Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 512.57

О КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ АКСИОМАТИЧЕСКОГО РАНГА 3

А. И. Будкин

Аннотация. Изучается решетка квазимногообразий аксиоматического ранга не выше трех нильпотентных групп без кручения ступени не более трех. Доказано, что эта решетка имеет континуальную мощность и содержит подрешетку, порядково изоморфную множеству действительных чисел. Также установлено, что решетка квазимногообразий аксиоматического ранга не более двух этих групп — 5-элементная цепь.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.106

Ключевые слова: нильпотентная группа, аксиоматический ранг, квазимногообразие, решетка.

Введение

Аксиоматический ранг является одной из важных характеристик Q-теорий (т. е. множества всех квазитождеств, истинных во всех группах данного класса). Задача о нахождении аксиоматических рангов Q-теорий широко изучалась для Q-теорий многообразий. Подробную информацию об этом можно найти в книге Нейман [1]. А. И. Мальцев [2, 13.1] привлек внимание к изучению аксиоматических рангов Q-теорий произвольных классов алгебраических систем. Исследования в этом направлении нашли свое отражение в обзоре Д. М. Смирнова [3]. У автора совместно с В. А. Горбуновым в [4] впервые возникла идея рассматривать квазимногообразия с точки зрения невложимости. В [4] исследовались классы групп, в каждую из которых не вложима данная конечно определенная подпрямо неразложимая группа. Эти классы оказались квазимногообразиями конечных аксиоматических рангов. В дальнейшем серьезное влияние на изучение аксиоматических рангов оказала задача, поставленная Д. М. Смирновым в [5, вопрос 3.52], об аксиоматическом ранге Q-теории свободной неабелевой группы.

Известно, что аксиоматические ранги квазимногообразий, порожденных большинством важнейших классов групп, бесконечны (см. статьи автора [6–8]). В процессе развития теории квазимногообразий алгебраических систем роль понятия аксиоматического ранга возросла. Ясно, что множество всех квазимногообразий, имеющих в данном квазимногообразии $\mathscr{N}$ аксиоматический ранг, меньший или равный n, частично упорядочено относительно включения и образует решетку, обозначаемую через $L_q^n(\mathscr{N})$. Оказалось, что во многих случаях изучение решетки квазимногообразий сводится к изучению решеток вида $L_q^n(\mathscr{N})$. Например, из работ В. А. Горбунова [9] и В. И. Туманова [10] следует, что решетка $L_q^n(\mathscr{N})$ является гомоморфным образом решетки $L_q(\mathscr{N})$ квазимногообразий, содержащихся в $\mathscr{N}$. Более того, если $\mathscr{N}$ — локально конечное квазимногообразие, то решетка $L_q(\mathscr{N})$ аппроксимируется решетками $L_q^n(\mathscr{N})$. Также решетка $L_q(\mathscr{N})$ [11] является обратным пределом решеток вида $L_q^n(\mathscr{N})$. Вследствие этого изучение решеток $L_q^n(\mathscr{N})$ можно рассматривать как естественный подход к исследованию решетки $L_q(\mathscr{N})$.

Подробную информацию об аксиоматических рангах многообразий нильпотентных групп можно найти в [1]. Q-теории 2-порожденных групп данного аксиоматического ранга исследовались Е. С. Половниковой в [12]. Е. С. Половникова в [13] доказала, что не существует неабелевых квазимногообразий нильпотентных групп без кручения ступени ≤ 2 аксиоматических рангов 2 и 3. Заметим, что это описание квазимногообразий аксиоматических рангов 2 и 3 весьма удачно использовалось С. А. Шаховой в [14] при рассмотрении свободных конструкций в квазимногообразиях нильпотентных групп. Отметим, что квазимногообразия метабелевых групп без кручения аксиоматического ранга 2 исследовались Ю. А. Авциновой [15, 16].

В данной работе найдено описание квазимногообразий нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех аксиоматического ранга 2. Как следствие, получено, что 5-элементная цепь является гомоморфным образом решетки $L_q(\mathscr{N}_{3,\infty})$ квазимногообразия нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех. Также в работе доказана континуальность решетки $L_q^3(\mathscr{N}_{3,\infty})$ квазимногообразий нильпотентных групп без кручения ступени не выше трех аксиоматического ранга не более трех. Оказалось, что решетка $L_q^3(\mathscr{N}_{3,\infty})$ содержит цепь, порядково изоморфную множеству действительных чисел.

Используемые в работе обозначения и сведения из теории групп можно найти в [1, 17], а из теории квазимногообразий групп — в [2, 18, 19].

§ 1. Предварительные замечания

Напомним некоторые понятия и определения.

Говорят, что *аксиоматический ранг квазимногообразия $\mathscr{K}$ в данном классе $\mathscr{N}$ ($\mathscr{K} \subseteq \mathscr{N}$) равен* n, если $\mathscr{K}$ можно задать в $\mathscr{N}$ системой квазитождеств от n переменных и нельзя задать никаким множеством квазитождеств от меньшего числа переменных. Если такого числа n не существует, то $\mathscr{K}$ имеет бесконечный аксиоматический ранг в $\mathscr{N}$.

Через $L_q^n(\mathscr{N})$ обозначим решетку квазимногообразий групп, содержащихся в $\mathscr{N}$ и имеющих в $\mathscr{N}$ аксиоматический ранг, меньший или равный n, а через $L_q(\mathscr{N})$ — решетку квазимногообразий групп, содержащихся в $\mathscr{N}$.

Через $\mathscr{N}_c$ обозначаем многообразие всех нильпотентных групп ступени не выше c, $\mathscr{N}_{c,\infty}$ — класс групп без кручения из $\mathscr{N}_c$, $F_r(\mathscr{N})$ — свободная группа в квазимногообразии $\mathscr{N}$ ранга r, qG — квазимногообразие, порожденное группой G.

Через $\mathrm{gr}(S)$ будем обозначать группу, порожденную множеством S, через (a) — циклическую группу, порожденную элементом a. Кроме того, Z — бесконечная циклическая группа, G' — коммутант группы G, $Z(G)$ — центр G. Как обычно, $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_{c+1}(G) = [\gamma_c(G), G]$.

Коммутаторы вида $[x_i, x_j, x_k]$, где $i > j \leq k$, называются *базисными коммутаторами веса* 3.

Как обычно, через $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ обозначены множества целых, рациональных и действительных чисел соответственно.

Нам понадобятся следующие известные коммутаторные тождества, истинные в любой нильпотентной группе ступени не выше трех:

$$[a,bc]=[a,c][a,b][a,b,c],\quad [ab,c]=[a,c][a,c,b][b,c],\quad [a,b,c][b,c,a][c,a,b]=1.$$

Будем пользоваться следующей теоремой Дика [2, 11.2; 19, теорема 2.2.23].

Теорема 1. *Пусть группа G имеет в данном квазимногообразии $\mathscr{N}$ представление*

$$G=\mathrm{gr}(\{x_i\mid i\in I\}\parallel\{r_j(x_{j_1},\dots,x_{j_{l(j)}})=1\mid j\in J\}).$$

Предположим, что $H\in\mathscr{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i\mid i\in I\}$ такое, что для всякого $j\in J$ равенство $r_j(g_{j_1},\dots,g_{j_{l(j)}})=1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i\to g_i$ $(i\in I)$ продолжается до гомоморфизма G в H.

Условимся при написании квазитождеств кванторы всеобщности опускать.

§ 2. Квазимногообразия аксиоматического ранга 2

Лемма 1. *Пусть G — 2-порожденная нильпотентная ступени 3 группа без кручения. Тогда $G\cong F_2(\mathscr{N}_3)$ либо $G\cong A$, где A имеет в $\mathscr{N}_3$ следующее представление:*

$$A=\mathrm{gr}(x,y\parallel[y,x,y]=1).$$

Доказательство. Пусть $F=F_2(\mathscr{N}_3)=\mathrm{gr}(x,y)$. Считаем, что $G=F/N$. Если $N=(1)$, то $G\cong F_2(\mathscr{N}_3)$. Предполагаем, что $N\neq(1)$. Известно [17, теорема 16.2.3], что пересечение всякой неединичной нормальной подгруппы нильпотентной группы с центром этой группы нетривиально. Выберем неединичный элемент $g\in N\cap Z(F)$. Элемент g можно записать в виде

$$g=[y,x,y]^k[y,x,x]^m$$

для подходящих целых чисел k,m. Поскольку группа F/N не имеет кручения, элемент g может быть выбран так, чтобы из него не извлекались нетривиальные корни в F. Отсюда НОД$(k,m)=1$. Возьмем целые числа u,v такие, что $mv+ku=1$. Из этого равенства следует, что НОД$(u,m)=1$. Несложные вычисления показывают, что

$$[y^vx^{-u},y^kx^m,y^kx^m]=[y,x,y]^{k(mv+uk)}[y,x,x]^{m(mv+uk)}=[y,x,y]^k[y,x,x]^m=g.$$

Пусть $\bar z=zF'$ при $z\in F$. Так как $(\bar y^v\bar x^{-u})^m(\bar y^k\bar x^m)^u=\bar y$ и НОД$(u,m)=1$, то $\mathrm{gr}(\bar y^v\bar x^{-u},\bar y^k\bar x^m)=\mathrm{gr}(\bar x,\bar y)$. В этом случае, как известно (см., например, [1, теорема 42.51]), y^vx^{-u},y^kx^m — свободные порождающие группы F.

Обозначим $b=y^vx^{-u}$, $a=y^kx^m$. В этих обозначениях $[b,a,a]=g$.

Предположим, что $[b,a,b]^s\in N$, $|s|\geq 2$. Поскольку F/N — группа без кручения, $[b,a,b]\in N$. Это противоречит 3-ступенной нильпотентности группы G. Итак, $[b,a,b]^s\notin N$ при каждом s, $|s|\geq 2$. В частности, $\gamma_3(F)\cap N=(g)$. Покажем, что $N=(g)$.

Пусть f — произвольный элемент из N. Тогда f можно представить в виде $f=a^pb^q[b,a]^l[b,a,a]^t[b,a,b]^r$. Если $p\neq 0$, то $[f,b,b]=[a,b,b]^p=[b,a,b]^{-p}\in N$, что неверно. Если $q\neq 0$, то $[f,a,b]=[b,a,b]^q\in N$, что не так. Если $l\neq 0$, то, учитывая, что $p=0$, $q=0$, получаем $[f,b]=[b,a,b]^l\in N$, что неверно. Имеем $f=[b,a,a]^t[b,a,b]^r\in N$, $[b,a,b]\notin N$ и $[b,a,a]\in N$. Отсюда $f=[b,a,a]^t$. Показали, что $N=([b,a,a])=([a,b,a])$. Значит, $G\cong A$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Квазитождество*

$$(\forall x)(\forall y)([x,y,x]=1 \to [x,y,y]=1)$$

истинно в группе $F_2(\mathscr{N}_3)$.

Доказательство. Пусть $[a,b,a]=1$, $a,b\in F_2=F_2(\mathscr{N}_3)$. Можно считать, что a и b не лежат в одной циклической подгруппе по модулю коммутанта. Тогда по теореме 42.51 из [1] они свободно порождают $\mathscr{N}_3$-свободную подгруппу, поэтому данное равенство ложно. Итак, $a=h^kc_1, b=h^mc_2$ для подходящих элементов $h\in F_2$, $c_1,c_2\in F_2'$ и целых чисел k,m. Несложно заметить, что $[h^kc_1,h^mc_2,h^mc_2]=1$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Решетка* $L_q^2(\mathscr{N}_{3,\infty})$ *квазимногообразий аксиоматического ранга не более двух, содержащихся в* $\mathscr{N}_{3,\infty}$, *является* 5*-элементной цепью.*

Доказательство. Легко заметить, что всякая 2-порожденная 2-ступенно нильпотентная группа без кручения изоморфна группе $F_2(\mathscr{N}_2)$. Отсюда и из леммы 1 следует, что список 2-порожденных групп из $\mathscr{N}_{3,\infty}$ состоит из групп $F_2(\mathscr{N}_3)$, A, $F_2(\mathscr{N}_2)$, $Z\times Z$, Z, (1).

Обозначим через $\mathscr{M}$ квазимногообразие, заданное в $\mathscr{N}_{3,\infty}$ квазитождеством $(\forall x)(\forall y)([x,y,x]=1\to[x,y,y]=1)$. Из леммы 2 следует, что квазимногообразия $\mathscr{N}_{3,\infty}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}_{2,\infty}$, qZ, $q(1)$ попарно различны (отметим, что $q(Z\times Z)=qZ$) и их множества 2-порожденных групп не совпадают.

По теореме Леви [1, теорема 34.31] всякая группа без кручения, удовлетворяющая тождеству $[x,y,y]=1$, является 2-ступенно нильпотентной. Отсюда $\mathscr{N}_{2,\infty}$ задается относительно квазимногообразия $\mathscr{N}_{3,\infty}$ тождеством $[x,y,y]=1$, т. е. имеет аксиоматический ранг 2. Известно (см., например, [19]), что qZ совпадает с классом абелевых групп без кручения и поэтому аксиоматический ранг квазимногообразия qZ равен 2.

В [19, теорема 2.6.7] (см. также [18, теорема 2.3.1]) доказано, что если n-порожденная группа G не принадлежит данному квазимногообразию $\mathscr{N}$, то существует квазитождество от n переменных, истинное в каждой группе из $\mathscr{N}$ и ложное в G. Отсюда квазимногообразия аксиоматического ранга не выше n различны тогда и только тогда, когда множества их n-порожденных групп не совпадают. Следовательно, $\mathscr{N}_{3,\infty}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}_{2,\infty}$, qZ, $q(1)$ — полный список квазимногообразий, аксиоматический ранг которых относительно $\mathscr{N}_{3,\infty}$ не превышает двух. Теорема доказана.

По [8, 9] для всякого квазимногообразия $\mathscr{N}$ решетка $L_q^n(\mathscr{N})$ является гомоморфным образом решетки квазимногообразий $L_q(\mathscr{N})$. Получаем

Следствие 1. 5*-Элементная цепь является гомоморфным образом решетки* $L_q(\mathscr{N}_{3,\infty})$.

§ 3. Квазимногообразия аксиоматического ранга 3

Будем рассматривать группу $G_{s,t}$, имеющую в классе $\mathscr{N}_3$ представление $G_{s,t}=\mathrm{gr}(x_1,x_2,x_3 \parallel [x_2,x_1,x_1]^s=[x_3,x_2,x_2], [x_3,x_2,x_3]^t=[x_3,x_1,x_1], [x_3,x_1,x_3]=1)$, и квазитождество

$$\Phi_{p,q}=([x_2,x_1,x_1]^p=[x_3,x_2,x_2]\&[x_3,x_2,x_3]^q=[x_3,x_1,x_1]\&[x_3,x_1,x_3]=1 \\ \to [x_3,x_1,x_1]=1).$$

Лемма 3. *Группа $G_{s,t}$, $s,t \in \mathbb{N}$, не имеет кручения.*

Доказательство. Пусть

$$H = \mathrm{gr}([x_2,x_1,x_1]^s[x_3,x_2,x_2]^{-1}, [x_3,x_2,x_3]^t[x_3,x_1,x_1]^{-1}, [x_3,x_1,x_3])$$

— подгруппа группы $F_3 = F_3(\mathscr{N}_3)$ и $g^n \in H$, $n > 0$. Несложно заметить, что $g \in \gamma_3(F_3)$, поэтому g можно записать в виде произведения базисных коммутаторов следующим образом:

$$g = [x_2,x_1,x_1]^{k_1}[x_2,x_1,x_2]^{k_2}[x_2,x_1,x_3]^{k_3}[x_3,x_1,x_1]^{k_4}[x_3,x_1,x_2]^{k_5}[x_3,x_1,x_3]^{k_6}$$
$$[x_3,x_2,x_2]^{k_7}[x_3,x_2,x_3]^{k_8}.$$

Поскольку $g^n \in H$, то g^n представим так:

$$g^n = ([x_2,x_1,x_1]^s[x_3,x_2,x_2]^{-1})^u([x_3,x_2,x_3]^t[x_3,x_1,x_1]^{-1})^v[x_3,x_1,x_3]^w.$$

Отсюда $k_1n = su$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, $k_4n = -v$, $k_5 = 0$, $k_6n = w$, $k_7n = -u$, $k_8n = tv$. Следовательно, $k_1 = -k_7s$, $k_8 = -k_4t$. Видим, что

$$g = ([x_2,x_1,x_1]^{-s}[x_3,x_2,x_2])^{k_7}([x_3,x_2,x_3]^{-t}[x_3,x_1,x_1])^{k_4}[x_3,x_1,x_3]^{k_6}.$$

Полученное означает, что $g \in H$, откуда $G_{s,t}$ — группа без кручения. Лемма доказана.

Следствие 2. *Любой элемент $g \in G_{s,t}$ однозначно представим в виде произведения базисных коммутаторов, за исключением коммутаторов $[x_3,x_2,x_2]$, $[x_3,x_1,x_1]$, $[x_3,x_1,x_3]$.*

Эту однозначную запись из следствия 2 элемента g будем называть *канонической*.

Лемма 4. *Квазитождество $\Phi_{p,q}$ истинно в группе $G_{s,t}$ при $pq \neq st$.*

Доказательство. Пусть левая часть квазитождества $\Phi_{p,q}$ истинна в $G_{s,t}$ при подстановке

$$x_i \to x_1^{k_i}x_2^{m_i}x_3^{n_i}c_i, \quad c_i \in G'_{s,t},\ i = 1,2,3.$$

По теореме Дика это отображение продолжается до гомоморфизма $\varphi : G_{p,q} \to G_{s,t}$.

Условимся через $\sigma_{ijk}(f)$ обозначать показатель степени, с которым базисный коммутатор $[x_i,x_j,x_k]$ входит в каноническую запись элемента f.

Используя коммутаторные тождества и тождество

$$[x_3,x_2,x_1]{=}[x_2,x_1,x_3]^{-1}[x_3,x_1,x_2],$$

несложно вычислить любое из чисел $\sigma_{ijk}(\varphi([x_u,x_v,x_w])$. Ввиду громоздкости и легкости этого соответствующие вычисления будем опускать.

Из соотношений

$$[\varphi(x_2),\varphi(x_1),\varphi(x_1)]^p = [\varphi(x_3),\varphi(x_2),\varphi(x_2)], [\varphi(x_3),\varphi(x_2),\varphi(x_3)]^q$$
$$= [\varphi(x_3),\varphi(x_1),\varphi(x_1)], [\varphi(x_3),\varphi(x_1),\varphi(x_3)] = 1$$

следует, что

$$\sigma_{211}(\varphi([x_2,x_1,x_1]^p)) = \sigma_{211}(\varphi([x_3,x_2,x_2])),$$
$$\sigma_{323}(\varphi([x_3,x_2,x_3]^q)) = \sigma_{323}(\varphi([x_3,x_1,x_1])),$$

$$\sigma_{211}(\varphi([x_3,x_1,x_3]))=0,\quad \sigma_{323}(\varphi([x_3,x_1,x_3]))=0,$$
$$\sigma_{312}(\varphi([x_3,x_1,x_3]))=0,\quad \sigma_{212}(\varphi([x_3,x_1,x_3]))=0.$$

Из рассматриваемых соотношений, конечно, следуют и другие равенства, но они не понадобятся.

Вычисляя $\sigma_{ijk}(\varphi([x_u,x_v,x_w]))$, получим следующие равенства:

$$(m_2k_1-k_2m_1)k_1p+(n_2m_1-n_1m_2)m_1sp=(m_3k_2-k_3m_2)k_2+(n_3m_2-m_3n_2)m_2s, \tag{1}$$
$$(n_3m_2-n_2m_3)n_3q+(n_3k_2-k_3n_2)k_3tq=(n_3m_1-n_1m_3)n_1+(n_3k_1-n_1k_3)k_1t, \tag{2}$$
$$(m_3k_1-k_3m_1)k_3+(n_3m_1-n_1m_3)m_3s=0, \tag{3}$$
$$(n_3m_1-n_1m_3)n_3+(n_3k_1-n_1k_3)k_3t=0, \tag{4}$$
$$(n_3k_1-n_1k_3)m_3+(n_3m_1-n_1m_3)k_3=0, \tag{5}$$
$$(m_3k_1-m_1k_3)m_3=0. \tag{6}$$

Установим равенство
$$m_3k_1-m_1k_3=0. \tag{7}$$
Допустим, что $m_3k_1-m_1k_3\neq 0$. Тогда по (6) $m_3=0$. Теперь по (3) $k_3=0$, откуда $m_3k_1-m_1k_3=0$; противоречие. Равенство (7) доказано.

Выведем равенство
$$n_3m_1-n_1m_3=0. \tag{8}$$
Из (3) и (7) получаем $(n_3m_1-n_1m_3)m_3=0$. Допустим, что $n_3m_1-n_1m_3\neq 0$. Тогда $m_3=0$ и $n_3m_1\neq 0$. По (5) $n_3m_1k_3=0$, откуда $k_3=0$. В силу (4) $n_3^2m_1=0$, что противоречит неравенству $n_3m_1\neq 0$. Равенство (8) доказано.

Докажем, что
$$(n_3k_1-n_1k_3)m_1=0. \tag{9}$$
Предположим, что $(n_3k_1-n_1k_3)m_1\neq 0$. По (5) и (8) $(n_3k_1-n_1k_3)m_3=0$, откуда $m_3=0$. В силу (7) $m_1k_3=0$. Поскольку $m_1\neq 0$, то $k_3=0$, а по (8) $n_3=0$. Это противоречит неравенству $(n_3k_1-n_1k_3)m_1\neq 0$. Равенство (9) доказано.

Для установления истинности рассматриваемого квазитождества достаточно убедиться, что $\varphi([x_3,x_1,x_1])=1$. Несложные вычисления показывают, что

$$\sigma_{211}(\varphi([x_3,x_1,x_1]))=(m_3k_1-k_3m_1)k_1+(n_3m_1-n_1m_3)m_1s,$$
$$\sigma_{323}(\varphi([x_3,x_1,x_1]))=(n_3m_1-n_1m_3)n_1+(n_3k_1-n_1k_3)k_1t,$$
$$\sigma_{213}(\varphi([x_3,x_1,x_1]))=(m_3k_1-m_1k_3)n_1-(n_3m_1-n_1m_3)k_1,$$
$$\sigma_{312}(\varphi([x_3,x_1,x_1]))=(n_3k_1-n_1k_3)m_1+(n_3m_1-n_1m_3)k_1,$$
$$\sigma_{212}(\varphi([x_3,x_1,x_1]))=(m_3k_1-m_1k_3)m_1.$$

Видим, что $\sigma_{212}(\varphi([x_3,x_1,x_1]))=0$ по (7), $\sigma_{312}(\varphi([x_3,x_1,x_1]))=0$ по (9) и (8), $\sigma_{213}(\varphi([x_3,x_1,x_1]))=0$ по (7) и (8).

Покажем, что $\sigma_{323}(\varphi([x_3,x_1,x_1]))=0$. Пусть это неверно. Тогда из (8) следует, что $(n_3k_1-n_1k_3)k_1t\neq 0$, значит, $k_1\neq 0$, $n_3k_1-n_1k_3\neq 0$. В силу (5) и (8) $(n_3k_1-n_1k_3)m_3=0$, откуда $m_3=0$. Имеем $m_1=0$ по (9), $k_3=0$ по (4) и (8). Из (2) получаем $n_3^2m_2q=n_3k_1^2t$, а из (1) — $m_2k_1^2p=n_3m_2^2s$. Если $m_2\neq 0$ и $n_3\neq 0$, то из этих двух равенств вытекает, что

$$pq=n_3m_2q\frac{s}{k_1^2}=k_1^2t\frac{s}{k_1^2}=ts.$$

Однако по условию леммы $pq \neq ts$. Значит, $m_2 = 0$ либо $n_3 = 0$.

Пусть сначала $m_2 = 0$. Тогда из равенства $n_3^2 m_2 q = n_3 k_1^2 t$ следует, что $n_3 = 0$. Это противоречит неравенству $(n_3 k_1 - n_1 k_3) k_1 t \neq 0$. Случай $m_2 \neq 0$ и $n_3 = 0$ противоречит равенству $m_2 k_1^2 p = n_3 m_2^2 s$. В силу вышеизложенного имеем $\sigma_{323}(\varphi([x_3, x_1, x_1])) = 0$.

Видим, что $\sigma_{211}(\varphi([x_3, x_1, x_1])) = 0$ по (7) и (8).

Итак, установлено, что $\varphi([x_3, x_1, x_1]) = 1$. Это означает истинность квазитождества $\Phi_{p,q}$ в группе $G_{s,t}$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Решетка $L_q^3(\mathscr{N}_{3,\infty})$ квазимногообразий аксиоматического ранга не более трех, содержащихся в $\mathscr{N}_{3,\infty}$, континуальна.*

Доказательство. Пусть I — произвольное бесконечное множество пар различных простых чисел. Для каждого непустого подмножества J множества I обозначим через $\mathscr{M}(J)$ квазимногообразие, заданное в $\mathscr{N}_{3,\infty}$ всеми квазитождествами Φ_j при $j \in J$. Поскольку квазитождество Φ_i ложно в группе G_i и по лемме 4 истинно в каждой группе G_j при $j \neq i$, $i, j \in I$, видим, что $G_i \in \mathscr{M}(J)$ тогда и только тогда, когда $i \notin J$. Отсюда следует, что множество квазимногообразий $\{\mathscr{M}(J) \mid J \subseteq I\}$ континуально. Теорема доказана.

Фактически повторяя доказательство соответствующего утверждения для многообразий [20], получаем следующее свойство решетки $L_q^3(\mathscr{N}_{3,\infty})$.

Следствие 3. *Решетка $L_q^3(\mathscr{N}_{3,\infty})$ содержит цепь, порядково изоморфную множеству действительных чисел.*

Доказательство. Пусть I, $\mathscr{M}(J)$ те же, что и при доказательстве теоремы 3, $\varphi : I \to \mathbb{Q}$ — взаимно однозначное отображение множества I на множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Каждому действительному числу r поставим в соответствие квазимногообразие $\mathscr{M}_r = \mathscr{M}(J_r)$, где $J_r = \{j \in I \mid \varphi(j) > r\}$. Легко заметить, что $\{\mathscr{M}_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ — искомая цепь квазимногообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
2. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
3. *Smirnov D. M.* Varieties and quasivarieties of algebras // Proc. Colloq. Universal Algebra (Esztergom, Hungary, 1977). Colloq. Math. Soc. János Bolyai. Amsterdam; New York: North-Holland, 1982. V. 29. P. 745–751.
4. *Будкин А. И., Горбунов В. А.* Импликативные классы алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 3. С. 249–268.
5. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2014. Т. 18.
6. *Будкин А. И.* О квазитождествах в свободной группе // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 1. С. 39–52.
7. *Будкин А. И.* Квазитождества нильпотентных групп и групп с одним определяющим соотношением // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 2. С. 127–136.
8. *Будкин А. И.* О Q-теориях 2-порожденных групп с данным аксиоматическим рангом // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 5. С. 513–523.
9. *Gorbunov V. A.* The structure of the lattices of quasivarieties // Algebra Univers. 1994. V. 32, N 4. P. 493–530.
10. *Туманов В. И.* Достаточные условия вложимости свободной решетки в решетки квазимногообразий. Новосибирск, 1988. 12 с. (Препринт/Ин-т математики СО АН СССР; № 40).
11. *Горбунов В. А.* Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 6. С. 646–666.

12. *Половникова Е. С.* Квазитождества 2-порожденных групп без кручения // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1354–1363.
13. *Половникова Е. С.* Об аксиоматическом ранге квазимногообразий // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 167–176.
14. *Шахова С. А.* Абсолютно замкнутые группы в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 6. С. 936–941.
15. *Авцинова Ю. А.* О квазимногообразиях метабелевых групп без кручения аксиоматического ранга два // Изв. АлтГУ. 2010. Т. 65, № 1-1. С. 1–10.
16. *Авцинова Ю. А.* Конечность множества квазимногообразий метабелевых групп без кручения аксиоматического ранга 2 // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 3. С. 281–302.
17. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
18. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. (Сиб. школа алгебры и логики). Новосибирск: Науч. книга, 1999.
19. *Будкин А. И.* Квазимногообразия групп. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002.
20. *Ольшанский А. Ю.* О некоторых бесконечных системах тождеств // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1978. № 3. С. 139–146.

Статья поступила 2 марта 2016 г.

Будкин Александр Иванович
Алтайский гос. университет,
пр. Ленина, 61, Барнаул 656049
budkin@math.asu.ru