Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.956.6

О ЗАДАЧЕ ТИПА ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО–ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Т. Ш. Кальменов, М. А. Садыбеков

Аннотация. Сформулирована новая нелокальная краевая задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Уравнение первого рода, т. е. линия изменения типа не является характеристикой уравнения. Предлагаемое новое нелокальное условие связывает между собой точки на границах параболической части и гиперболической части области. Эта задача является обобщением хорошо известных задач типа Франкля. В отличие от имеющихся публикаций других авторов, близких по тематике, в предлагаемой постановке задачи гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником. Доказана однозначная разрешимость сформулированной задачи в смысле классического и сильного решений.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.205

Ключевые слова: нелокальные граничные условия, уравнение параболо-гиперболического типа, функция Грина, задача Франкля.

1. Введение

В отличие от теории локальных краевых задач для уравнений смешанного типа гораздо менее исследованными являются нелокальные краевые задачи. Информацию об известных к настоящему времени результатах можно почерпнуть из списка цитирований в монографиях Т. Д. Джураева [1, 2]. Интересные результаты приведены в недавно вышедшей монографии А. С. Бердышева [3].

В газовой динамике Ф. И. Франкль [4, 5] для уравнения Чаплыгина

$$k(y)u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

где $k(0) = 0$, $k'(y) > 0$, впервые поставил краевую задачу, в которой носителем нелокального краевого условия («скачка уплотнения»)

$$u(0, y) - u(0, -y) = f(y)$$

является часть $-a < y < a$ границы $x = 0$ области, состоящей из частей границ подобластей эллиптичности и гиперболичности уравнения. Поэтому нелокальные краевые условия такого типа — связывающие значения функций на границах областей разного типа уравнения — называют *условиями типа Франкля.*

Из недавних публикаций, близких по тематике, можно отметить работы [6–15]. Однако в этих работах нелокальные задачи рассматривались в прямоугольных областях. В нашей постановке задачи гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником.

Работа выполнена при поддержке грантов 0825/ГФ4 и 4075/ГФ4 МОН Республики Казахстан.

2. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $\Omega \subset R^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B, $A_0 = (0,0)$, $A = (0,1)$, $B_0 = (1,1)$, $B = (1,0)$, а при $y < 0$ — характеристиками AC: $x + y = 0$ и BC: $x - y = 1$ уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \left\{ \begin{array}{l} u_x - u_{yy},\ y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy},\ y < 0 \end{array} \right\} = f(x,y). \tag{1}$$

Это уравнение смешанного типа. Его относят к первому роду потому, что линия изменения типа $y = 0$ не является характеристикой уравнения.

Через $W_2^l(\Omega) = H^l(\Omega)$ обозначим пространство С. Л. Соболева с нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$; $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу, являющуюся обобщением аналога задачи Франкля для параболо-гиперболического уравнения (1).

Задача F. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее классическим краевым условиям*

$$u|_{AA_0} = 0, \quad u_y|_{A_0B_0} = 0 \tag{2}$$

и нелокальному краевому условию

$$\alpha u(\theta_0(t)) + \beta u(\theta_1(t)) = \gamma u(\theta(t)), \quad 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

где $\theta(t) = (t,1)$, $\theta_0(t) = \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}\right)$, $\theta_1(t) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right)$; α, β *и* γ — *заданные числа.*

Легко видеть, что $\theta(t) \in A_0B_0$, $\theta_0(t) \in AC$, $\theta_1(t) \in BC$. Поэтому новое нелокальное краевое условие (3) связывает между собой значения искомого решения на параболической части границы A_0B_0 и на гиперболических частях границы области — на характеристиках AC и BC.

Отметим, что при $\gamma = 0$ краевые условия в гиперболической части области вида

$$\alpha u(\theta_0(t)) + \beta u(\theta_1(t)) = 0$$

хорошо известны и носят название *краевых условий со смещением.* Они впервые введены А. М. Нахушевым для волнового уравнения (см. [16]).

Определение 1. *Классическим решением задачи F* назовем функцию $u(x,y)$ из класса $W = C^1(\overline{\Omega}) \cap C^{1;2}_{x,y}(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2)$, удовлетворяющую краевым условиям (2), (3) задачи и обращающую уравнение (1) в тождество.

Определение 2. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением задачи F*, если существует последовательность функций $\{u_n\}$, $u_n \in W$, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3) задачи, такая, что последовательности u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ к функциям u и f соответственно.

Теорема. *Пусть $\alpha + \beta \ne 0$. Тогда*

(а) *Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x,y)$ задачи F. Это решение принадлежит классу $H^1(\Omega) \cap H^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_1 \le C\|f\|_0. \tag{4}$$

(б) *Для любой функции $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $f(A) = 0$, существует единственное классическое решение $u(x,y)$ задачи F. Это решение устойчиво в норме*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le C\|f\|_{C(\overline{\Omega})}. \tag{5}$$

Доказательство проведем в два этапа.

3. Сведение к интегральному уравнению

Пусть сначала $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $f(A) = 0$. Докажем п. (a). В силу однозначной разрешимости задачи Коши для волнового уравнения решение уравнения (1) при $y < 0$ представляется по формуле Даламбера

$$u(x,y) = -\int\limits_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int\limits_{\xi_1}^{\eta} f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 + \frac{1}{2}[\tau(\xi)+\tau(\eta)] - \frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\eta} \nu(s)\,ds, \qquad (6)$$

где

$$\tau(x) = u(x,0), \quad \tau(0) = 0, \quad \xi = x+y, \quad \eta = x-y,$$
$$\nu(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0), \quad f_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Отсюда с учетом $\tau(0) = 0$ непосредственным вычислением получаем

$$\alpha u(\theta_0(t)) + \beta u(\theta_1(t)) = \frac{\alpha+\beta}{2}\tau(t) - \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^t \nu(s)\,ds - \frac{\beta}{2}\int\limits_t^1 \nu(s)\,ds$$
$$+ \frac{\beta}{2}\tau(1) - \alpha\int\limits_0^t d\xi_1 \int\limits_{\xi_1}^t f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 - \beta\int\limits_t^1 d\xi_1 \int\limits_{\xi_1}^1 f_1(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1. \qquad (7)$$

Это есть основное соотношение для $\tau(t)$ и $\nu(t)$, полученное из гиперболической части области.

В параболической части области рассмотрим задачу со смешанным краевым условием: *найти в области* Ω_1 *решение уравнения теплопроводности*

$$u_x - u_{yy} = f(x,y), \qquad (8)$$

удовлетворяющее однородным начально-краевым условиям (2) *и неоднородному краевому условию*

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1. \qquad (9)$$

Очевидно, что необходимым условием существования решения является естественное условие согласования $\tau(0) = 0$. В дальнейшем его будем считать выполненным.

Считая функцию $\tau(x)$ известной, вычислим $\nu(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$.

Это смешанная начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Ее функция Грина имеет вид [17, гл. VI, § 3, п. 5]

$$G(x,y,y_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{\pi x}}\left[\exp\left\{-\frac{(y-y_1+2n)^2}{4x}\right\} - \exp\left\{-\frac{(y+y_1+2n)^2}{4x}\right\}\right]. \qquad (10)$$

Поэтому для решения задачи (8), (2), (9) имеет место представление

$$u(x,y) = \int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^1 G(x-x_1,y,y_1) f(x_1,y_1)\,dy_1 + \int\limits_0^x G_{y_1}(x-s,y,0)\tau(s)\,ds. \qquad (11)$$

Отсюда при $y \to 1$ находим

$$u(\theta(t)) = \int\limits_0^t dx_1 \int\limits_0^1 G(t-x_1,1,y_1) f(x_1,y_1)\,dy_1 + \int\limits_0^t G_{y_1}(t-s,1,0)\tau(s)\,ds, \qquad (12)$$

а дифференцируя по y и устремляя y к 0, получаем

$$\nu(x) = \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^x G_{y_1}(x-s, y, 0)\tau(s)\, ds \Big|_{y=0} + \Phi_1(x), \tag{13}$$

где

$$\Phi_1(x) = \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^1 G(x-x_1, y, y_1) f(x_1, y_1)\, dy_1 \Big|_{y=0}.$$

Формулы (12) и (13) дают основное соотношение для $\tau(t)$ и $\nu(t)$, полученное из параболической части области.

Подставляя (7) и (12) в краевое условие (3), после дифференцирования с учетом $\tau(0) = 0$ имеем

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\tau'(t) - \frac{\alpha-\beta}{2}\nu(t) - \gamma \int\limits_0^t G_{y_1}(t-s, 1, 0)\tau'(s)\, ds = F(t), \tag{14}$$

где $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$,

$$F_1(t) = \gamma \frac{d}{dt} \int\limits_0^t dx_1 \int\limits_0^1 G(t-x_1, 1, y_1) f(x_1, y_1)\, dy_1,$$

$$F_2(t) = \alpha \int\limits_0^t f_1(\xi_1, t)\, d\xi_1 + \beta \int\limits_t^1 f_1(t, \eta_1)\, d\eta_1.$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (13). Для этого с учетом условия $\tau(0) = 0$ и явного вида функции Грина (10) интегрированием по частям преобразуем

$$\int\limits_0^x G_{y_1}(x-s, y, 0)\tau(s)\, ds = \int\limits_0^x G_1(x-s, y)\tau'(s)\, ds,$$

где

$$G_1(x-s, y) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{\frac{y+n}{2\sqrt{(x-s)}}} e^{-z^2}\, dz + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int\limits_{\frac{y+n}{2\sqrt{(x-s)}}}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz.$$

Отсюда легко получить, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^x G_{y_1}(x-s, y, 0)\tau(s)\, ds \Big|_{y=0} = -\int\limits_0^x k(x-s)\tau'(s)\, ds,$$

где

$$k(x-s) = \frac{1}{\sqrt{\pi(x-s)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \exp\left\{-\frac{n^2}{4(x-s)}\right\},$$

и формула (13) примет вид

$$\nu(x) = -\int\limits_0^x k(x-s)\tau'(s)\,ds + \Phi_1(x). \tag{15}$$

Подставляя найденное из (15) в (14), получаем интегральное уравнение

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\tau'(t) + \frac{\alpha-\beta}{2}\int\limits_0^t k(t-s)\tau'(s)\,ds - \gamma\int\limits_0^t G_{y_1}(t-s,1,0)\tau'(s)\,ds = \Phi(t), \tag{16}$$

где $\Phi(t) = F(t) + \frac{\alpha-\beta}{2}\Phi_1(t)$.

4. Построение решения задачи

Легко видеть, что ядро $k(t-s)$ имеет слабую полярную особенность, а функция $G_{y_1}(t-s,1,0)$ бесконечно непрерывно дифференцируема при всех $s \le t \le 1$. Поэтому при $\alpha+\beta \neq 0$ (16) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое всегда имеет единственное решение. Гладкость этого решения зависит от класса, которому принадлежит $\Phi(t)$.

Лемма. *Пусть* $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $f(A) = 0$. *Тогда* $\Phi(t)$ *принадлежит* $C^1[0,1]$ *и удовлетворяет оценкам*

$$\|\Phi(t)\|_{C[0,1]} \le \mathrm{C}\|f\|_{C(\overline{\Omega})}, \tag{17}$$

$$\|\Phi(t)\|_{L_2(0,1)} \le \mathrm{C}\|f\|_0. \tag{18}$$

Доказательство леммы получается непосредственным вычислением и оценкой каждого из слагаемых

$$\Phi(t) = F_1(t) + F_2(t) + \frac{\alpha-\beta}{2}\Phi_1(t).$$

На основании этой леммы всегда существует единственное решение $\tau'(t)$ уравнения (16). Это решение (в зависимости от гладкости $\Phi(t)$) принадлежит классу $\tau'(t) \in C^1[0,1]$ или $\tau'(t) \in L_2(0,1)$ и в силу (17) и (18) удовлетворяет оценке

$$\|\tau'(t)\|_{C[0,1]} \le \mathrm{C}\|f\|_{C(\overline{\Omega})} \tag{19}$$

или

$$\|\tau'(t)\|_{L_2(0,1)} \le \mathrm{C}\|f\|_0. \tag{20}$$

С учетом $\tau(0) = 0$ однозначно находим $\tau(t)$.

Теперь решение задачи F восстанавливается в области Ω_1 как решение первой начально-краевой задачи по формуле (11). Значение $\nu(x)$ находим из (15). Поэтому в области Ω_2 решение задачи F однозначно восстанавливается как решение задачи Коши по формуле Даламбера (6).

Из свойств решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности и задачи Коши для волнового уравнения следует, что решение задачи F принадлежит классам гладкости, указанным в теореме, и (в силу неравенств (19) и (20)) удовлетворяет оценкам (4) и (5). П. (a) теоремы доказан.

Покажем, что при $f \in L_2(\Omega)$ найденное решение будет сильным. Так как $C_0^1(\overline{\Omega})$ плотно в $L_2(\Omega)$, для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует последовательность функций $f_n \in C_0^1(\overline{\Omega})$ такая, что $\|f_n - f\| \to 0$, $n \to \infty$. Обозначим через u_n классическое решение задачи F с правой частью f_n. Такое решение существует в силу доказанного п. (а), и $u_n \in W$ для всех $f_n \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Ввиду неравенства (4) имеем

$$\|u_n - u\|_1 \leq c\|f_n - f\|_0 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Стало быть, $\{u_n\}$ — последовательность, отвечающая определению сильного решения. Поэтому задача F сильно разрешима для любой правой части f и сильное решение принадлежит классу $H^1(\Omega) \cap H^{1;2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega})$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979.

2. *Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов А.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986.

3. *Бердышев А. С.* Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. Алматы: Изд-во КазНПУ им. Абая, 2015.

4. *Франкль Ф. И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. Т. 9, № 2. С. 121–142.

5. *Франкль Ф. И.* Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 196–202.

6. *Капустин Н. Ю.* Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274, № 6. С. 1294–1298.

7. *Капустин Н. Ю.* Существование и единственность L_2-решения задачи Трикоми для одного параболо-гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 2. С. 288–292.

8. *Садыбеков М. А., Тойжанова Г. Д.* Спектральные свойства одного класса краевых задач для параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 176–179.

9. *Бердышев А. С.* О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе — Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 500–510.

10. *Рахманова Л. Х.* Решение нелокальной задачи спектральным методом для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2007. № 11. С. 36–40.

11. *Сабитов К. Б., Рахманова Л. Х.* Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 9. С. 1175–1181.

12. *Сабитов К. Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 4. С. 596–602.

13. *Оразов И., Садыбеков М. А.* Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 180–186.

14. *Кальменов Т. Ш., Токмагамбетов Н. Е.* Об одной нелокальной краевой задаче для многомерного уравнения теплопроводности в нецилиндрической области // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1287–1293.

15. *Моисеев Е. И., Нефедов П. В., Холомеева А. А.* Аналоги задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 12. С. 1677–1680.

16. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.

17. *Справочная математическая библиотека.* Линейные уравнения математической физики / В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. М.: Наука, 1964.

Статья поступила 30 марта 2016 г.

Кальменов Тынысбек Шарипович, Садыбеков Махмуд Абдысаметович
Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125, Алматы 050010, Казахстан
sadybekov@math.kz