Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.51

О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д. Г. Джумабаева,
М. И. Дьяченко, Е. Д. Нурсултанов

Аннотация. Изучается поточечная сходимость по Прингсхейму кратных тригонометрических рядов. Получено условие на коэффициенты ряда, обеспечивающее сходимость по Прингсхейму, и показана неулучшаемость этого условия.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.203

Ключевые слова: кратный тригонометрический ряд, сходимость по Прингсхейму, пространство Лебега со смешанной метрикой, монотонные коэффициенты.

§ 1. Введение

В работе рассматриваются кратные тригонометрические ряды вида

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty} a_{m_1,m_2,\dots,m_n} e^{i(m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n)}, \tag{1}$$

где $a_{m_1,\dots,m_n} \geq 0$, $a_{m_1,\dots,m_n} \to 0$ при $m_1+\dots+m_n\to\infty$.

Обозначим $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $\mathbf{xm} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$. Пусть $S_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \sum_{k_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{m_n} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}}$ — прямоугольная частичная сумма ряда (1).

Если существует конечный предел

$$\lim_{\min\limits_{1\leq i\leq n} m_i\to\infty} S_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}),$$

то ряд (1) называется *сходящимся по Прингсхейму* в точке $\mathbf{x}$.

Вопросы сходимости общих тригонометрических рядов и рядов Фурье рассматривались в работах Л. В. Жижиашвили [1], Б. И. Голубова [2], С. В. Конягина [3], Феффермана [4], Н. Р. Тевзадзе [5] и многих других авторов. Имеются и статьи, посвященные рядам вида (1), о которых упомянем ниже.

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 4080/ГФ4), вторым автором — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–01236) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3682.2014.1), третьим автором — при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (гранты 4080/ГФ4, 3311/ГФ4).

© 2017 Джумабаева Д. Г., Дьяченко М. И., Нурсултанов Е. Д.

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1,\ i = 1, 2, \dots, n\}$. Для вектора $\varepsilon \in E$ и n-кратной последовательности чисел $\{a_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m}=1}^{\infty}$ определим разность

$$\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}} = \triangle^{\varepsilon_1}(\triangle^{\varepsilon_2} \dots (\triangle^{\varepsilon_n} a_{m_1, m_2, \dots, m_n}) \dots),$$

где

$$\triangle^{\varepsilon_i} b_{\mathbf{m}} = \begin{cases} b_{\mathbf{m}} & \text{для } \varepsilon_i = 0, \\ b_{\mathbf{m}} - b_{m_1, \dots, m_i+1, \dots, m_n} & \text{для } \varepsilon_i = 1. \end{cases}$$

Обозначим $E^k = \{\varepsilon \in E : |\varepsilon| = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = k\}$.

Последовательность неотрицательных чисел $\{a_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n}$ будем называть *k-монотонной*, если $\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}} \geq 0$ для любого $\varepsilon \in E^k$. При $k = 1$ это определение совпадает с монотонностью по каждому индексу, т. е. $a_{\mathbf{m}} \geq a_{\mathbf{k}}$ при $m_i \leq n_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. В случае $k = n$ k-монотонность совпадает с монотонностью по Харди. В одномерном случае рассматривалась и дробная монотонность. Так, ряды с α-монотонными коэффициентами при $\alpha \in (0, 1)$ изучались в [6].

Определим M_k как множество рядов вида (1) с k-монотонными коэффициентами. Имеет место соотношение $M_{k+1} \subset M_k$, т. е. ряды с монотонными по Харди коэффициентами образуют самое узкое, а монотонные по каждому переменному — самое широкое из множеств в этой шкале.

Изучению рядов из M_1 либо из M_n также посвящено много работ. Здесь отметим работы Гейрингера [7], Морица [8], М. И. Дьяченко [9–11] и др. В тех случаях, когда коэффициенты Фурье интегрируемой функции f обладают свойством M_k, будем писать $f \in M_k$. Гейрингером [12] установлено, что тригонометрические ряды из M_n сходятся всюду на $(0, 2\pi)^n$. В [10] доказано, что из условия $f \in L_p[0, 2\pi]^n \cap M_1$ следует сходимость ряда Фурье функции f по Прингсхейму всюду на $(0, 2\pi)^n$ только при $p > n$.

Целью данной статьи является изучение поточечной сходимости по Прингсхейму кратных тригонометрических рядов с k-монотонными коэффициентами.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, где $1 < p_i < \infty$. Пространство $L_{\mathbf{p}}[0, 2\pi]^n$, называемое *пространством Лебега со смешанной метрикой*, определяется как множество измеримых на $[0, 2\pi]^n$ функций, для которых конечна величина

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}} = \left(\int_0^{2\pi} \dots \left(\int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

В § 3 будет установлена справедливость следующих утверждений.

Теорема 1. *Пусть $1 \leq k \leq n$, $1 < p_1, \dots, p_n < \infty$ и $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} < k$. Если дан ряд из M_k и для его коэффициентов имеет место*

$$\sup_{\substack{1 \leq m_i < \infty, \\ 1 \leq i \leq n}} m_1^{\frac{p_1 - 1}{p_1}} \dots m_n^{\frac{p_n - 1}{p_n}} a_{m_1 \dots m_n} < \infty, \tag{2}$$

то этот ряд сходится по Прингсхейму всюду на $(0, 2\pi)^n$.

Следствие 1. *Пусть $1 \leq k \leq n$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, где $1 < p_1, \dots, p_n < \infty$ и $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} < k$. Если $f \in L_{\mathbf{p}}[0, 2\pi]^n \cap M_k$, то ряд Фурье функции f сходится по Прингсхейму всюду на $(0, 2\pi)^n$.*

Неулучшаемость данных утверждений в некотором смысле показывает

Теорема 2. *Пусть $1 \leq k < n$, $1 < p_1, \dots, p_n < \infty$ и $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = k$. Тогда существует ряд из M_k, удовлетворяющий условию (2), но расходящийся по кубам в точке $(\pi, \pi, \dots, \pi)$.*

§ 2. Леммы

Лемма 1 (преобразование Абеля). *Пусть* $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n}$, $\{b_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n}$ — *n-кратные последовательности действительных чисел. Тогда для любого* $\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n$ *справедливо равенство*

$$\sum_{\substack{1\le r_i\le m_i,\\ i=1,\dots,n}} a_{\mathbf{r}}b_{\mathbf{r}} = \sum_{\varepsilon\in E}\sum_{k_1=(1-\varepsilon_1)m_1+\varepsilon_1}^{m_1-\varepsilon_1}\cdots\sum_{k_n=(1-\varepsilon_n)m_n+\varepsilon_n}^{m_n-\varepsilon_n}\left(\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{k}}\sum_{l_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{l_n=1}^{k_n} b_{\mathbf{l}}\right).$$

Доказательство проводится с использованием индукции и одномерного преобразования Абеля. □

Также справедлива

Лемма 2. *Пусть* $1\le k\le n$, $\frac{1}{p_1}+\dots+\frac{1}{p_n}<k$. *Если последовательность* $\{a_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n}$ *k-монотонна и удовлетворяет условию* (2), *то сходится ряд*

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}|\triangle^{\mathbf{1}}a_{m_1,\dots,m_n}|.$$

Здесь и далее $\mathbf{1}=(1,\dots,1)$.

Доказательство. При $k=n$ утверждение леммы очевидно. Пусть $k\le n-1$ и P_n — множество всех перестановок последовательности $\{1,2,\dots,n\}$. Тогда

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}|\triangle^{\mathbf{1}}a_{m_1,\dots,m_n}|\le\sum_{\sigma\in P_n}\sum_{m_{\sigma_n}=1}^{\infty}\sum_{m_{\sigma_{n-1}}=m_{\sigma_n}}^{\infty}\cdots\sum_{m_{\sigma_1}=m_{\sigma_2}}^{\infty}|\triangle^{\mathbf{1}}a_{m_1,\dots,m_n}|.$$

Поэтому достаточно доказать для произвольного $\sigma\in P_n$ сходимость ряда

$$\sum_{m_{\sigma_n}=1}^{\infty}\sum_{m_{\sigma_{n-1}}=m_{\sigma_n}}^{\infty}\cdots\sum_{m_{\sigma_1}=m_{\sigma_2}}^{\infty}|\triangle^{\mathbf{1}}a_{m_1,\dots,m_n}|. \tag{3}$$

Пусть $\sigma\in P_n$, тогда найдется $\varepsilon\in E^k$ такое, что $\varepsilon_{\sigma_1}=\dots=\varepsilon_{\sigma_k}=1$ и $\varepsilon_{\sigma_j}=0$ при $j>k$. Из определения $|\triangle^{\mathbf{1}}a_{m_1,\dots,m_n}|$ имеем

$$|\triangle^{\mathbf{1}}a_{m_1,\dots,m_n}|\le\sum_{\nu\in E,\ \nu\perp\varepsilon}|\triangle^{\varepsilon}a_{\mathbf{m}+\nu}|,$$

где $\nu\perp\varepsilon$ означает, что $\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j\varepsilon_j=0$, т. е. $\nu_{\sigma_j}=0$, $1\le j\le k$.

Соответственно перестановке σ введем обозначение $b_{m_{\sigma_1},\dots,m_{\sigma_n}}:=a_{m_1,\dots,m_n}$, и пусть $\varepsilon'=(1,\dots,1,0,\dots,0)\in E^k$. Таким образом, учитывая k-монотонность, оценим ряд (3):

$$\sum_{\substack{\nu\in E,\\ \nu\perp\varepsilon}}\sum_{m_{\sigma_n}=1}^{\infty}\sum_{m_{\sigma_{n-1}}=m_{\sigma_n}}^{\infty}\dots\sum_{m_{\sigma_1}=m_{\sigma_2}}^{\infty}|\triangle^{\varepsilon}a_{\mathbf{m}+\nu}|$$

$$=\sum_{\substack{\nu\in E,\\ \nu\perp\varepsilon}}\sum_{m_{\sigma_n}=1}^{\infty}\sum_{m_{\sigma_{n-1}}=m_{\sigma_n}}^{\infty}\dots\sum_{m_{\sigma_1}=m_{\sigma_2}}^{\infty}\triangle^{\varepsilon}a_{\mathbf{m}+\nu}$$

$$=\sum_{\substack{\nu\in E,\\ \nu\perp\varepsilon}}\sum_{m_{\sigma_n}=1}^{\infty}\sum_{m_{\sigma_{n-1}}=m_{\sigma_n}}^{\infty}\dots\sum_{m_{\sigma_1}=m_{\sigma_2}}^{\infty}\triangle^{\varepsilon}b_{m_{\sigma_1}+\nu_1,\dots,m_{\sigma_n}+\nu_n}$$

$$=\sum_{\substack{\nu\in E,\\ \nu\perp\varepsilon}}\sum_{m_{\sigma_n}=1}^{\infty}\dots\sum_{m_{\sigma_{k+1}}=m_{\sigma_{k+2}}}^{\infty}b_{m_{\sigma_{k+1}},\dots,m_{\sigma_{k+1}},m_{\sigma_{k+1}}+\nu_{k+1},\dots,m_{\sigma_n}+\nu_n}$$

$$\le 2^{n-k}\sum_{m_{\sigma_n}=1}^{\infty}\dots\sum_{m_{\sigma_{k+1}}=m_{\sigma_{k+2}}}^{\infty}b_{m_{\sigma_{k+1}},\dots,m_{\sigma_{k+1}},m_{\sigma_{k+2}},\dots,m_{\sigma_n}}$$

$$\lesssim\sum_{m_{\sigma_n}=1}^{\infty}\dots\sum_{m_{\sigma_{k+1}}=m_{\sigma_{k+2}}}^{\infty}m_{\sigma_n}^{\frac{1}{p_{\sigma_n}}-1}\dots m_{\sigma_{k+1}}^{(\frac{1}{p_{\sigma_{k+1}}}+\dots+\frac{1}{p_{\sigma_1}})-k-1}$$

$$\lesssim\sum_{m=1}^{\infty}m^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_n}-k-1}$$

(здесь при $k=n-1$ остается только внешнее суммирование по m_{σ_n} от 1 до ∞). Согласно условию леммы последний ряд сходящийся. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $1\le k\le n$, $\mathbf{p}=(p_1,\dots,p_n)$, *где* $1<p_1,\dots,p_n<\infty$. *Если* $f\in L_{\mathbf{p}}[0,2\pi]^n\cap M_1$, *то для соответствующей последовательности коэффициентов имеет место условие*

$$\sup_{\substack{1\le m_i<\infty,\\ 1\le i\le n}} m_1^{\frac{p_1-1}{p_1}}\dots m_n^{\frac{p_n-1}{p_n}}a_{m_1\dots m_n}<\infty.$$

Доказательство. Пусть $f\in L_{\mathbf{p}}[0,2\pi]^n\cap M_1$, $f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n)$ — повторная невозрастающая перестановка функции f, полученная путем применения невозрастающей перестановки последовательно по переменным $x_1,x_2,\dots,x_n$, причем в каждом случае остальные переменные считаются фиксированными.

Получим сначала оценку

$$\sup_{0<t_j\le 2\pi}t_1^{1/p_1}\cdots t_n^{1/p_n}f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n)\le\|f\|_{L_{\mathbf{p}}[0,2\pi]^n}. \tag{4}$$

В случае $n=1$ из невозрастания функции $f^*(t)$ имеем

$$\sup_{0<t\le 2\pi}t^{1/p}f^*(t)=\sup_{0<t\le 2\pi}\left(\int_0^t ds\right)^{1/p}f^*(t)$$

$$\le\sup_{0<t\le 2\pi}\left(\int_0^t (f^*(s))^p\,ds\right)^{1/p}=\|f\|_{L_p[0,2\pi]}.$$

Предположим, что для n неравенство (4) верно. Тогда аналогично одномерному случаю

$$\sup_{0<t_j\le 2\pi} t_1^{1/p_1}\dots t_{n+1}^{1/p_{n+1}} f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_{n+1})$$

$$\le \sup_{0<t_j\le 2\pi} t_1^{1/p_1}\dots t_n^{1/p_n}\left(\int\limits_0^{2\pi}(f^{*_1,\dots,*_{n+1}}(t_1,\dots,t_n,s_{n+1}))^{p_{n+1}}\,ds_{n+1}\right)^{1/p_{n+1}}$$

$$=\sup_{0<t_j\le 2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}\big(t_1^{1/p_1}\dots t_n^{1/p_n} f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n,x_{n+1})\big)^{p_{n+1}}\,dx_{n+1}\right)^{1/p_{n+1}}.$$

Применяя к подынтегральной функции при фиксированном x_{n+1} предположение индукции, получим (4).

Из [13], в частности, имеем

$$\sup_{\substack{1\le m_i<\infty,\\ 1\le i\le n}} m_1^{-\frac{1}{p_1}}\dots m_n^{-\frac{1}{p_n}}\sum_{l_1=1}^{m_1}\dots\sum_{l_n=1}^{m_n} a_{l_1\dots l_n}$$

$$\lesssim \sup_{0<t_j\le 2\pi} t_1^{1/p_1}\dots t_n^{1/p_n} f^{*_1,\dots,*_n}(t_1,\dots,t_n)\le \|f\|_{L_{\mathbf{p}}[0,2\pi]^n}.$$

Учитывая, что k-монотонность влечет 1-монотонность, получим

$$\sup_{\substack{1\le m_i<\infty,\\ 1\le i\le n}} m_1^{\frac{p_1-1}{p_1}}\dots m_n^{\frac{p_n-1}{p_n}} a_{m_1\dots m_n}$$

$$\le \sup_{\substack{1\le m_i<\infty,\\ 1\le i\le n}} m_1^{-\frac{1}{p_1}}\dots m_n^{-\frac{1}{p_n}}\sum_{l_1=1}^{m_1}\dots\sum_{l_n=1}^{m_n} a_{l_1\dots l_n}\lesssim \|f\|_{L_{\mathbf{p}}[0,2\pi]^n}. \qquad \square$$

В дальнейшем для натуральных r обозначим

$$D_r(t)=\sum_{k=1}^{r} e^{ikt}.$$

§ 3. Сходимость кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами

Приступим к доказательствам теоремы 1 и следствия 1.

Доказательство теоремы 1. Как было отмечено, из условия принадлежности ряда множеству M_k следует, что при $|\varepsilon|\le k$ имеет место

$$\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}}\ge 0. \tag{5}$$

Рассмотрим частичную сумму $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x})$ ряда (1) и применим к ней преобразование Абеля (см. лемму 1):

$$S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x})=\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{m_1=(1-\varepsilon_1)N_1\varepsilon_1}^{N_1-\varepsilon_1}\cdots\sum_{m_n=(1-\varepsilon_n)N_n+\varepsilon_n}^{N_n-\varepsilon_n}\left(\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}}\prod_{i=1}^{n} D_{m_i}(x_i)\right)$$

$$= \sum_{d=0}^{k} \sum_{\varepsilon\in E^d} \sum_{m_1=(1-\varepsilon_1)N_1+\varepsilon_1}^{N_1-\varepsilon_1} \cdots \sum_{m_n=(1-\varepsilon_n)N_n+\varepsilon_n}^{N_n-\varepsilon_n} \left(\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}} \prod_{i=1}^{n} D_{m_i}(x_i)\right)$$

$$+ \sum_{d=k+1}^{n-1} \sum_{\varepsilon\in E^d} \sum_{m_1=(1-\varepsilon_1)N_1+\varepsilon_1}^{N_1-\varepsilon_1} \cdots \sum_{m_n=(1-\varepsilon_n)N_n+\varepsilon_n}^{N_n-\varepsilon_n} \left(\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}} \prod_{i=1}^{n} D_{m_i}(x_i)\right)$$

$$+ \sum_{m_1=1}^{N_1-1} \cdots \sum_{m_n=1}^{N_n-1} \left(\triangle^{\mathbf{1}} a_{\mathbf{m}} \prod_{i=1}^{n} D_{m_i}(x_i)\right) = B^1_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) + B^2_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) + B^3_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Рассмотрим слагаемые суммы (6) отдельно. Для $\mathbf{x} \in (0, 2\pi)^n$, используя условие (5), имеем

$$\left|B^1_{\mathbf{N}}(\mathbf{x})\right| = \left| \sum_{d=0}^{k} \sum_{\varepsilon\in E^d} \sum_{m_1=(1-\varepsilon_1)N_1+\varepsilon_1}^{N_1-\varepsilon_1} \cdots \sum_{m_n=(1-\varepsilon_n)N_n+\varepsilon_n}^{N_n-\varepsilon_n} \left(\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}} \prod_{i=1}^{n} D_{m_i}(x_i)\right)\right|$$

$$\le \frac{\pi^n}{\prod\limits_{i=1}^{n} \min(x_i, 2\pi - x_i)} \sum_{d=0}^{k} \sum_{\varepsilon\in E^d} \sum_{m_1=(1-\varepsilon_1)N_1+\varepsilon_1}^{N_1-\varepsilon_1} \cdots \sum_{m_n=(1-\varepsilon_n)N_n+\varepsilon_n}^{N_n-\varepsilon_n} (\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}})$$

$$\le \frac{\pi^n}{\prod\limits_{i=1}^{n} \min(x_i, 2\pi - x_i)} \sum_{d=0}^{k} \sum_{\varepsilon\in E^d} a_{N_1(1-\varepsilon_1)+\varepsilon_1, N_2(1-\varepsilon_2)+\varepsilon_2,\ldots,N_n(1-\varepsilon_n)+\varepsilon_n} \longrightarrow 0$$

при $\min\limits_{1\le i\le n} N_i \to \infty$. Затем для $\mathbf{x} \in (0, 2\pi)^n$ получим

$$\left|B^2_{\mathbf{N}}(\mathbf{x})\right| = \left| \sum_{d=k+1}^{n-1} \sum_{\varepsilon\in E^d} \sum_{m_1=(1-\varepsilon_1)N_1+\varepsilon_1}^{N_1-\varepsilon_1} \cdots \sum_{m_n=(1-\varepsilon_n)N_n+\varepsilon_n}^{N_n-\varepsilon_n} \left(\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}} \prod_{i=1}^{n} D_{m_i}(x_i)\right)\right|$$

$$\le \frac{\pi^n}{\prod\limits_{i=1}^{n} \min(x_i, 2\pi - x_i)} \sum_{d=k+1}^{n-1} \sum_{\varepsilon\in E^d} \sum_{m_1=(1-\varepsilon_1)N_1+\varepsilon_1}^{N_1-\varepsilon_1} \cdots \sum_{m_n=(1-\varepsilon_n)N_n+\varepsilon_n}^{N_n-\varepsilon_n} |\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}}|$$

$$= \frac{\pi^n}{\prod\limits_{i=1}^{n} \min(x_i, 2\pi - x_i)} \sum_{d=k+1}^{n-1} \sum_{\varepsilon\in E^d} A^{\varepsilon}_{\mathbf{N}}.$$

Докажем стремление к нулю $A^{\varepsilon}_{\mathbf{N}}$, когда $\varepsilon = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, где $|\varepsilon| = d$, $k < d < n$. Для остальных $\varepsilon \in E$ таких, что $|\varepsilon| > k$ и $|\varepsilon| \ne n$, стремление к нулю будет доказываться аналогично в силу симметричности индексов m_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через P_d всевозможные перестановки чисел из $(1, 2, \ldots, d)$. Тогда

$$A^{\varepsilon}_{\mathbf{N}} = \sum_{m_1=1}^{N_1-1} \sum_{m_2=1}^{N_2-1} \cdots \sum_{m_d=1}^{N_d-1} |\triangle^{\varepsilon} a_{m_1,m_2,\ldots,m_d,N_{d+1},\ldots,N_n}|$$

$$\le \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_d=1}^{\infty} |\triangle^{\varepsilon} a_{m_1,m_2,\ldots,m_d,N_{d+1},\ldots,N_n}|$$

$$\le \sum_{\sigma\in P_d} \sum_{m_{\sigma_1}=1}^{\infty} \sum_{m_{\sigma_2}=m_{\sigma_1}}^{\infty} \cdots \sum_{m_{\sigma_d}=m_{\sigma_{d-1}}}^{\infty} |\triangle^{\varepsilon} a_{m_1,m_2,\ldots,m_d,N_{d+1},\ldots,N_n}|.$$

Применяя метод доказательства леммы 2 к каждому слагаемому последней суммы, получим

$$A_N^\varepsilon \le d!2^{d-k}\sum_{m_1=1}^{\infty} m_1^{(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_d})-k-1} N_{d+1}^{\frac{1}{p_{d+1}}-1}\dots N_n^{\frac{1}{p_n}-1} \longrightarrow 0$$

при $\min\limits_{1\le i\le n} N_i \to \infty$.

Что касается $B^3_{\mathbf{N}}(\mathbf{x})$, то она является прямоугольной частичной суммой ряда

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}\Big(\triangle^{\mathbf{1}}\, a_{\mathbf{m}}\prod_{i=1}^{n} D_{m_i}(x_i)\Big),$$

который по лемме 2 сходится абсолютно на $(0,2\pi)^n$, что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство следствия 1 непосредственно следует из теоремы 1 и леммы 3. $\square$

4. Расходимость кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами

Пусть $k\in\mathbb{N}$, $1\le k\le n$, и $\frac{1}{p_1}+\dots+\frac{1}{p_n}=k$. Для $\varepsilon\in E^k$ и $r\in\mathbb{Z}_+$ определим множества $S_r=\big\{\mathbf{m}=(m_1,m_2,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}_+^n : |\mathbf{m}|=m_1+m_2+\dots+m_n=r,\ m_i\in\mathbb{Z}_+,\ i=1,2,\dots,n\big\}$, $D_r^\varepsilon=\big\{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^n : \mathbf{m}\perp(\mathbf{1}-\varepsilon),\ |\mathbf{m}|=r\big\}$.

Пусть $\left|D_r^\varepsilon\right|$ — число элементов в множестве D_r^ε. Величина $\left|D_r^\varepsilon\right|$ зависит только от r и k, поэтому обозначим ее через $d_{r,k}$. Заметим, что

$$d_{r,k}:=\left|D_r^\varepsilon\right|\asymp(r+1)^{k-1}, \tag{7}$$

$$|S_r|\asymp(r+1)^{n-1}, \tag{8}$$

причем

$$d_{r+1,k}-d_{r,k}\asymp(r+1)^{k-2},\quad d_{r,1}=1. \tag{9}$$

Пусть $1\le k<n$, $r\ge1$. Определим последовательность

$$b_{\mathbf{l}}=\begin{cases} -\frac{1}{d_{2r,k+1}r^{n-k}}, & \mathbf{l}\in S_{2r},\\ \frac{1}{d_{2r,k+1}r^{n-k}}, & \mathbf{l}\in S_{2r+1}.\end{cases}$$

Она не зависит от перестановки индексов, т. е. для любой перестановки $\sigma\in P_n$ верно $b_{l_1,\dots,l_n}=b_{l_{\sigma_1},\dots,l_{\sigma_n}}$.

Для $\varepsilon\in E^{k+1}$ определим последовательность

$$a_{\mathbf{m}}=\sum_{l_1=m_1}^{\frac{m_1}{1-\varepsilon_1}}\sum_{l_2=m_2}^{\frac{m_2}{1-\varepsilon_2}}\cdots\sum_{l_n=m_n}^{\frac{m_n}{1-\varepsilon_n}} b_{l_1,l_2,\dots,l_n},\quad \mathbf{m}\in\mathbb{N}^n, \tag{10}$$

где

$$\frac{m_i}{1-\varepsilon_i}=\begin{cases}\infty, & \varepsilon_i=1,\\ m_i, & \varepsilon_i=0.\end{cases}$$

Учитывая изложенное выше, заметим, что правая часть (10) не зависит от выбора ε из E^{k+1}.

Приступим к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} a_{m_1,\ldots,m_n} e^{i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)},$$

где коэффициенты ряда $a = \{a_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n}$ определяются согласно (10). Покажем, что это ряд из M_k и соответствующие коэффициенты удовлетворяют условию (2).

Рассмотрим $\varepsilon = (1,\ldots,1,0,\ldots,0) \in E^{k+1}$, тогда

$$a_{\mathbf{m}} = \sum_{l_1=m_1}^{\infty}\sum_{l_2=m_2}^{\infty}\cdots\sum_{l_{k+1}=m_{k+1}}^{\infty} b_{l_1,l_2,\ldots,l_{k+1},m_{k+2},\ldots,m_n}$$
$$= \sum_{r=j}^{\infty}\Big(\sum_{\mathbf{l}\in D^{\varepsilon}_{2r-2j}} b_{\mathbf{m}+l} + \sum_{\mathbf{l}\in D^{\varepsilon}_{2r+1-2j}} b_{\mathbf{m}+l}\Big).$$

Будем учитывать, что если $\mathbf{l} \in D^{\varepsilon}_{N-|\mathbf{m}|}$, то $\mathbf{m}+l \in S_N$, поэтому для $|\mathbf{m}| = 2j$

$$a_{\mathbf{m}} = \sum_{r=j}^{\infty}\left(-\frac{d_{2r-|\mathbf{m}|,k+1}}{d_{2r,k+1}r^{n-k}} + \frac{d_{2r+1-|\mathbf{m}|,k+1}}{d_{2r,k+1}r^{n-k}}\right).$$

Используя (7) и (9), имеем

$$0 \le a_{\mathbf{m}} \lesssim \sum_{r=j}^{\infty}\frac{1}{r^{n-k+1}} \asymp \frac{1}{|\mathbf{m}|^{n-k}}.$$

Если $|\mathbf{m}| = 2j+1$, то аналогично получим

$$0 \le a_{\mathbf{m}} = b_{\mathbf{m}} + \sum_{r=j+1}^{\infty}\left(-\frac{d_{2r-|\mathbf{m}|,k+1}}{d_{2r,k+1}r^{n-k}} + \frac{d_{2r+1-|\mathbf{m}|,k+1}}{d_{2r,k+1}r^{n-k}}\right) \lesssim \frac{1}{|\mathbf{m}|^{n-k}}.$$

Отметим, что попутно доказана корректность определения коэффициентов ряда. Таким образом,

$$\sup_{\substack{1<m_i<\infty,\\ 1\le i\le n}} m_1^{\frac{1}{p_1'}} m_2^{\frac{1}{p_2'}} \ldots m_n^{\frac{1}{p_n'}} a_{\mathbf{m}} \le C_1 \sup_{\substack{1<m_i<\infty,\\ 1\le i\le n}} \frac{m_1^{\frac{1}{p_1'}} m_2^{\frac{1}{p_2'}} \ldots m_n^{\frac{1}{p_n'}}}{(m_1+m_2+\cdots+m_n)^{n-k}}$$
$$\le C_1 \sup_{\substack{1<m_i<\infty,\\ 1\le i\le n}} |\mathbf{m}|^{k-(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n})} = C_1.$$

Также имеем

$$\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}} = \sum_{s_1=m_1}^{\infty}\sum_{s_2=m_2}^{\infty}\cdots\sum_{s_{k+1}=m_{k+1}}^{\infty} \triangle^{\varepsilon} b_{s_1,s_2,\ldots,s_{k+1},m_{k+2},\ldots,m_n} = b_{\mathbf{m}}. \tag{11}$$

Пусть $\varepsilon' \in E^k$. В силу симметрии, не уменьшая общности, можно считать, что ε' имеет вид $\varepsilon' = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k},0,\ldots,0)$. Если $|\mathbf{m}| = 2j$, то

$$\triangle^{\varepsilon'} a_{\mathbf{m}} = \sum_{l_1=m_1}^{\infty}\sum_{l_2=m_2}^{\infty}\cdots\sum_{l_{k+1}=m_{k+1}}^{\infty} \triangle^{\varepsilon'} b_{l_1,l_2,\ldots,l_{k+1},m_{k+2},\ldots,m_n}$$
$$= \sum_{l_{k+1}=m_{k+1}}^{\infty} b_{m_1,\ldots,m_k,l_{k+1},m_{k+2},\ldots,m_n}$$
$$= \sum_{r=j}^{\infty}\left(-\frac{1}{d_{2r,k+1}r^{n-k}} + \frac{1}{d_{2r,k+1}r^{n-k}}\right) = 0.$$

Если $|\mathbf{m}| = 2j+1$, то

$$\triangle^{\varepsilon'} a_{\mathbf{m}} = \frac{1}{d_{2j,k+1} j^{n-k}} + \sum_{r=j+1}^{\infty} \left(-\frac{1}{d_{2r,k+1} r^{n-k}} + \frac{1}{d_{2r,k+1} r^{n-k}} \right) = \frac{1}{d_{2j,k+1} j^{n-k}} > 0.$$

Тем самым построенный ряд принадлежит M_k и последовательность $\{a_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^n}$ удовлетворяет условию (2).

Остается показать, что ряд (1) с коэффициентами (10) расходится по кубам в точке $(\pi, \pi, \dots, \pi)$. Опять пусть $\varepsilon \in E^{k+1}$, $\varepsilon = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k+1}, 0, \dots, 0)$. Обозначим

$$V^{k+1} = \{\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{k+1}) : \nu_i = 0 \text{ или } \nu_i = 1,\ i = 1, \dots, k+1\},$$

$|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{k+1}$.

Применим преобразование Абеля по первым $k+1$ переменным:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) &= \sum_{m_1=1}^{N} \cdots \sum_{m_n=1}^{N} a_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\mathbf{x}} \\ &= \sum_{\nu\in V^{k+1}} \sum_{m_1=(1-\nu_1)N+\nu_1}^{N-\nu_1} \cdots \sum_{m_{k+1}=(1-\nu_{k+1})N+\nu_{k+1}}^{N-\nu_{k+1}} \sum_{m_{k+2}=1}^{N} \cdots \sum_{m_n=1}^{N} \triangle^{\nu} a_{\mathbf{m}} \\ &\qquad \times \left(\prod_{j=1}^{k+1} D_{m_j}(x_j) \right) e^{i(m_{k+2}x_{k+2} + \dots + m_n x_n)} \\ &= \sum_{m_1=1}^{N-1} \cdots \sum_{m_{k+1}=1}^{N-1} \sum_{m_{k+2}=1}^{N} \cdots \sum_{m_n=1}^{N} \triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}} \left(\prod_{j=1}^{k+1} D_{m_j}(x_j) \right) e^{i(m_{k+2}x_{k+2} + \dots + m_n x_n)} \\ &+ \sum_{d=0}^{k} \sum_{\nu\in V^{k+1}:|\nu|=d} \sum_{m_1=(1-\nu_1)N+\nu_1}^{N-\nu_1} \cdots \sum_{m_{k+1}=(1-\nu_{k+1})N+\nu_{k+1}}^{N-\nu_{k+1}} \sum_{m_{k+2}=1}^{N} \cdots \sum_{m_n=1}^{N} \triangle^{\nu} a_{\mathbf{m}} \\ &\qquad \times \left(\prod_{j=1}^{k+1} D_{m_j}(x_j) \right) e^{i(m_{k+2}x_{k+2} + \dots + m_n x_n)} = B_N^1(\mathbf{x}) + B_N^2(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим отдельно слагаемые суммы (12). Используя k-монотонность коэффициентов и оценку

$$0 \le a_{\mathbf{m}} \lesssim \frac{1}{|m|^{n-k}},$$

получим

$$\begin{aligned} \left|B_N^2(\mathbf{x})\right| &\le \frac{\pi^n}{\prod\limits_{j=1}^{n} \min(x_i, 2\pi - x_i)} \sum_{d=0}^{k} \sum_{\nu\in V^{k+1}:|\nu|=d} \\ &\cdots \sum_{m_1=(1-\nu_1)N+\nu_1}^{N-\nu_1} \cdots \sum_{m_{k+1}=(1-\nu_{k+1})N+\nu_{k+1}}^{N-\nu_{k+1}} \sum_{m_{k+2}=1}^{N} \cdots \sum_{m_n=1}^{N} |\triangle^{\nu} a_{\mathbf{m}}| \\ &= \frac{\pi^n}{\prod\limits_{j=1}^{n} \min(x_i, 2\pi - x_i)} \sum_{d=0}^{k} \sum_{\nu\in V^{k+1}:|\nu|=d} \end{aligned}$$

$$\cdots \sum_{m_1=(1-\nu_1)N+\nu_1}^{N-\nu_1} \cdots \sum_{m_{k+1}=(1-\nu_{k+1})N+\nu_{k+1}}^{N-\nu_{k+1}} \sum_{m_{k+2}=1}^{N} \cdots \sum_{m_n=1}^{N} \triangle^{\nu} a_{\mathbf{m}}$$

$$= \frac{\pi^n}{\prod_{j=1}^{n} \min(x_i, 2\pi - x_i)} \sum_{d=0}^{k} \sum_{\nu \in V^{k+1}:|\nu|=d}$$

$$\cdots \sum_{m_{k+2}=1}^{N} \cdots \sum_{m_n=1}^{N} a_{(1-\nu_1)N+\nu_1,\dots,(1-\nu_{k+1})N+\nu_{k+1},m_{k+2},\dots,m_n}$$

$$\lesssim \frac{\pi^n}{\prod_{j=1}^{n} \min(x_i, 2\pi - x_i)} \sum_{m_{k+2}=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{1}{(N + m_{k+2} + \dots + m_n)^{n-k}} \to 0$$

при $N \to \infty$.

Стало быть, сходимость ряда (1) по кубам эквивалентна сходимости $B_N^1(\mathbf{x})$.

Для ядра Дирихле $D_m(x)$ в точке $x = \pi$ имеем

$$D_m(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } m \text{ четное.} \end{cases}$$

Значит, функция $\psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \left(\prod_{j=1}^{k+1} D_{m_j}(x_j)\right) e^{i(m_{k+2}x_{k+2}+\dots+m_n x_n)}$ в точке $\mathbf{x}_0 = (\pi, \dots, \pi)$ имеет вид

$$\psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} (-1)^{|m|}, & \text{когда все } m_j \text{ нечетные, } 1 \le j \le k+1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{13}$$

Тем самым

$$B_N^1(\mathbf{x}_0) = \sum_{m_1=1}^{N-1} \cdots \sum_{m_{k+1}=1}^{N-1} \sum_{m_{k+2}=1}^{N} \cdots \sum_{m_n=1}^{N} (\triangle^{\varepsilon} a_{\mathbf{m}}) \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}_0)$$
$$= \sum_{m_1=1}^{N-1} \cdots \sum_{m_{k+1}=1}^{N-1} \sum_{m_{k+2}=1}^{N} \cdots \sum_{m_n=1}^{N} b_{\mathbf{m}} \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}_0).$$

Из определения чисел $\{b_{\mathbf{m}}\}$ и (13) видим, что все слагаемые в последней сумме неположительны. Следовательно,

$$\left|B_N^1(\mathbf{x}_0)\right| = \sum_{m_1=1}^{N-1} \cdots \sum_{m_{k+1}=1}^{N-1} \sum_{m_{k+2}=1}^{N} \cdots \sum_{m_n=1}^{N} |b_{\mathbf{m}} \psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}_0)|.$$

Пусть $S_r' = \{\mathbf{m} \in S_r : m_j \text{ нечетные, } 1 \le j \le k+1\}$. Тогда

$$\left|B_N^1(\mathbf{x}_0)\right| \ge \sum_{r=n+1}^{N} \Big(\sum_{m \in S_{2r}'} |b_{\mathbf{m}}| + \sum_{m \in S_{2r+1}'} |b_{\mathbf{m}}| \Big) \ge \sum_{r=n+1}^{N} \frac{|S_{2r}'|}{d_{2r,k+1} r^{n-k}} \asymp \sum_{r=n+1}^{N} \frac{1}{r}.$$

Последнее выражение расходится при $N \to \infty$. Таким образом, теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жижиашвили Л. В.* О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, № 2. С. 65–119.
2. *Голубов Б. И.* Кратные ряды и интегралы Фурье // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 19. С. 3–54. (Итоги науки и техники).
3. *Конягин С. В.* О расходимости подпоследовательности частных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1989. Т. 190. С. 102–116.
4. *Fefferman C.* On the convergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77, N 5. P. 744–745.
5. *Тевзадзе Н. Р.* О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом // Сообщ. АН ГССР. 1970. Т. 58, № 2. С. 277–279.
6. *Дьяченко М. И., Нурсултанов Е. Д.* Теорема Харди — Литтлвуда для тригонометрических рядов с α-монотонными коэффициентами // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 45–60.
7. *Geiringer H.* Trigonometrische Doppelreihen // Monat. Math. 1918. V. 29. P. 65–144.
8. *Moricz F.* Convergence and integrability of double trigonometric series with coefficients of bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 102. P. 36–53.
9. *Дьяченко М. И.* О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Мат. сб. 1986. Т. 129, № 1. С. 55–72.
10. *Djachenco M. I.* Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficient // Anal. Math. 1990. V. 16, N 3. P. 173–190.
11. *Дьяченко М. И.* Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 3. С. 3–20.
12. *Geiringer H.* Trigonometrische Doppelreihen // Monat. Math. 1918. V. 29. P. 65–144.
13. *Тлеуханова Н. Т.* Коэффициенты Фурье функции из анизотропного пространства Лоренца // Мат. журн. 2005. Т. 5, № 4. С. 94–101.

Статья поступила 2 февраля 2016 г.

Джумабаева Джамиля Гумаровна
Евразийский Национальный Университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова, 5, Астана 010008, Казахстан
jamilya_ast@mail.ru

Дьяченко Михаил Иванович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Воробьевы горы, Москва 119991, Россия
dyach@mail.ru

Нурсултанов Ерлан Даутбекович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Казахстанский филиал,
ул. Мунайтпасова, 7, Астана 010008, Казахстан
er-nurs@yandex.ru