянной матрицей C. Действительно, если $Q_{33}(t) > 0$, то в силу условий (2.3) на $L(s)$ имеем

$$L(0) - C^*(t)L(0)C(t) \ge Q_{33}(t) > 0, \quad t \in [0,T].$$

Следовательно, $L(0) = L^*(0) > 0$ и при каждом $t \in [0,T]$ матрица $L(0)$ удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$L(0) - C^*(t)L(0)C(t) = G(t)$$

с положительно определенной эрмитовой правой частью. Тогда согласно критерию Ляпунова [18] все собственные значения матрицы $C(t)$ при каждом $t \in [0,T]$ лежат в единичном круге.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наук. думка, 1989.
4. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
5. *Долгий Ю. Ф.* Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1996.
6. *Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. (Math. Appl.; V. 463).
7. *Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.* Stability of time-delay systems. Control engineering. Boston: Birkhäuser, 2003.
8. *Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.* Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer-Verl., 2012.
9. *Gil' M. I.* Stability of neutral functional differential equations. Paris: Atlantis Press, 2014. (Atlantis Stud. Differ. Equ.; V. 3).

10. *MacDonald N.* Biological delay systems: Linear stability theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1989. (Camb. Stud. Math. Biol.; V. 8).

11. *Kuang Y.* Delay differential equations with applications in population dynamics. Boston: Acad. Press, 1993. (Math. Sci. Eng.; V. 191).

12. *Erneux T.* Applied delay differential equations. New York: Springer-Verl., 2009. (Surv. Tutorials Appl. Math. Sci.; V. 3).

13. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

14. *Матвеева И. И.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.

15. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

16. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2015. V. 2015, N 83. P. 1–22.

17. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

18. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 15 апреля 2016 г.

Матвеева Инесса Изотовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`matveeva@math.nsc.ru`