Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.5

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ СВЕРТОК НА ОСИ КАК ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СВЕРТОК

О. Л. Виноградов

Аннотация. Устанавливаются точные оценки наилучших приближений классов сверток целыми функциями конечной степени. Для получения этих оценок предлагается новый способ проверки условий типа Никольского, основанный на периодизации ядер со сколь угодно большим периодом и последующем предельном переходе. Как частные случаи получаются точные оценки приближений классов сверток с ядрами, не увеличивающими осцилляцию, и обобщенными ядрами Бернулли и Пуассона.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.202

Ключевые слова: неравенства типа Ахиезера — Крейна — Фавара, целые функции конечной степени, свертка.

§ 1. Введение

1.1. Обозначения. В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ — множества комплексных, вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно, $[a:b]=[a,b]\cap\mathbb{Z}$.

Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. Пространства функций обозначаются: C — пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой; $UCB(\mathbb{R})$ — пространство равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с равномерной нормой; если $p\in[1,+\infty)$, то $L_p(\mathbb{R})$ — пространство измеримых, суммируемых на оси с p-й степенью функций f с нормой $\|f\|_p=\big(\int_{\mathbb{R}}|f|^p\big)^{1/p}$; $L_\infty(\mathbb{R})$ — пространство измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с $\operatorname{vrai}\sup$-нормой. Аналогично определяются пространства 2π-периодических функций L_p; полагаем $L=L_1$, $L(\mathbb{R})=L_1(\mathbb{R})$.

Далее $\mathscr{T}_{2n-1}$ — пространство тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$; $\mathbf{E}_\sigma$ и $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ — пространства целых функций степени не выше σ и меньше σ соответственно; E_n, A_σ и $A_{\sigma-0}$ — наилучшие приближения множествами $\mathscr{T}_{2n-1}$, $\mathbf{E}_\sigma$ и $\mathbf{E}_{\sigma-0}$. Индекс p у нормы, наилучшего приближения и подобных величин указывает на соответствующую ситуации p-норму.

Коэффициенты Фурье функции $f\in L$ определяются равенством

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}\,dt,$$

а преобразование Фурье заданной на $\mathbb{R}$ функции f — равенством

$$c(f, z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) e^{-izt}\, dt,$$

если интеграл существует хотя бы в смысле главного значения. Свертка 2π-периодических функций на периоде и свертка функций на оси определяются равенствами

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t)\, dt, \quad F * G(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} F(t) G(x-t)\, dt.$$

При такой нормировке

$$c_k(f * g) = c_k(f) c_k(g), \quad c(F * G) = c(F) c(G).$$

Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Сумма по $\mathbb{Z}$ понимается в смысле главного значения: $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} = \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{k=-N}^{N}$.

1.2. История вопроса и предварительные результаты. В работе рассматривается задача о точных оценках приближений классов сверток, т. е. классов функций f, представимых в виде

$$f = f_0 + \varphi * G,$$

целыми функциями степени не больше или меньше σ, $\sigma > 0$. Здесь ядро $G \in L(\mathbb{R})$ вещественнозначно. Внеинтегральный член f_0 принадлежит приближающему подпространству $\mathbf{E}_\sigma$ или $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ и потому не играет роли. Функция φ принадлежит некоторому пространству: $UCB(\mathbb{R})$, $L_p(\mathbb{R})$, пространствам периодических функций и т. д.; на φ можно также наложить требование ортогональности пространству $\mathbf{E}_{\sigma_1}$ ($\sigma_1 \le \sigma$ или $\sigma_1 < \sigma$). Аналогичные задачи могут ставиться для приближений классов периодических сверток тригонометрическими многочленами.

В частности, функции из соболевских классов представимы в таком виде.

Первый точный результат в рассматриваемой задаче получили Фавар [1] и Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [2], которые для всех $r, n \in \mathbb{N}$ установили точное неравенство

$$E_n(f)_\infty \le \frac{\mathscr{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_\infty, \quad \mathscr{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(r+1)}}{(2l+1)^{r+1}},$$

и построили линейный метод приближения, реализующий эту оценку.

Впоследствии усилиями многих математиков точные неравенства были получены для приближений различных классов периодических и непериодических сверток. Число работ здесь весьма велико; некоторые результаты вошли в монографии [3–5], по которым можно ознакомиться с историей вопроса.

Бо́льшая часть известных результатов относится к периодическому случаю. Сформулируем теорему общего характера, которая затем конкретизируется для различных ядер.

Пусть функция $G \in L$ вещественнозначна, $n \in \mathbb{N}$. Введем следующее условие.

Условие B_n^*. *Существуют многочлен $T^* \in \mathscr{T}_{2n-1}$, натуральное число $n^* \geq n$ и функция $\varphi^* \in L_\infty$ такие, что почти везде $|\varphi^*| \leq 1$, $\varphi^*\left(\,\cdot + \frac{\pi}{n^*}\right) = -\varphi^*$ и $(G - T^*)\varphi^* = |G - T^*|$.*

Теорема А. 1. *Пусть функция $G \in L$ вещественнозначна, $n \in \mathbb{N}$, G удовлетворяет условию B_n^*, T^* — многочлен из условия B_n^*. Тогда*

$$E_n(G)_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |G - T^*|.$$

2. *Пусть еще $p \in [1, +\infty]$, $\varphi \in L_p$, $f_0 \in \mathscr{T}_{2n-1}$, $f = f_0 + \varphi * G$. Обозначим*

$$\mathscr{K}_{n,G} = \frac{1}{2\pi} E_n(G)_1, \quad \mathscr{X}_{n,G}(f) = f_0 + \varphi * T^*.$$

Тогда

$$\|f - \mathscr{X}_{n,G}(f)\|_p \leq \mathscr{K}_{n,G} \|\varphi\|_p, \quad E_n(f)_p \leq \mathscr{K}_{n,G} E_n(\varphi)_p, \quad E_n(f)_p \leq \mathscr{K}_{n,G} \|\varphi\|_p.$$

При $p = 1$ и $p = +\infty$ константу $\mathscr{K}_{n,G}$ на классе $\frac{2\pi}{n^*}$-периодических функций с нулевым средним (n^* — число из условия B_n^*) в неравенствах нельзя заменить меньшей.

Условию B_n^* предшествовали несколько более ограничительные условие A_n^* С. М. Никольского [6], в котором $\varphi^* = \operatorname{sgn}(G - T^*)$, и условие N_n^* Надя [7], говорящее, что при некотором $\xi \in \mathbb{R}$ разность между ядром G и многочленом $T^* \in \mathscr{T}_{2n-1}$, интерполирующим G в нулях функции $\sin n(\cdot - \xi)$, меняет знак в точках интерполяции и только в них. Условие B_n^* менее ограничительно тем, что позволяет разности $G - T^*$ обращаться в нуль на множестве положительной меры. Теорему А при условии A_n^* доказал С. М. Никольский [6], поэтому ее называют теоремой Никольского. В приведенной формулировке, т. е. при условии B_n^*, теорему А установил В. П. Заставный [8].

Далее нам понадобится следующий вариант условия B_n^*.

Будем говорить, что функция g *существенно не меняет знака* на множестве E, если $g \geq 0$ или $g \leq 0$ почти всюду на E.

Условие B_n'. *Существуют многочлен $T^* \in \mathscr{T}_{2n-1}$ и число $\xi \in \mathbb{R}$ такие, что произведение $(G - T^*)\sin n(\cdot - \xi)$ существенно не меняет знака на $\mathbb{R}$.*

Ясно, что B_n^* вытекает из B_n', поскольку можно положить $n^* = n$, $\varphi^*(t) = \pm \operatorname{sgn} \sin n(t - \xi)$.

Теорема, аналогичная теореме А, справедлива и для приближений целыми функциями конечной степени. Сформулируем ее заключение в несколько большей общности.

Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$ при $p \in [1, +\infty)$ или пространства $UCB(\mathbb{R})$ при $p = +\infty$, P — полунорма, заданная на $\mathfrak{M}$, и выполняются следующие условия.

1. Пространство инвариантно относительно сдвига, т. е. для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $f(\cdot + h) \in \mathfrak{M}$ и $P(f(\cdot + h)) = P(f)$.

2. Существует такая постоянная B, что $P(f) \leq B\|f\|_p$ для всех $f \in \mathfrak{M}$.

Тогда будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}, P)$ *принадлежит классу $\mathscr{B}$*. Примерами пространств класса $\mathscr{B}$ являются $(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ ($p \in [1, +\infty)$), пространства периодических функций $(C, \|\cdot\|_p)$ ($p \in [1, +\infty]$), а также более общие пространства равномерно непрерывных почти периодических функций.

Через $A_\sigma(f)_P$ обозначается наилучшее приближение функции f множеством $\mathbf{E}_\sigma$ по полунорме P:

$$A_\sigma(f)_P = \inf_{\substack{g\in\mathbf{E}_\sigma,\\ f-g\in\mathfrak{M}}} P(f-g)$$

($\inf\varnothing = +\infty$); аналогично определяется величина $A_{\sigma-0}(f)_P$.

Пусть функция $G \in L(\mathbb{R})$ вещественнозначна, $\sigma > 0$. Введем условия, которые обозначим так же, как и в периодическом случае. Это не приведет к недоразумению, так как из контекста ясно, о каких пространствах функций идет речь.

Условие B^*_σ**.** *Существуют функция* $F^* \in \mathbf{E}_\sigma \cap L(\mathbb{R})$, *число* $\sigma^* \geq \sigma$ *и функция* $\varphi^* \in L_\infty(\mathbb{R})$ *такие, что почти везде* $|\varphi^*| \leq 1$, $\varphi^*\bigl(\,\cdot + \frac{\pi}{\sigma^*}\bigr) = -\varphi^*$ *и* $(G-F^*)\varphi^* = |G-F^*|$.

Условие B'_σ**.** *Существуют функция* $F^* \in \mathbf{E}_\sigma \cap L(\mathbb{R})$ *и число* $\xi \in \mathbb{R}$ *такие, что произведение* $(G-F^*)\sin\sigma(\cdot-\xi)$ *существенно не меняет знака на* $\mathbb{R}$.

Аналогично периодическому случаю B^*_σ вытекает из B'_σ.

Теорема 1. 1. *Пусть функция* $G \in L(\mathbb{R})$ *вещественнозначна,* $\sigma > 0$, G *удовлетворяет условию* B^*_σ, F^* — *функция из условия* B^*_σ. *Тогда*

$$A_\sigma(G)_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |G-F^*|.$$

2. *Пусть еще* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathscr{B}$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, $f_0 \in \mathbf{E}_\sigma$, $f = f_0 + \varphi * G$. *Обозначим*

$$\mathscr{K}_{\sigma,G} = \frac{1}{2\pi} A_\sigma(G)_1, \quad \mathscr{X}_{\sigma,G}(f) = f_0 + \varphi * F^*.$$

Тогда

$$P(f - \mathscr{X}_{\sigma,G}(f)) \leq \mathscr{K}_{\sigma,G} P(\varphi), \tag{1}$$

$$A_\sigma(f)_P \leq \mathscr{K}_{\sigma,G} A_\sigma(\varphi)_P, \tag{2}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leq \mathscr{K}_{\sigma,G} A_{\sigma-0}(\varphi)_P, \tag{3}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leq \mathscr{K}_{\sigma,G} P(\varphi), \tag{4}$$

$$A_\sigma(f)_P \leq \mathscr{K}_{\sigma,G} P(\varphi) \tag{5}$$

(*в* (3) *и* (4) $f_0 \in \mathbf{E}_{\sigma-0}$). *В пространствах* $(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *и* $(L(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ *на множествах функций, ортогональных* $\mathbf{E}_\sigma$, *константу* $\mathscr{K}_{\sigma,G}$ *в неравенствах* (1)–(5) *нельзя заменить меньшей. В пространстве* $\frac{2\pi}{\sigma^*}$*-периодических функций* (σ^* — *число из условия* B^*_σ) *с равномерной или интегральной нормой константу в неравенствах* (1), (3) *и* (4) *нельзя заменить меньшей.*

Хотя теорема 1 и не формулировалась ранее именно в таком виде, ее доказательство не требует новых идей. Для полноты изложения дадим его, но предварительно сделаем три замечания, которые окажутся полезными при доказательстве.

Замечание 1. Ясно, что $\mathscr{X}_{\sigma,G}(f) \in \mathbf{E}_\sigma$. Если $f_0 = 0$, а функция φ имеет период $\frac{2\pi}{\rho}$ ($\rho > 0$), то $\mathscr{X}_{\sigma,G}(f)$ — тригонометрический многочлен степени, меньшей, чем $\frac{\sigma}{\rho}$. Если $f_0 = 0$, а функция φ является почти периодической, то

$\mathscr{X}_{\sigma,G}(f)$ тоже почти периодическая функция, показатели которой принадлежат множеству показателей функции φ.

Замечание 2. Если $f_0 = 0$, $\varphi \perp \mathbf{E}_\sigma$, то $\mathscr{X}_{\sigma,G}(f) = 0$. Поэтому для данного класса функций левую часть неравенства (5) можно заменить на $P(f)$.

Замечание 3. Неравенства типа (1)–(5) стандартным образом (например, с помощью приближения функции φ ее интегралом Фейера) переносятся с множеств непрерывных функций на множества $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_p ($p \in [1, +\infty]$), а также на следующую ситуацию. Для классов сверток вида

$$f = f_0 + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} G(x-t)\, dg(t)$$

(g принадлежит множеству заданных на $\mathbb{R}$ функций ограниченной вариации таких, что $g(0) = 0$, $g(x+) + g(x-) = 2g(x)$) имеет место точная оценка

$$A_\sigma(f)_1 \le \mathscr{K}_{\sigma,G} \|g\|_V,$$

где $\|g\|_V$ — вариация g на $\mathbb{R}$, и неравенство, аналогичное (1), с естественной модификацией оператора $\mathscr{X}_{\sigma,G}$. Это утверждение — аналог результата С. М. Никольского [6] для периодического случая.

Доказательство теоремы 1. 1. Функция φ^* ортогональна всякой функции из $\mathbf{E}_\sigma \cap L(\mathbb{R})$. Поэтому для любой функции $g \in \mathbf{E}_\sigma \cap L(\mathbb{R})$ будет

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |G - F^*| = \int\limits_{\mathbb{R}} (G - F^*)\varphi^* = \int\limits_{\mathbb{R}} (G - g)\varphi^* \le \int\limits_{\mathbb{R}} |G - g|,$$

что доказывает утверждение 1.

2.1. Установим оценки сверху. Неравенство (1) следует из представления погрешности

$$f - \mathscr{X}_{\sigma,G}(f) = \varphi * (G - F^*)$$

и возможности вносить полунорму под знак интеграла [9]. Неравенство (2) следует непосредственно из формулы $f = f_0 + \varphi * G$ или из (1), если в качестве полунормы взять $A_\sigma(\cdot)_P$ и учесть, что $A_\sigma(f - \mathscr{X}_{\sigma,G}(f))_P = A_\sigma(f)_P$. Неравенство (3) получается предельным переходом при $\rho \to \sigma - 0$ из неравенств вида (2)

$$A_\rho(f)_P \le A_\rho(G)_1 A_\rho(\varphi)_P,$$

так как $A_{\sigma-0}(G)_1 = A_\sigma(G)_1$ [3, п. 99]. Неравенства (4) и (5) легко следуют из (3).

2.2. Установим оценки снизу. Сначала докажем точность при $p = +\infty$. Точность (5) (а следовательно, и всех предшествующих неравенств) доказывается с помощью $\frac{2\pi}{\rho}$-периодических функций $\varphi_\rho(t) = \varphi^*\big(-\frac{\rho}{\sigma^*}t\big)$. Свертка $\varphi_\rho * G$ имеет антипериод $\frac{\pi}{\rho}$, и потому в пространстве $\mathbf{E}_\sigma$ наилучшее приближение ей доставляет тождественный нуль [3, п. 96]. Следовательно,

$$\varliminf_{\rho \to \sigma^*+} A_\sigma(\varphi_\rho * G)_\infty = \varliminf_{\rho \to \sigma^*+} \|\varphi_\rho * G\|_\infty \ge \varliminf_{\rho \to \sigma^*+} |\varphi_{\sigma^*} * G(0)|.$$

Далее,

$$\varphi_\rho * G(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^*\left(\frac{\rho}{\sigma^*}t\right) G(t)\, dt$$

$$= \frac{\sigma^*}{2\pi\rho} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^*(t) G\left(\frac{\sigma^*}{\rho}t\right) dt \to \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^*(t) G(t)\, dt = \varphi_{\sigma^*} * G(0)$$

при $\rho \to \sigma^*$. Последнее очевидно для гладких финитных функций G, а в общем случае следует из плотности множества таких функций в $L(\mathbb{R})$. Остается учесть, что $|\varphi_{\sigma^*} * G(0)| = \mathscr{K}_{\sigma,G}$.

Неравенства (1), (3) и (4) обращаются в равенства на функциях φ_{σ^*}.

Точность неравенств в $L_1(\mathbb{R})$ вытекает из доказанной точности в $L_\infty(\mathbb{R})$, замечания 2 и соотношений двойственности (см. [10, теорема 3.1.3]):

$$\sup_{\substack{\varphi\perp\mathbf{E}_\sigma,\\ \|\varphi\|_1\le 1}} A_\sigma(\varphi * G)_1 = \sup_{\substack{\varphi\perp\mathbf{E}_\sigma,\\ \|\varphi\|_1\le 1}} \sup_{\substack{g\perp\mathbf{E}_\sigma,\\ \|g\|_\infty\le 1}} \left| \int_{\mathbb{R}} (\varphi * G) g \right| = \sup_{\substack{g\perp\mathbf{E}_\sigma,\\ \|g\|_\infty\le 1}} \|g * G\|_\infty = \mathscr{K}_{\sigma,G}.$$

Аналогично доказывается точность в пространстве L_1 периодических функций. □

Предшествующие формулировки теоремы 1 содержали условие B'_σ. Для непрерывных функций G таких, что $G(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$, и пространств $L_p(\mathbb{R})$ и $UCB(\mathbb{R})$ неравенства (1) и (4) содержатся в [3, п. 87, 100], хотя далее [3, п. 101] утверждение применяется к разрывному в нуле ядру без дополнительных оговорок. В [9] теорема 1 установлена для пространств класса $\mathscr{B}$ и четных или нечетных функций G, непрерывных на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и таких, что $G(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$.

Ядра G, удовлетворяющие условию B'_σ (с перечисленными дополнительными условиями), названы в [3] *ядрами Крейна.*

В связи с дальнейшим отметим, что в отличие от доказательства теоремы 1 построение функции F^* из условия B'_σ в [3, 9] опиралось на скорость убывания и непрерывность G (возможно, кроме точки 0). В следующем параграфе мы ослабим условие убывания и избавимся от требования непрерывности при построении приближающей функции. Затем применим теорему и к некоторым разрывным ядрам.

Применявшиеся способы проверки условия B_n^* и его вариантов для тех или иных периодических ядер G можно разделить на две группы. Методы первой группы состоят в подсчете количества нулей, которое может иметь разность $G - T^*$. Для такого подсчета используется теорема Ролля и ее обобщения. Этот способ использовался в работах [1, 2, 11–16] и некоторых других. Рассуждения, связанные с подсчетом нулей, затруднительно перенести на ядра, суммируемые на оси, поскольку количество нулей бесконечно.

Идеи второй группы заключаются в использовании специальных свойств коэффициентов Фурье G для непосредственного доказательства знакопостоянства частного $\frac{G(t)-T^*(t)}{\sin n(t-\xi)}$. Во-первых, таковы условия Надя [7] кратной монотонности последовательности коэффициентов Фурье четных или нечетных функций. Во-вторых, таковы условия автора [9], в которых G — четная или нечетная функция с коэффициентами Фурье вида

$$a_k = \int_0^{+\infty} e^{-k^2 u} d\Phi(u), \quad b_k = \int_0^{+\infty} e^{-k^2 u} d\Psi(u),$$

где Φ и Ψ — возрастающие на $(0, +\infty)$ функции. Эти два свойства с естественной заменой последовательности коэффициентов Фурье преобразованием Фурье достаточны и для условия B'_σ, относящегося к ядрам, суммируемым на оси [17, 9]. При этом результаты о приближении периодических функций получаются как частные случаи. К второй группе относятся и условия А. С. Сердюка, применимые к некоторым функциям с достаточно быстро убывающими коэффициентами Фурье [18] (см. также [5, теорема 7.1]).

В данной работе предлагается способ проверки условия B'_σ, который вкратце состоит в следующем. Если функция φ периодична, то ее свертка с ядром G по оси записывается как свертка с периодизацией G по периоду. Если периодизации G со сколь угодно большим периодом $\frac{2N\pi}{\sigma}$ удовлетворяют после сжатия аргумента условию B'_N, то само условие B'_σ удается вывести предельным переходом. Тем самым ряд точных неравенств, ранее известных для приближений периодических функций, распространяется на непериодический случай.

Такой прием (периодизация с последующим предельным переходом) применялся в [19] при доказательстве точных неравенств для приближений классов дифференцируемых функций сплайнами.

§ 2. Построение приближающего оператора и основная теорема

Всюду далее полагаем $x_j = \frac{j\pi}{\sigma}$ $(j \in \mathbb{Z})$.

Допустим, что функция G удовлетворяет условию B'_σ, число ξ и функция F^* взяты из этого условия. Нам будет удобно считать, что G задана в каждой точке. Тогда если G непрерывна в точке $\xi + x_k$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$, то $F^*(\xi + x_k) = G(\xi + x_k)$. Если G разрывна в точке $\xi + x_k$ (а такие примеры встречаются), для определения значений $F^*(\xi+x_k)$ надо использовать какие-то дополнительные соображения. Для единообразия припишем функции G значения в таких точках и тоже будем считать, что $F^*(\xi + x_k) = G(\xi + x_k)$. Как именно следует определить $G(\xi + x_k)$ и каким условиям должна удовлетворять точка ξ, обсудим позднее.

Пусть $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G \in L(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}$ (выполнения условия B'_σ не предполагается). Следуя [3, п. 87], построим функцию из $\mathbf{E}_\sigma$, интерполирующую G в узлах $\xi + x_k$ $(k \in \mathbb{Z})$, т. е. в нулях функции $\sin\sigma(\cdot - \xi)$. Для этого положим

$$\mathscr{L}_\sigma(G, z) = \frac{\sin\sigma(z-\xi)}{\sigma} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \frac{G(\xi + x_k)}{z - \xi - x_k}.$$

Ряд в правой части сходится равномерно относительно z на любом компакте в $\mathbb{C}$. Поэтому $\mathscr{L}_\sigma(G) \in \mathbf{E}_\sigma$. Выполнение интерполяционного условия очевидно.

Для суммируемости $\mathscr{L}_\sigma(G)$ потребуется наложить еще одно условие.

Лемма 1. *Если $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — двусторонняя числовая последовательность,*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| \ln(|k|+1) < +\infty, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k a_k = 0, \quad F(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k a_k \frac{\sin\sigma z}{\sigma(z - x_k)},$$

то $F \in L(\mathbb{R})$.

Доказательство. Имеем

$$F(z) = \frac{\sin\sigma z}{\sigma} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k a_k \left(\frac{1}{z - x_k} - \frac{1}{z} \right),$$

откуда

$$\int_{\mathbb{R}} |F| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| \int_{\mathbb{R}} \frac{|\sin\sigma z|}{\sigma} \left| \frac{1}{z - x_k} - \frac{1}{z} \right| dz.$$

Остается оценить интеграл. Для определенности ограничимся случаем $k > 0$. Делая замену переменной $z = \frac{k\pi u}{\sigma}$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\sin \sigma z| \left| \frac{1}{z - x_k} - \frac{1}{z} \right| dz = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin k\pi u}{u(u-1)} \right| du = 2 \int\limits_{1/2}^{+\infty} \left| \frac{\sin k\pi u}{u(u-1)} \right| du.$$

Далее,

$$\int\limits_{3/2}^{+\infty} \left| \frac{\sin k\pi u}{u(u-1)} \right| du \le \int\limits_{3/2}^{+\infty} \frac{du}{u(u-1)} = \ln 3,$$

$$\int\limits_{1/2}^{3/2} \left| \frac{\sin k\pi u}{u(u-1)} \right| du \le 2 \int\limits_{1/2}^{3/2} \left| \frac{\sin k\pi u}{u-1} \right| du = 4 \int\limits_{0}^{1/2} \left| \frac{\sin k\pi u}{u} \right| du$$
$$= 4 \left(\int\limits_0^1 + \int\limits_1^{k\pi/2} \right) \frac{|\sin t|}{t} \, dt \le 4 \left(1 + \ln \frac{k\pi}{2} \right),$$

откуда следует требуемое. □

Выразим периодизации функции $\mathscr{L}_\sigma G$.

Если функция K задана на $\mathbb{R}$, а $N \in \mathbb{N}$, то обозначим

$$\mathscr{P}_N(K, t) = \frac{N}{\sigma} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} K \left(\frac{Nt}{\sigma} - \frac{2\nu N\pi}{\sigma} \right)$$

(предполагается, что сумма ряда существует в том или ином смысле).

Замечание 4. Если $K \in L(\mathbb{R})$, то по формуле суммирования Пуассона ряд абсолютно сходится при почти всех t, функции $\mathscr{P}_N(|K|)$ и $\mathscr{P}_N(K)$ принадлежат L и

$$c_k(\mathscr{P}_N(K)) = c\left(K, \frac{k\sigma}{N} \right).$$

Напомним, что *суммой ряда* $\sum\limits_{\nu \in \mathbb{Z}} a_\nu$ *в смысле метода Абеля — Пуассона* называется предел $\lim\limits_{r \to 1-} \sum\limits_{\nu \in \mathbb{Z}} a_\nu r^{|\nu|}$.

Лемма 2. *Пусть $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |G(\xi - x_k)| < +\infty$, $N \in \mathbb{N}$, $\xi_N = \frac{\sigma}{N}\xi$. Тогда $\mathscr{P}_N(\mathscr{L}_\sigma(G), t)$ существует при всех $t \in \mathbb{R}$ в смысле метода Абеля — Пуассона и $\mathscr{P}_N(\mathscr{L}_\sigma(G))$ есть тригонометрический многочлен порядка не выше $2N - 1$, интерполирующий $\mathscr{P}_N(G)$ в узлах $\xi_N + \frac{j\pi}{N}$, $j \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Зафиксируем $r \in [0, 1)$ и, пользуясь определениями операций $\mathscr{P}_N$ и $\mathscr{L}_\sigma$, запишем

$$\frac{N}{\sigma}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\mathscr{L}_\sigma\Big(G,\frac{Nt}{\sigma}-\frac{2\nu N\pi}{\sigma}\Big)r^{|\nu|}$$

$$=\frac{N}{\sigma}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}G(\xi+x_k)\frac{\sin\sigma(z-\xi-x_k)}{\sigma(z-\xi-x_k)}\bigg|_{z=\frac{Nt}{\sigma}-\frac{2\nu N\pi}{\sigma}}r^{|\nu|}$$

$$=\frac{N}{\sigma}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}G(\xi+x_k)\frac{\sin N\big(t-\xi_N-\frac{k\pi}{N}\big)}{N\big(t-2\nu\pi-\xi_N-\frac{k\pi}{N}\big)}r^{|\nu|}$$

$$=\frac{N}{\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}}G(\xi+x_k)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{\sin N\big(t-\xi_N-\frac{k\pi}{N}\big)}{N\big(t-2\nu\pi-\xi_N-\frac{k\pi}{N}\big)}r^{|\nu|}. \qquad (6)$$

Поменять порядок суммирования можно ввиду абсолютной сходимости двойного ряда. По теореме Абеля внутренняя сумма в (6) непрерывна по r в точке 1 слева. Обозначим для краткости $A=2N\pi$, $y=\frac{1}{2\pi}\big(t-\xi_N-\frac{k\pi}{N}\big)$. Сумма

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{\sin A(y-\nu)}{A(y-\nu)}r^{|\nu|}$$

ограничена на $\mathbb{R}\times[0,1)$ как функция двух переменных y и r. Действительно,

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{\sin A(y-\nu)}{A(y-\nu)}r^{|\nu|}=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{A}\int_0^A\cos(y-\nu)u\,du\,r^{|\nu|}$$

$$=\frac{1}{A}\int_0^A\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\cos(y-\nu)u\,du\,r^{|\nu|}=\frac{1}{A}\int_0^A\cos yu\Big(1+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos\nu u\,r^{\nu}\Big)\,du,$$

что по модулю не превосходит 1, так как сумма в скобках (это ядро Пуассона) неотрицательна. Поскольку к тому же $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}|G(\xi+x_k)|<+\infty$, по признаку Вейерштрасса повторный ряд в (6) сходится равномерно по r. Поэтому при $r\to 1-$ можно перейти к пределу и под знаком внешней суммы. Получаем

$$\mathscr{P}_N(\mathscr{L}_\sigma(G),t)=\frac{N}{\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}}G(\xi+x_k)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{\sin N\big(t-\xi_N-\frac{k\pi}{N}\big)}{N\big(t-2\nu\pi-\xi_N-\frac{k\pi}{N}\big)}$$

$$=\frac{N}{\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}}G(\xi+x_k)\frac{\sin N\big(t-\xi_N-\frac{k\pi}{N}\big)}{2N}\operatorname{ctg}\frac{t-\xi_N-\frac{k\pi}{N}}{2}.$$

Заметим, что по условию функция $\mathscr{P}_N(G)$ определена в точках интерполяции. Записывая каждое k единственным образом в виде $k=l+2Nq$, $l\in[0:2N-1]$, $q\in\mathbb{Z}$, находим

$$\mathscr{P}_N(\mathscr{L}_\sigma(G),t)=\sum_{l=0}^{2N-1}\bigg\{\frac{N}{\sigma}\sum_{q\in\mathbb{Z}}G\Big(\frac{N}{\sigma}\Big(\xi_N+\frac{l\pi}{N}\Big)+\frac{2qN\pi}{\sigma}\Big)\bigg\}$$

$$\times\frac{\sin N\big(t-\xi_N-\frac{l\pi}{N}\big)}{2N}\operatorname{ctg}\frac{t-\xi_N-\frac{l\pi}{N}}{2}$$

$$=\sum_{l=0}^{2N-1}\mathscr{P}_N\Big(G,\xi_N+\frac{l\pi}{N}\Big)\lambda_N\Big(t-\xi_N-\frac{l\pi}{N}\Big),$$

где
$$\lambda_N(u)=\frac{\sin Nu}{2N}\operatorname{ctg}\frac{u}{2}.$$
Ясно, что λ_N — четный многочлен из $\mathscr{T}_{2N+1}$, $\lambda_N\big(\frac{l\pi}{N}\big)=\delta_{l0}$. Поэтому
$$\mathscr{P}_N\biggl(\mathscr{L}_\sigma(G),\xi_N+\frac{l\pi}{N}\biggr)=\mathscr{P}_N\biggl(G,\xi_N+\frac{l\pi}{N}\biggr).$$
Кроме того,
$$\sum_{l=0}^{2N-1}(-1)^l\mathscr{P}_N\left(G,\xi_N+\frac{l\pi}{N}\right)=0,$$
откуда
$$\sum_{l=0}^{2N-1}\mathscr{P}_N\biggl(G,\xi_N+\frac{l\pi}{N}\biggr)\cos N\biggl(t-\xi_N-\frac{l\pi}{N}\biggr)=0.$$
Поэтому $\mathscr{P}_N(\mathscr{L}_\sigma(G))$ принадлежит не только $\mathscr{T}_{2N+1}$, но и $\mathscr{T}_{2N-1}$. $\square$

Докажем основную теорему.

Теорема 2. *Пусть $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G\in L(\mathbb{R})$, $\sigma>0$, $\xi\in\mathbb{R}$,*
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|G(\xi+x_k)|\ln(|k|+1)<+\infty, \tag{7}$$
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^kG(\xi+x_k)=0.$$
Пусть еще для бесконечного множества номеров N произведение
$$(\mathscr{P}_N(G)-\mathscr{P}_N(\mathscr{L}_\sigma(G)))\sin N(\cdot-\xi_N),$$
где $\xi_N=\frac{\sigma}{N}\xi$, существенно не меняет знака на $\mathbb{R}$. Тогда
$$A_\sigma(G)_1=\int\limits_{\mathbb{R}}|G-\mathscr{L}_\sigma(G)|$$
и справедливо утверждение 2 теоремы 1, в котором $F^*=\mathscr{L}_\sigma(G)$.

Доказательство. Достаточно установить, что функция G удовлетворяет условию B'_σ. Прежде всего заметим, что $\mathscr{L}_\sigma(G)\in L(\mathbb{R})$ по лемме 1, а потому периодизации G и $\mathscr{L}_\sigma(G)$ определены почти всюду по замечанию 4. Обозначим $R=G-\mathscr{L}_\sigma(G)$. Тогда $f-\mathscr{X}_{\sigma,G}(f)=\varphi*R$. Если функция $\varphi\in L_\infty(\mathbb{R})$ имеет период $\frac{2N\pi}{\sigma}$, то при любом $x\in\mathbb{R}$
$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\biggl(\frac{Nx}{\sigma}-t\biggr)R(t)\,dt&=\int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}}\varphi\biggl(\frac{Nx}{\sigma}-t\biggr)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}R\biggl(t+\frac{2\nu N\pi}{\sigma}\biggr)\,dt\\&=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\biggl(\frac{N(x-t)}{\sigma}\biggr)(\mathscr{P}_N(G,t)-\mathscr{P}_N(\mathscr{L}_\sigma(G),t))\,dt.\end{aligned}$$

Поэтому если вдобавок $\|\varphi\|_\infty \le 1$, то

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{Nx}{\sigma}-t\right)R(t)\,dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\mathscr{P}_N(G,t)-\mathscr{P}_N(\mathscr{L}_\sigma(G),t)|\,dt$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}\sin N(t-\xi_N)(\mathscr{P}_N(G,t)-\mathscr{P}_N(\mathscr{L}_\sigma(G),t))\,dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}\sin\sigma(u-\xi)G(u)\,du\right| \le \frac{1}{2\pi}A_\sigma(G)_1 = \mathscr{K}_{\sigma,G}.$$

Зафиксируем $x\in\mathbb{R}$ и при каждом $N\in\mathbb{N}$ из условия теоремы определим $\frac{2N\pi}{\sigma}$-периодическую функцию φ_N соотношением

$$\varphi_N(x-t) = \operatorname{sgn} R(t) \quad \text{при } t\in\left[-\frac{N\pi}{\sigma},\frac{N\pi}{\sigma}\right).$$

Так как $\varphi_N(x-\cdot)\to\operatorname{sgn} R$ поточечно и $\|\varphi_N\|_\infty = 1$, по теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |R(t)|\,dt = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_N(x-t)R(t)\,dt \le \mathscr{K}_{\sigma,G}.$$

Противоположное неравенство очевидно, откуда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |R(t)|\,dt = \mathscr{K}_{\sigma,G}.$$

Следовательно, функция $(G-\mathscr{L}_\sigma(G))\sin\sigma(\cdot-\xi)$ существенно не меняет знака на $\mathbb{R}$, т. е. G удовлетворяет условию B'_σ. $\square$

Сделаем несколько замечаний о выборе точки ξ и значений $G(\xi+x_k)$.

1. В условиях теоремы 2

$$\mathscr{K}_{\sigma,G} = \max_{\tau\in\mathbb{R}}\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}\sin\sigma(u-\tau)G(u)\,du\right|, \tag{8}$$

а $\xi=\xi_{\sigma,G}$ — точка, в которой достигается максимум. Так как модуль интеграла в (8) как функция переменной τ имеет период $\frac{\pi}{\sigma}$, можно считать, что $\xi\in\left[0,\frac{\pi}{\sigma}\right)$.

По равенству Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}\sin\sigma(u-\tau)G(u)\,du = \frac{2i}{\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{c(G,(2l+1)\sigma)}{2l+1}e^{i(2l+1)\sigma\tau}.$$

Поэтому

$$\mathscr{K}_{\sigma,G} = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}\sin\sigma(u-\xi)G(u)\,du\right| = \left|\frac{2}{\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{c(G,(2l+1)\sigma)}{2l+1}e^{i(2l+1)\sigma\xi}\right|, \tag{9}$$

а если законно почленное дифференцирование ряда по τ в точке ξ, то

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} c(G,(2l+1)\sigma)e^{i(2l+1)\sigma\xi} = 0. \tag{10}$$

2. Если значения функции G известны во всех точках $\xi+x_k$, кроме одной (например, если G непрерывна в этих точках), то значение в оставшейся точке можно найти из (7).

3. Пусть $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G\in L(\mathbb{R})$, ξ определено (вообще говоря, не единственным образом) как точка максимума в (8), а выполнения остальных условий теоремы 2 не предполагается. Пусть еще ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}|G(x-x_k)|$ сходится равномерно относительно x на любом отрезке. Ясно, что последнее равносильно равномерной сходимости на $\left[0,\frac{\pi}{\sigma}\right]$.

Из равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}\sin\sigma(u-\tau)G(u)\,du=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\int\limits_{\tau+x_k}^{\tau+x_{k+1}}G$$

видно, что если G непрерывна во всех точках $\tau+x_k$, то

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}\sin\sigma(u-\tau)G(u)\,du$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\left(G(\tau+x_{k+1})-G(\tau+x_k)\right)=-2\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^kG(\tau+x_k).$$

Законность почленного дифференцирования обеспечивается равномерной сходимостью продифференцированного ряда на любом отрезке. Поэтому если G непрерывна во всех точках $\xi+x_k$, то верно равенство (7).

4. Пусть $\alpha>0$. Функция

$$W_\alpha(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\alpha y^2}e^{ixy}\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}},\quad x\in\mathbb{R},$$

называется *ядром теплопроводности,* а также *ядром Гаусса* или *Вейерштрасса.* Свертка $\varphi*W_\alpha$ называется *интегралом Вейерштрасса* функции φ. Пусть ξ_α — какая-нибудь точка максимума функции

$$\tau\mapsto\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}\sin\sigma(u-\tau)(G*W_\alpha)(u)\,du\right|.$$

Предположим, что найдется такая последовательность $\alpha_m\to0+$, что $\xi_{\alpha_m}\to\xi$ и для всех $k\in\mathbb{Z}$ существует конечный предел

$$\lim_{m\to\infty}(G*W_{\alpha_m})(\xi_{\alpha_m}+x_k).$$

Хотя это условие выглядит труднопроверяемым, укажем четыре случая, когда оно выполнено.

4a. Точка $\xi\in\left[0,\frac{\pi}{\sigma}\right)$, реализующая максимум в (8), единственна, а G непрерывна в точках $\xi+x_k$.

4b. ξ_α не зависит от α, а G имеет конечные односторонние пределы в точках $\xi+x_k$.

4c. G нечетна, $\xi_\alpha=\xi=0$, G имеет конечные односторонние пределы в точках $\xi+x_k$ при $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

В этих трех случаях условие выполнено даже без необходимости перехода к последовательности $\{\alpha_m\}$. Это легко вывести из того, что ядра теплопроводности четны и образуют аппроксимативную единицу.

4d. Функция G ограничена.

Действительно, тогда семейство функций $G * W_\alpha$ равномерно ограничено по α и с помощью диагонального процесса можно добиться сходимости всех последовательностей $\{(G * W_{\alpha_m})(\xi_{\alpha_m} + x_k)\}_m$.

Положим

$$G(\xi + x_k) = \lim_{m\to\infty} (G * W_{\alpha_m})(\xi_{\alpha_m} + x_k).$$

Убедимся в выполнении равенства (7), для чего докажем одну техническую лемму.

Лемма 3. *Пусть $G \in L(\mathbb{R})$, $\sigma > 0$, ряд $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |G(x - x_j)|$ сходится равномерно относительно x на любом отрезке. Тогда ряд $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |W_\alpha * G(x - x_j)|$ для любых $A, a > 0$ сходится равномерно относительно (x, α) на множестве $[-A, A] \times (0, a]$.*

Доказательство. Можно считать, что $A = x_m$, $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $|W_\alpha * G| \le W_\alpha * |G|$, достаточно доказать лемму для $G \ge 0$. Обозначим

$$f_n(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus[-n,n]} G(x - x_j), \quad f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} G(x - x_j).$$

Тогда f имеет период $\frac{\pi}{\sigma}$ и суммируема на любом отрезке. Требуется доказать, что $W_\alpha * f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $(x, \alpha) \in [-x_m, x_m] \times (0, a]$.

При $M \in \mathbb{N}$ запишем

$$W_\alpha * f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} W_\alpha(x - t) f_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}(I_1 + I_2),$$

$$I_1 = \int\limits_{-x_{m+M}}^{x_{m+M}}, \quad I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-x_{m+M}, x_{m+M}]}.$$

Если $|x| \le x_m$, $|t| \ge x_{m+M}$, то $|x - t| \ge x_M$. Применяя неравенство $f_n \le f$, делая замену $x - t = z$ и учитывая периодичность f, получаем

$$\begin{aligned} I_2 &\le \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-x_{m+M}, x_{m+M}]} W_\alpha(x - t) f(t)\, dt \\ &\le \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-x_M, x_M]} W_\alpha(z) f(x - z)\, dz \le \sup_{\substack{\gamma\in(0,a],\\ |z|\le\frac{\pi}{2\sigma}}} \sum_{|q|\ge M-1} W_\gamma(z + x_q) \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} f. \end{aligned}$$

Последняя верхняя грань бесконечно мала при $M \to \infty$. Взяв $\varepsilon > 0$, подберем M так, что $\frac{1}{2\pi} I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех рассматриваемых (x, α). Затем, пользуясь равномерной сходимостью f_n к нулю на $[-x_{m+M}, x_{m+M}]$ и равенством $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} W_\alpha = 1$, подберем N так, что при всех $n > N$ будет $\frac{1}{2\pi} I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех (x, α). Тогда при всех $n > N$ будет $W_\alpha * f_n(x) < \varepsilon$ одновременно для всех (x, α), что и доказывает лемму. $\square$

Согласно равенству (7), примененному к функции $G * W_\alpha$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k (G * W_\alpha)(\xi_\alpha + x_k) = 0. \tag{11}$$

По лемме 3 в (11) можно перейти к пределу под знаком суммы, что приводит к (7). Если функции $(G{*}W_{\alpha_m} - \mathscr{L}_\sigma(G{*}W_{\alpha_m}))\sin\sigma(\cdot - \xi_{\alpha_m})$ не меняют знака, то, перейдя к пределу, можно заключить, что и функция $(G - \mathscr{L}_\sigma(G))\sin\sigma(\cdot - \xi)$ не меняет знака.

Описанный в этом пункте способ определения значений $G(\xi + x_k)$ применялся в [20] к периодическим ядрам, не увеличивающим в определенном смысле осцилляцию. При этом использовалось периодическое ядро теплопроводности.

§ 3. Примеры

Применим теорему 2 к конкретным ядрам. При этом для краткости ограничимся записью только неравенств вида (1). Случаи точности неравенств вида (1)–(5) указаны в теореме 1. Напомним, что значения констант выражаются формулой (9), а $\xi = \xi_{\sigma,G}$ — точка максимума в (8), которая при дополнительных условиях может быть найдена из уравнения (10).

3.1. Ядра, не увеличивающие осцилляцию. *Класс Лагерра — Пойа* $\mathscr{E}_2$ состоит из всех функций ψ вида

$$\begin{gathered} \psi(z) = Ce^{-\alpha z^2+\delta z} z^r \prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_k z)e^{-a_k z}, \\ C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad \alpha \ge 0, \quad \delta, a_k \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty. \end{gathered} \tag{12}$$

Класс $\mathscr{E}_{2,\varnothing}$ состоит из тех функций из $\mathscr{E}_2$, у которых в представлении (12) $r = 0$ и $\alpha + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 > 0$, а класс $\mathscr{E}_{2,\{0\}}$ — из тех, у которых $r \in \mathbb{N}$.

Далее, пусть $\nu_c(\varphi)$ — число существенных перемен знака периодической вещественнозначной функции φ на периоде; $J = \varnothing$ или $J = \{0\}$, $\mathscr{T}_\varnothing = \{0\}$, $\mathscr{T}_{\{0\}}$ — множество постоянных. Класс CVD_J состоит из вещественнозначных функций $K \in L$ таких, что для любых функций $a \in \mathscr{T}_J$ и $\varphi \perp \mathscr{T}_J$ будет

$$\nu_c(a + \varphi * K) \le \nu_c(\varphi).$$

О функциях из CVD_J говорят, что они *не увеличивают осцилляцию.*

Теорема B [4, теорема III.4.8; 15]. *Если $\psi \in \mathscr{E}_2$, то функция*

$$\widetilde{K}_1(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{ikt}}{\psi(ik)} + c_\psi, \quad c_\psi = \begin{cases} \frac{1}{\psi(0)}, & J = \varnothing, \\ 0, & J = \{0\}, \end{cases}$$

принадлежит CVD_J.

Известно, что для функций из CVD_J условие B_n' выполнено при любом n [4, предложение V.4.3].

Следствие 1. *Пусть $(\mathfrak{M}, P) \in \mathscr{B}$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, $\psi \in \mathscr{E}_{2,\varnothing}$, $G \in L(\mathbb{R})$, $c(G,y) = \frac{1}{\psi(iy)}$, $f = \varphi * G$, $\sigma > 0$, значение ξ определяется следующим образом. Если $\psi(z) = Ce^{\delta z}(1 - az)$, $C, a, \delta \in \mathbb{R}$, то $\xi = \delta$; иначе ξ — корень уравнения*

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(2l+1)\sigma\xi}}{\psi(i(2l+1)\sigma)} = 0.$$

Тогда

$$P(f - \mathscr{X}_{\sigma,G}(f)) \le \left| \frac{2}{\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(2l+1)\sigma\xi}}{(2l+1)\psi(i\sigma(2l+1))} \right| P(\varphi).$$

Следствие 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathscr{B}$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, $\psi \in \mathscr{E}_{2,\{0\}}$, $y_0 > 0$, *функции* f *и* φ *связаны равенством*

$$f = f_0 + \varphi * G, \tag{13}$$

где $f_0 \in \mathbf{E}_{y_0}$, $G \in L(\mathbb{R})$, $c(G, y) = \frac{1}{\psi(iy)}$ *при* $|y| \geq y_0$, $\sigma \geq y_0$, ξ — *корень уравнения*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2l+1)\sigma\xi}}{\psi(i(2l+1)\sigma)} = 0.$$

Тогда

$$P(f - \mathscr{X}_{\sigma,G}(f)) \leq \left| \frac{2}{\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2l+1)\sigma\xi}}{(2l+1)\psi(i\sigma(2l+1))} \right| P(\varphi).$$

Если представление (13) *верно при всех* $y_0 > 0$, *то заключение верно при всех* $\sigma > 0$.

Доказательство следствий 1 и 2. По замечанию 4

$$c_k(\mathscr{P}_N(G)) = \frac{1}{\psi\left(i\frac{\sigma k}{N}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Так как классы $\mathscr{E}_{2,J}$ сохраняются при гомотетии, по теореме B для любого N периодизация $\mathscr{P}_N(G)$ принадлежит CVD_J. $\square$

В периодическом случае следствия 1 и 2 установлены А. Пинкусом [21]; см. также [4, теорема V.4.5; 15, 16]; в периодическом и непериодическом случаях для четных и нечетных ядер они доказаны другим способом в [9].

Как частные случаи следствий 1 и 2 получаются точные неравенства для некоторых дифференциальных операторов.

Обозначим через $\mathfrak{D}$ оператор дифференцирования.

Следствие 3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathscr{B}$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, Q — *многочлен с вещественными корнями:*

$$Q(z) = z^r \prod_{k=1}^{m} (1 - a_k z), \quad r, m \in \mathbb{Z}_+,\ r + m > 0,\ a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$\sigma > 0$, *значение* ξ *определяется следующим образом. Если* $r = 0$, $m = 1$, *то* $\xi = 0$*; иначе* ξ — *корень уравнения*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2l+1)\sigma\xi}}{(2l+1)^r} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{(1 - ia_k\sigma(2l+1))} = 0.$$

Тогда

$$P(f - \mathscr{X}_{\sigma,G}(f)) \leq \left| \frac{2}{\pi\sigma^r} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i(2l+1)\sigma\xi}}{(2l+1)^{r+1}} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{(1 - ia_k\sigma(2l+1))} \right| P(Q(\mathfrak{D})f).$$

Для доказательства надо учесть, что для любого $y_0 > 0$ функция f выражается через $\varphi = Q(\mathfrak{D})f$ формулой (13), где

$$c(G, y) = (iy)^{-r} \prod_{k=1}^{m} (1 - ia_k y)^{-1} \quad \text{при } |y| \geq y_0.$$

В периодическом случае для равномерной нормы следствие 3 установлено М. Г. Крейном [13] (предшествовавшие частные случаи см. в [1, 2, 11]), для интегральной нормы — С. М. Никольским [6]. В непериодическом случае для равномерной нормы следствие 3 установлено М. Г. Крейном [22]. В [13, 22] неравенства (для всех σ, больших некоторого числа) были установлены для многочленов не только с вещественными корнями; в периодическом случае эти результаты были развиты в [15, 16]. Для четных и нечетных многочленов Q следствие 3 доказано другим способом в [9].

3.2. Обобщенные ядра Бернулли и Пуассона. Пусть $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ и функция $G \in L$ имеет ряд Фурье

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \psi(|k|) e^{-i\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sgn} k} e^{ikt}.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $\beta \in [0, 2]$. Согласно А. И. Степанцу [5, гл. 3, § 7] если

$$f = c_0(f) + \varphi * G, \quad \varphi \perp 1,$$

то функция φ называется (ψ, β)-*производной* функции f. Коэффициент 2, отсутствующий в [5], объясняется нормирующим множителем $\frac{1}{2\pi}$ вместо $\frac{1}{\pi}$ в определении свертки. Если $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, то функция φ называется (r, β)-*производной Вейля — Надя* функции f. При $r \in \mathbb{N}$, $\beta = r$ ядро G есть ядро Бернулли, а $\varphi = f^{(r)}$. При $r \in \mathbb{N}$, $\beta = r + 1$ функция φ совпадает с r-й производной функции $\tilde{f}$, тригонометрически сопряженной с f. Ядра G из этого примера, как и их непериодические аналоги, будем называть *обобщенными ядрами Бернулли.*

Точные неравенства для приближений периодических функций через нормы их (r, β)-производных в полной общности установил В. К. Дзядык [14] (см. там же историю вопроса, другое доказательство см. в [16]). Распространим теорему Дзядыка на непериодический случай.

Следствие 4. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathscr{B}$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $r > 0$, $\beta \in [0, 2]$, *функции* f *и* φ *связаны равенством*

$$f = f_0 + \varphi * D_{r,\beta}, \tag{14}$$

где $f_0 \in \mathbf{E}_{y_0}$, $D_{r,\beta} \in L(\mathbb{R})$,

$$c(D_{r,\beta}, y) = \frac{e^{-i\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sgn} y}}{|y|^r} \quad \text{при } |y| \geq y_0,$$

$\sigma \geq y_0$, *значение* ξ *определяется следующим образом. Если* $r \in (0, 1]$, $\beta \in [r, 2 - r]$, *то* $\xi = 0$; *иначе* ξ — *корень уравнения*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos\left((2l+1)\sigma\xi - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{(2l+1)^r} = 0.$$

Тогда

$$P(f - \mathscr{X}_{\sigma, D_{r,\beta}}(f)) \leq \frac{4}{\pi\sigma^r} \left| \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2l+1)\sigma\xi - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{(2l+1)^{r+1}} \right| P(\varphi).$$

Если представление (14) *верно при всех* $y_0 > 0$, *то заключение верно при всех* $\sigma > 0$.

Доказательство. По замечанию 4

$$\mathscr{P}_N(D_{r,\beta}, t) = c_0 + \left(\frac{N}{\sigma}\right)^r \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{-i\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sgn} k}}{|k|^r} e^{ikt}, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

По теореме Дзядыка функция $\mathscr{P}_N(D_{r,\beta})$ удовлетворяет условию B'_N. $\square$

Следствие 5. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathscr{B}$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, $y_0 > 0$, $\rho \in (0,1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathbb{R}$, *функции* f *и* φ *связаны равенством*

$$f = f_0 + \varphi * \Pi_{r,\rho,\beta}, \tag{15}$$

где $f_0 \in \mathbf{E}_{y_0}$, $\Pi_{r,\rho,\beta} \in L(\mathbb{R})$,

$$c(\Pi_{r,\rho,\beta}, y) = \frac{\rho^{|y|}}{|y|^r} e^{-i\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sgn} y} \quad \text{при } |y| \geq y_0,$$

$\sigma \geq y_0$, ξ — *корень уравнения*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\rho^{(2l+1)\sigma}}{(2l+1)^r} \cos\left((2l+1)\sigma\xi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0.$$

Тогда

$$P(f - \mathscr{X}_{\sigma,\Pi_{r,\rho,\beta}}(f)) \leq \frac{4}{\pi\sigma^r} \left| \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\rho^{(2l+1)\sigma}}{(2l+1)^{r+1}} \sin\left((2l+1)\sigma\xi - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right| P(\varphi).$$

Если представление (15) *верно при всех* $y_0 > 0$, *то заключение верно при всех* $\sigma > 0$.

Положим $\Pi_{\rho,\beta} = \Pi_{0,\rho,\beta}$. При $y_0 = 0$, $\beta = 0$ ядро $\Pi_{\rho,\beta}$ есть ядро Пуассона, а при $y_0 = 0$, $\beta = 1$ — сопряженное к ядру Пуассона. В общем случае будем называть ядро $\Pi_{r,\rho,\beta}$ *обобщенным ядром Пуассона,* а свертку $\varphi * \Pi_{r,\rho,\beta}$ — *обобщенным интегралом Пуассона* функции φ.

Периодическое обобщенное ядро Пуассона удовлетворяет условию N_n^* и тем более условию B'_n. Для $r = 0$, $\beta \in 2\mathbb{Z}$ это доказал М. Г. Крейн [13]; для $r = 0$, $\beta \in 2\mathbb{Z} + 1$ — Надь [7]; для $r = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ — А. В. Бушанский [23] и независимо В. Т. Шевалдин [24]; для $r \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ — А. С. Сердюк [25]; случай $r = 0$ см. также в [5, лемма 7.2, теорема 7.3].

Доказательство. По замечанию 4

$$\mathscr{P}_N(\Pi_{r,\rho,\beta}, t) = c_0 + \left(\frac{N}{\sigma}\right)^r \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\rho^{\frac{\sigma|k|}{N}}}{|k|^r} e^{-i\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sgn} k} e^{ikt}, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

С точностью до нормировки и свободного члена это периодическое обобщенное ядро Пуассона с параметром $\rho^{\frac{\sigma}{N}}$ вместо ρ. Остается воспользоваться условием B'_N для периодизаций. $\square$

Замечание 5. В периодическом случае при $r = 0$ Н. А. Барабошкина [26] получила выражения точки ξ и константы $\mathscr{K}_{\sigma,\Pi_{\rho,\beta}}$ в элементарных функциях параметров ρ, β и σ. Приведем их. Замена натурального параметра n на произвольный положительный параметр σ не играет роли в этих вычислениях, поэтому

$$\xi = -\frac{1}{\sigma}\arcsin\frac{(1-\rho^{2\sigma})\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\sqrt{1-2\rho^{2\sigma}\cos\beta\pi+\rho^{4\sigma}}}, \quad \beta\in[0,2],$$

$$\mathscr{K}_{\sigma,\Pi_{\rho,\beta}} = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\rho^\sigma\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\sqrt{1-2\rho^{2\sigma}\cos\beta\pi+\rho^{4\sigma}}} + \frac{1}{\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2}\ln\frac{\sqrt{1-2\rho^{2\sigma}\cos\beta\pi+\rho^{4\sigma}}+2\rho^\sigma\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\sqrt{1-2\rho^{2\sigma}\cos\beta\pi+\rho^{4\sigma}}-2\rho^\sigma\sin\frac{\beta\pi}{2}}.$$

В частности [13, 7],

$$\mathscr{K}_{\sigma,\Pi_{\rho,0}} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\rho^\sigma, \quad \mathscr{K}_{\sigma,\Pi_{\rho,1}} = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+\rho^\sigma}{1-\rho^\sigma}.$$

При $\beta\in\mathbb{Z}$ следствие 5 доказано другим способом в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Favard J.* Sur les meilleurs procédés d’approximation de certaines classes des fonctions par des polynomes trigonométriques // Bull. Sci. Math. 1937. V. 61. P. 209–224; 243–256.
2. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15, № 3. С. 107–112.
3. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
4. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verl., 1985.
5. *Stepanets A. I.* Methods of approximation theory. Leiden: Koninklijke Brill NV, 2005.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10, № 9. С. 207–256.
7. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall // Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 1938. V. 90. P. 103–134.
8. *Заставный В. П.* Теорема Никольского для ядер, удовлетворяющих более общему условию, чем A_n^* // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. 2010. Т. 20. С. 75–85.
9. *Виноградов О. Л.* Точные неравенства типа Джексона для приближений классов сверток целыми функциями конечной степени // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17, № 4. С. 56–111.
10. *Lorenz G. G., DeVore R. A.* Constructive approximation. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1993.
11. *Ахиезер Н. И.* О наилучшем приближении одного класса непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. 1937. Т. 17, № 9. С. 451–453.
12. *Ахиезер Н. И.* О наилучшем приближении аналитических функций // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. С. 241–244.
13. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. С. 245–249.
14. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 5. С. 691–701.
15. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Теорема Ролля для дифференциальных операторов и некоторые экстремальные задачи теории приближений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295, № 6. С. 1313–1318.
16. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Осцилляционные свойства дифференциальных операторов и операторов свертки и некоторые их приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 3. С. 590–606.

17. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II. Nichtperiodischer Fall // Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 1939. V. 91. P. 3–24.

18. *Сердюк А. С.* Найкращи наближення i поперечники класiв згорток перiодичних функцiй високої гладкостi // Укр. мат. журн. 2005. Т. 57, № 7. С. 946–971.

19. *Виноградов О. Л., Гладкая А. В.* Непериодический сплайновый аналог операторов Ахиезера — Крейна — Фавара // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2015. Т. 440. С. 8–35.

20. *Виноградов О. Л.* Точные неравенства для приближений классов сверток подпространствами сдвигов нечетной размерности // Мат. заметки. 2009. Т. 85, № 4. С. 569–584.

21. *Pinkus A.* On n-widths of periodic functions // J. Anal. Math. 1979. V. 35. P. 209–235.

22. *Крейн М. Г.* О наилучшей аппроксимации непрерывных дифференцируемых функций на всей вещественной оси // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 9. С. 619–623.

23. *Бушанский А. В.* О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. 1978. С. 29–37.

24. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 6. С. 126–136.

25. *Сердюк А. С.* Поперечники та найкращи наближення класiв згорток перiодичних функцiй // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 5. С. 674–687.

26. *Барабошкина Н. А.* Приближение гармонических функций алгебраическими многочленами на окружности радиуса меньше единицы с наличием ограничений на единичной окружности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 71–78.

Статья поступила 8 апреля 2016 г.

Виноградов Олег Леонидович
Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетский пр., 28, Санкт-Петербург 198504
olvin@math.spbu.ru