Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 519.17

О DP–РАСКРАСКЕ ГРАФОВ И МУЛЬТИГРАФОВ

А. Ю. Бернштейн,
А. В. Косточка, С. П. Пронь

Аннотация. При решении задачи о предписанной раскраске плоских графов Дворжак и Постл ввели понятие DP-раскраски (они назвали его *correspondence coloring*). DP-раскраска графа G сводит задачу поиска раскраски G для заданного предписания L к проблеме поиска «большого» независимого множества во вспомогательном графе $H(G,L)$ с множеством вершин $\{(v,c) : v \in V(G) \text{ и } c \in L(v)\}$. Это похоже на сведение В. Г. Визинга и Г. С. Плесневича задачи k-раскраски к проблеме поиска независимого множества размера $|V(G)|$ в декартовом произведении $G\square K_k$, но DP-раскраска представляется значительно более полезной, чем сведение В. Г. Визинга и Г. С. Плесневича. Некоторые свойства DP-хроматического числа $\chi_{\mathrm{DP}}(G)$ напоминают свойства предписанного хроматического числа $\chi_\ell(G)$, но некоторые отличия довольно существенны. Всегда $\chi_{\mathrm{DP}}(G) \geq \chi_\ell(G)$. Целью настоящей работы является введение DP-раскраски для мультиграфов и доказательство аналога результата О. В. Бородина и Эрдёша — Рубина — Тейлора, характеризующего мультиграфы, которые не допускают DP-раскрасок для некоторых степенных предписаний. Из этого результата следует аналог для DP-раскраски теоремы Галлаи о минимальном числе ребер в критических k-хроматических графах.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.104

Ключевые слова: степень вершины, предписанная раскраска, критический граф.

1. Введение

Графы в данной статье предполагаются обыкновенными, т. е. без петель и кратных ребер. Мультиграфы могут иметь кратные ребра, но не петли. Полный n-вершинный граф будем обозначать через K_n, а n-вершинный цикл — через C_n. Если G — (мульти)граф и v, $u \in V(G)$, то $E_G(v,u)$ — это множество всех ребер в G, соединяющих v и u. Пусть $e_G(v,u) := |E_G(v,u)|$ и $\deg_G(v) := \sum\limits_{u\in V(G)\setminus\{v\}} e_G(v,u)$. Если $A \subseteq V(G)$, то $G[A]$ обозначает под(мульти)граф G, индуцируемый A, и для A, $B \subseteq V(G)$ через $G[A,B]$ обозначается максимальный двудольный под(мульти)граф G с долями A и B. Если $G_1, \dots, G_k$ — графы, то $G_1 + \dots + G_k$ обозначает граф с множеством вершин $V(G_1) \cup \dots \cup V(G_k)$ и множеством ребер $E(G_1) \cup \dots \cup E(G_k)$. Число независимости графа G обозначим через $\alpha(G)$. $\mathbb{N}$ обозначает множество всех неотрицательных целых чисел. Для $k \in \mathbb{N}$ через $[k]$ обозначим множество $\{1,\dots,k\}$.

Напомним, что (правильная) *k-раскраска* графа G — это отображение $f : V(G) \to [k]$ такое, что $f(v) \neq f(u)$ для $vu \in E(G)$. Наименьшее k такое, что G

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке стипендии штата Иллинойс, вторым автором — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15–01–05867, 16–01–00499), а также грантов NSF (DMS–1266016, DMS–1600592).

имеет k-раскраску, называется *хроматическим числом* G и обозначается через $\chi(G)$. Г. С. Плесневич и В. Г. Визинг [1] доказали, что G имеет k-раскраску тогда и только тогда, когда декартово произведение $G\Box K_k$ содержит независимое множество размера $|V(G)|$, т. е. $\alpha(G\Box K_k) = |V(G)|$.

Для решения некоторых проблем раскраски графов В. Г. Визинг [2] и независимо Эрдёш, Рубин и Тейлор [3] ввели более общее понятие *предписанной раскраски*. *Предписание* L для графа G — это отображение $L : V(G) \to \mathrm{Pow}(\mathbb{N})$, сопоставляющее каждой вершине $v \in V(G)$ набор $L(v) \subseteq \mathbb{N}$. *$L$-раскраской* G называют такое отображение $f : V(G) \to \mathbb{N}$, что $f(v) \in L(v)$ для каждой $v \in V(G)$ и $f(v) \neq f(u)$, если $vu \in E(G)$. *Предписанным хроматическим числом* $\chi_\ell(G)$ называют минимальное k такое, что G имеет L-раскраску для всех L, удовлетворяющих условию $|L(v)| = k$ для каждой $v \in V(G)$.

Поскольку обычная правильная k-раскраска G является L-раскраской с предписанием $L : v \mapsto [k]$, имеем $\chi_\ell(G) \geq \chi(G)$ для любого G. Однако разность $\chi_\ell(G) - \chi(G)$ может быть сколь угодно большой. Более того, графы с хроматическим числом 2 могут иметь произвольно большое предписанное хроматическое число. Известно, что 2-раскрашиваемые графы могут иметь сколь угодно большую минимальную степень, однако для предписанной раскраски Алон [4] показал, что $\chi_\ell(G) \geq (1/2 - o(1)) \log_2 \delta$ для любого графа G с минимальной степенью δ. С другой стороны, некоторые известные верхние оценки для $\chi(G)$ в терминах степеней вершин имеют место и для $\chi_\ell(G)$, например теорема Брукса [2] и верхняя оценка для $\chi_\ell(G)$ в терминах вырожденности. Кроме того, О. В. Бородин [5, 6] и независимо Эрдёш, Рубин и Тейлор [3] обобщили теорему Брукса на случай степенных предписаний. Напомним, что предписание L для графа G называется *степенным*, если $|L(v)| = \deg_G(v)$ для любой $v \in V(G)$.

Теорема 1 [3, 5, 6] (см. простое доказательство в [7]). *Пусть G — связный граф. Тогда G не является L-раскрашиваемым для некоторого степенного предписания, если и только если каждый блок графа G является либо полным графом, либо нечетным циклом.*

Этот результат позволяет распространить оценки Галлаи [8] для минимального числа ребер в n-вершинных k-критических графах (т. е. таких графах G с $\chi(G) = k$, что после удаления любого ребра или вершины хроматическое число уменьшается) на n-вершинные предписанно-k-критические графы (т. е. такие графы G с $\chi_\ell(G) = k$, что после удаления любого ребра или вершины предписанное хроматическое число уменьшается).

Предписанные раскраски оказались полезными при получении ряда результатов для обычной раскраски графа. Однако, как правило, получать верхние оценки для $\chi_\ell(G)$ бывает труднее, чем для $\chi(G)$. Чтобы доказать верхнюю оценку для одного класса плоских графов, Дворжак и Постле [9] ввели и активно использовали новое обобщение предписанной раскраски, названное ими *correspondence coloring*. Для краткости будем называть такую раскраску *DP-раскраской*.

Сначала покажем, как свести к DP-раскраске проблему L-раскраски графа G. Для графа G с предписанием L множеством вершин вспомогательного графа $H = H(G, L)$ является $\{(v, c) : v \in V(G) \text{ и } c \in L(v)\}$, а две различные вершины (v, c) и (v', c') смежны в H тогда и только тогда, когда либо $c = c'$ и $vv' \in E(G)$, либо $v = v'$. Отметим, что число независимости графа H не больше $|V(G)|$, так как $V(H)$ покрывается $|V(G)|$ кликами. Если в H есть независимое множество I с $|I| = |V(G)|$, то для каждого $v \in V(G)$ существует единственное $c \in L(v)$ с $(v, c) \in I$. Кроме того, один и тот же цвет c не может быть выбран для любых двух смежных вершин. Другими словами, отображение $f : V(G) \to \mathbb{N}$, определяемое условием $(v, f(v)) \in I$, является L-раскраской графа G. С другой стороны, если G имеет L-раскраску f, то множество $\{(v, f(v)) : v \in V(G)\}$ является независимым множеством размера $|V(G)|$ в H.

По построению для всех различных v, $v' \in V(G)$ множество ребер графа H, соединяющих $\{(v, c) : c \in L(v)\}$ и $\{(v', c') : c' \in L(v')\}$, пусто, если $vv' \notin E(G)$, и образует паросочетание (возможно, пустое), если $vv' \in E(G)$. На основе этих свойств графа $H(G, L)$ Дворжак и Постл [9] ввели DP-раскраску. Сформулированные ниже определения слегка отличаются от приведенных в [9], но сохраняют изначальные суть и смысл.

Определение 2. *Накрытием* графа G называется пара (L, H), где L — предписание вершинам графа G попарно не пересекающихся множеств $L(v)$, а H — граф с множеством вершин $\bigcup_{v \in V(G)} L(v)$, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Для каждой вершины $v \in V(G)$ граф $H[L(v)]$ полный.
2. Для каждого ребра $uv \in E(G)$ множество ребер, соединяющих $L(u)$ и $L(v)$, образует паросочетание (возможно, пустое).
3. Для всех различных u, $v \in V(G)$ с $uv \notin E(G)$ никакие ребра графа H не соединяют $L(u)$ и $L(v)$.

Определение 3. Пусть G — граф и (L, H) является накрытием G. Тогда (L, H)-*раскраской* G называется независимое множество $I \subseteq V(H)$ размера $|V(G)|$. Мы будем называть вершины графа H *цветами*. Граф G называется (L, H)-*раскрашиваемым*, если он допускает (L, H)-раскраску.

Заметим, что если (L, H) является накрытием графа G, а I — его (L, H)-раскраской, то $|I \cap L(v)| = 1$ для всех $v \in V(G)$. На рис. 1 показан пример двух различных накрытий для $G \cong C_4$.

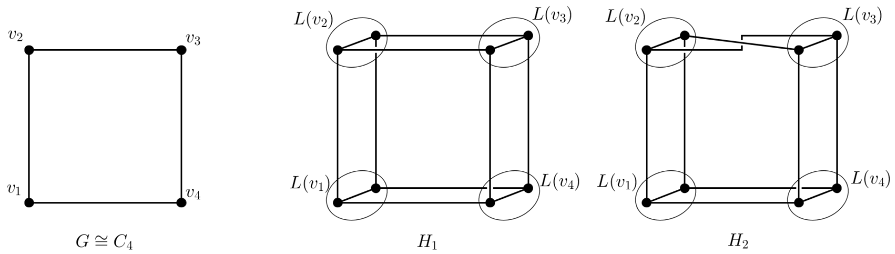

Рис. 1. Граф C_4 и два накрытия для него такие, что он (L, H_1)-раскрашиваем, но не (L, H_2)-раскрашиваем.

Определение 4. Пусть G — граф, и пусть $f : V(G) \to \mathbb{N}$ присваивает целые неотрицательные числа вершинам G. Граф G называется DP-f-*раскрашиваемым*, если он (L, H)-раскрашиваем всякий раз, когда (L, H) — накрытие G такое, что $|L(v)| \geq f(v)$ для всех $v \in V(G)$. Если G является DP-$\deg_G$-раскрашиваемым, то будем говорить, что G *имеет* DP-*степенную раскраску*.

Определение 5. DP-*хроматическое число* $\chi_{\mathrm{DP}}(G)$ есть минимальное k такое, что G является (L, H)-раскрашиваемым при любом выборе (L, H) с $|L(v)| \geq k$ для всех $v \in V(G)$.

Дворжак и Постл доказали [9], что $\chi_{\mathrm{DP}}(G) \leq k+1$ для любого k-вырожденного графа G и что теорема Брукса почти справедлива для DP-раскрасок, за исключением того, что в отличие от предписанной раскраски $\chi_{\mathrm{DP}}(C_n) = 3$ для любого, а не только нечетного, $n \geq 3$, где C_n обозначает цикл длины n. Тот факт, что $\chi_{\mathrm{DP}}(C_4) = 3$, является важным отличием DP-раскраски от предписанной раскраски, поскольку показывает, что идеи теоремы Алона — Тарси [10] и леммы Бонди — Боппана — Зигеля (см. [10]) для предписанной раскраски не распространяются на DP-раскраски. В [9] также отмечено, что доказательство теоремы Томассена о предписанной 5-раскрашиваемости плоских графов распространяется и на DP-раскраску. Бернштейн показал [11], что нижняя оценка DP-хроматического числа графа G с минимальной степенью δ значительно выше, чем оценка Алона [4] для предписанной раскраски, а именно $\chi_{\mathrm{DP}}(G) \geq \Omega(\delta/\ln\delta)$. С другой стороны, в [11] доказан аналог верхней оценки Йоханссона [12] хроматического числа графов без треугольников с заданной максимальной степенью.

Цель настоящей статьи заключается в расширении понятия DP-раскраски на мультиграфы и выводе некоторых простых свойств DP-раскрасок мультиграфов. Основным результатом является аналог теоремы 1: характеризация связных мультиграфов, которые не имеют DP-степенной раскраски. Этот результат дает также нижнюю оценку числа ребер в n-вершинных DP-критических графах (мы определим такие графы в разд. 2).

Структура статьи следующая. В разд. 2 определим DP-раскраску мультиграфов и связанные с нею понятия, рассмотрим некоторые примеры, сформулируем основной результат и одно следствие из него. Основной результат будет доказан в разд. 3. В разд. 4 кратко обсудим DP-критические (мульти)графы и докажем оценку числа ребер в них, вытекающую из основного результата. Для полноты в приложении приводится доказательство Галлаи [8] его леммы о количестве ребер в так называемых деревьях Галлаи (работа [8] опубликована на немецком языке).

2. Определения и основной результат

Чтобы определить DP-раскраску для мультиграфов, нужно только изменить определение 2, как показано ниже, и заменить слово *граф* словом *мультиграф* в определениях 3–5. Приведем новую версию определения 2.

Определение 6. *Накрытием* мультиграфа G называется пара (L, H), где L — предписание вершинам мультиграфа G попарно не пересекающихся множеств $L(v)$, а H — граф с множеством вершин $\bigcup\limits_{v \in V(G)} L(v)$, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Для каждой вершины $v \in V(G)$ граф $H[L(v)]$ полный.

2. Для каждого ребра $uv \in E(G)$ множество ребер, соединяющих $L(u)$ и $L(v)$, есть объединение $e_G(u, v)$ паросочетаний (возможно, пустых).

Для положительного целого числа k и мультиграфа G обозначим через G^k мультиграф, полученный из G заменой каждого ребра в G множеством из k параллельных ребер. В частности, $G^1 = G$ для каждого G. Следующие две леммы показывают два класса примеров мультиграфов, которые не имеют

DP-степенной раскраски. Первый из этих классов содержит мультиграфы, DP-хроматические числа которых больше числа вершин. В частности, для каждого $k \geq 2$ 2-вершинный мультиграф K_2^k имеет DP-хроматическое число $k+1$.

Лемма 7. *Мультиграф K_n^k не имеет DP-степенной раскраски.*

Доказательство. Пусть $G := K_n^k$. Для каждой $v \in V(G)$ положим

$$L(v) := \{(v, i, j) : i \in [n-1],\ j \in [k]\},$$

и пусть

$$(v_1, i_1, j_1)(v_2, i_2, j_2) \in E(H) \iff v_1 = v_2 \vee i_1 = i_2.$$

Тогда (L, H) является накрытием мультиграфа G и $|L(v)| = k(n-1) = \deg_G(v)$ для всех $v \in V(G)$. Утверждается, что G не является (L, H)-раскрашиваемым. В самом деле, если $I \subseteq V(H)$ таково, что $|I \cap L(v)| = 1$ для всех $v \in V$, то для некоторых различных $(v_1, i_1, j_1), (v_2, i_2, j_2) \in I$ имеем $i_1 = i_2$. Таким образом, I не является независимым множеством. □

Лемма 8. *Мультиграф C_n^k не имеет DP-степенной раскраски.*

Доказательство. Пусть $G := C_n^k$. Не ограничивая общности, предположим, что $V(G) = [n]$ и $e_G(u, v) = k$ тогда и только тогда, когда $|u - v| = 1$ или $\{u, v\} = \{1, n\}$. Для каждого $v \in [n]$ положим $L(v) := \{(v, i, j) : i \in [2],\ j \in [k]\}$, и пусть

$$\begin{aligned}(v_1, i_1, j_1)(v_2, i_2, j_2) \in E(H) :\iff v_1 = v_2 \vee (|v_1 - v_2| = 1 \wedge i_1 = i_2) \\ \vee (\{v_1, v_2\} = \{1, n\} \wedge i_1 = i_2 + 1 + n \pmod 2).\end{aligned}$$

Тогда (L, H) является накрытием мультиграфа G и $|L(v)| = 2k = \deg_G(v)$ для всех $v \in [n]$. Покажем, что G не (L, H)-раскрашиваем. Действительно, предположим, что $I \subset V(H)$ является (L, H)-раскраской G. Пусть $I = \{(v, i_v, j_v)\}_{v=1}^n$. Не ограничивая общности, предположим, что $i_1 = 1$. Тогда $i_v = v \pmod 2$ для каждого $v \in [n]$. Значит, $i_1 = i_n + 1 + n \pmod 2$, поэтому $(1, i_1, j_1)(n, i_n, j_n) \in E(H)$. Следовательно, I не является независимым. □

Наш основной результат показывает, что приведенные выше леммы описывают все 2-связные мультиграфы, которые не являются DP-степенно-раскрашиваемыми.

Теорема 9. *Если G — связный мультиграф, то он не DP-степенно-раскрашиваем тогда и только тогда, когда каждый блок G является одним из графов K_n^k, C_n^k для некоторых n и k.*

Результат позволяет оценить число ребер в DP-k-*критических* графах и мультиграфах, т. е. (мульти)графах G с $\chi_{\mathrm{DP}}(G) = k$ таких, что каждый правильно раскрашиваемый под(мульти)граф графа G имеет меньшее DP-хроматическое число. Легко показать (следует из приведенных выше лемм и леммы 12 из разд. 3), что K_n^k является DP-$(k(n-1)+1)$-критическим и C_n^k является DP-$(2k+1)$-критическим. Кроме того, из теоремы 9 легко следует, что

$$2|E(G)| \geq (k-1)n \text{ для всех } n\text{-вершинных DP-}k\text{-критических мультиграфов } G. \tag{1}$$

Примеры C_n^k показывают, что для каждого нечетного $k \geq 3$ существует бесконечно много 2-связных DP-k-критических мультиграфов G, для которых верно (1). Однако для обыкновенных графов из теоремы 9 вытекает более сильная оценка, чем (1), которая является аналогом оценки Галлаи [8] для обычной окраски (см. [7] для предписанной раскраски).

Следствие 10. *Пусть $k \geq 4$ и G является DP-k-критическим графом, отличным от K_k. Тогда*

$$2|E(G)| \geq \left(k - 1 + \frac{k-3}{k^2-3}\right)n. \tag{2}$$

Мы докажем теорему 9 в разд 3, а вывод следствия 10 приведем в разд. 4.

3. Доказательство теоремы 9

Докажем ряд лемм.

Лемма 11. *Если G — регулярный n-вершинный мультиграф, основой которого является простой цикл, то G не имеет DP-степенной раскраски тогда и только тогда, когда $G \cong C_n^k$ для некоторого k.*

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что $V(G) = [n]$ и $e_G(u,v)$ положительно тогда и только тогда, когда $|u-v| = 1$ или $\{u,v\} = \{1,n\}$. Предположим, что $G \not\cong C_n^k$. Из регулярности G следует, что n четно и для некоторых различных положительных r будет s, $e_G(v,v+1) = r$ при всех нечетных $v \in [n]$ и $e_G(1,n) = e_G(v,v+1) = s$ для всех четных $v \in [n-1]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $s > r$.

Пусть (L,H) — накрытие мультиграфа G такое, что $|L(v)| = \deg_G(v) = r + s$ для всех $v \in [n]$. Покажем, что G (L,H)-раскрашиваем. Назовем цвет $y \in L(v)$ *x-допустимым* для $x \in L(1)$, если существует такое независимое в $H - E_H(L(1),L(n))$ множество $I \subseteq V(H)$, что $|I \cap L(u)| = 1$ для всех $u \in [v]$ и $\{x,y\} \subseteq I$. Пусть $A_x(v) \subseteq L(v)$ обозначает множество всех x-допустимых цветов из $L(v)$. Очевидно, что $|A_x(2)| \geq s$ для каждого $x \in L(1)$ и $|A_x(3)| \geq r$. Предположим, что $|A_x(3)| > r$ для некоторого $x \in L(1)$. Тогда, поскольку каждый цвет в $L(4)$ имеет не более r соседей в $L(3)$, $A_x(4) = L(4)$. Аналогично $A_x(v) = L(v)$ для всех $v \geq 4$. В частности, $A_x(n) = L(n)$. Возьмем любое $y \in L(n) \setminus N_H(x)$. Так как $y \in A_x(n)$, существует такое независимое в $H - E_H(L(1),L(n))$ множество $I \subseteq V(H)$, что $|I \cap L(u)| = 1$ для всех $u \in [n]$ и $\{x,y\} \subseteq I$. Но тогда I независимо в H и, следовательно, является (L,H)-раскраской мультиграфа G. Таким образом, остался случай, когда $|A_x(3)| = r$ для всех $x \in L(v)$. Заметим, что

$$L(3) \setminus A_x(3) = L(3) \cap \bigcap_{y \in A_x(2)} N_H(y).$$

Следовательно, $L(3) \cap N_H(y)$ — это одно и то же множество размера s для всех $y \in A_x(2)$. Так как каждая вершина из $L(3)$ имеет не больше чем s соседей в $L(2)$, граф $H[A_x(2) \cup (L(3) \setminus A_x(3))]$ является полным $2s$-вершинным графом. Поскольку каждая вершина в $L(2)$ является x-допустимой для некоторого $x \in L(1)$, то $H[L(2) \cup L(3)]$ содержит объединение по крайней мере двух непересекающихся полных $2s$-вершинных графов. Таким образом, $|L(2) \cup L(3)| \geq 4s$. Но $|L(2)| = |L(3)| = r + s < 2s$; противоречие. □

Лемма 12. *Пусть G — связный мультиграф, а (L,H) — накрытие G такое, что $|L(v)| \geq \deg_G(v)$ для всех $v \in V(G)$ и $|L(v_0)| > \deg_G(v_0)$ для некоторой $v_0 \in V(G)$. Тогда G (L,H)-раскрашиваем.*

Доказательство. Если $|V(G)| = 1$, то утверждение очевидно. Предположим, что G — контрпример с наименьшим числом вершин. Рассмотрим мультиграф $G' := G - v_0$. Пусть $L'(v) := L(v)$ для каждого $v \in V(G')$, и пусть

$H' := H - L(v_0)$. По построению (L', H') является таким накрытием мультиграфа G', что $|L(v)| \geq \deg_{G'}(v)$ для всех $v \in V(G')$. Кроме того, поскольку G связен, каждая компонента связности в G' содержит вершины u, смежные в G с v_0, а значит, для них верно неравенство $\deg_{G'}(u) < \deg_G(u)$. Следовательно, в силу минимальности G мультиграф G' является (L', H')-раскрашиваемым. Пусть $I' \subseteq V(H')$ будет (L', H')-раскраской мультиграфа G'. Тогда $|N_G(I') \cap L(v_0)| \leq \deg_G(v_0)$, а значит, $L(v_0) \setminus N_G(I') \neq \varnothing$. Таким образом, I' может быть расширено до (L, H)-раскраски I мультиграфа G; противоречие. $\square$

Лемма 13. *Пусть G — связный мультиграф, а (L, H) — накрытие G. Предположим, что существуют такие вершина $v_1 \in V(G)$ и цвет $x_1 \in L(v_1)$, что $G - v_1$ связен и для некоторой вершины $v_2 \in V(G) \setminus \{v_1\}$ цвет x_1 имеет в $L(v_2)$ соседей меньше, чем $e_G(v_1, v_2)$. Тогда G (L, H)-раскрашиваем.*

Доказательство. Пусть $G' := G - v_1$. Для всех $v \in V(G')$ положим

$$L'(v) := L(v) \setminus N_H(x_1),$$

и пусть

$$H' := H - L(v_1) - N_H(x_1).$$

Тогда (L', H') является накрытием мультиграфа G'. Более того, для каждого $v \in V(G')$

$$|L'(v)| = |L(v)| - |L(v) \cap N_H(x_1)| \geq \deg_G(v) - e_G(v, v_1) = \deg_{G'}(v),$$

$$|L'(v_2)| = |L(v_2)| - |L(v_2) \cap N_H(x_1)| > \deg_G(v_2) - e_G(v_2, v_1) = \deg_{G'}(v_2).$$

В силу связности G' по лемме 12 получаем, что G' (L', H')-раскрашиваем. Но если $I' \subseteq V(H')$ — (L', H')-раскраска графа G', то $I' \cup \{x_1\}$ является (L, H)-раскраской графа G, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 14. *Предположим, что G — 2-связный мультиграф и (L, H) — его накрытие такое, что $|L(v)| \geq \deg_G(v)$ для всех $v \in V(G)$. Если G не (L, H)-раскрашиваем, то он регулярен и для всех пар смежных вершин $v_1, v_2 \in V(G)$ двудольные графы $H[L(v_1), L(v_2)]$ являются $e_G(v_1, v_2)$-регулярными графами.*

Доказательство. Рассмотрим любые две смежные вершины v_1, $v_2 \in V(G)$. По лемме 13 $H[L(v_1), L(v_2)]$ является $e_G(v_1, v_2)$-регулярным двудольным графом с долями $L(v_1)$, $L(v_2)$. Следовательно, $|L(v_1)| = |L(v_2)|$ и $\deg_G(v_1) = \deg_G(v_2)$, что и требовалось. Поскольку G связен и v_1, v_2 — произвольные смежные вершины в G, получаем, что G регулярный. $\square$

Лемма 15. *Пусть G — 2-связный мультиграф, а $u_1, u_2, w \in V(G)$ такие различные вершины, что $G - u_1 - u_2$ связен, $e_G(u_1, u_2) < e_G(u_1, w)$ и $e_G(u_2, w) \geq 1$. Тогда G DP-степенно-раскрашиваем.*

Доказательство. Пусть G не (L, H)-раскрашиваем для некоторого накрытия (L, H) с $|L(v)| = \deg_G(v)$ для всех $v \in V(G)$. Сначала покажем, что

$$\text{есть несмежные } x_1 \in L(u_1),\ x_2 \in L(u_2) \text{ с } N_H(x_1) \cap N_H(x_2) \cap L(w) \neq \varnothing. \tag{3}$$

Действительно, рассмотрим любое $x_2 \in L(u_2)$. В силу леммы 14

$$|L(w) \cap N_H(x_2)| = e_G(u_2, w) \geq 1.$$

Аналогично для каждого $y \in L(w) \cap N_H(x_2)$

$$|L(u_1) \cap N_H(y)| = e_G(u_1, w) > e_G(u_1, u_2) = |L(u_1) \cap N_H(x_2)|.$$

Таким образом, существует $x_1 \in (L(u_1) \cap N_H(y)) \setminus (L(u_1) \cap N_H(x_2))$. По построению x_1 и x_2 несмежны и $y \in N_H(x_1) \cap N_H(x_2) \cap L(w)$. Это доказывает (3).

Пусть x_1 и x_2 удовлетворяют условию (3) и $G' := G - u_1 - u_2$. Для всех $v \in V(G')$ положим

$$L'(v) := L(v) \setminus (N_H(x_1) \cup N_H(x_2)),$$

и пусть

$$H' := H - L(u_1) - L(u_2) - N_H(x_1) - N_H(x_2).$$

Тогда G' связен, а (L', H') является его накрытием, удовлетворяющим условиям леммы 12 с w в роли v_0. Значит, по лемме 12 G' (L', H')-раскрашиваем. Следовательно, G (L, H)-раскрашиваем; противоречие. $\square$

Лемма 16. *Пусть G является n-вершинным 2-связным мультиграфом и имеет вершину, смежную со всеми остальными вершинами. Тогда либо $G \cong K_n^k$ для некоторого k, либо G DP-степенно-раскрашиваем.*

Доказательство. Предположим, что G — n-вершинный мультиграф, который не DP-степенно-раскрашиваем, а вершина $w \in V(G)$ смежна со всеми остальными вершинами. Если какие-то различные $u_1, u_2 \in V(G) \setminus \{w\}$ несмежны, то тройка u_1, u_2, w удовлетворяет условиям леммы 15, а значит, G DP-степенно-раскрашиваем. Следовательно, любые две вершины мультиграфа G смежны. Остается показать, что любые две вершины G связаны одним и тем же числом ребер. Действительно, если $u_1, u_2, u_3 \in V(G)$ таковы, что $e_G(u_1, u_2) < e_G(u_1, u_3)$, то опять по лемме 15 G DP-степенно-раскрашиваем. $\square$

Лемма 17. *Если G — 2-связный n-вершинный мультиграф, в котором каждая вершина имеет не более двух соседей, то либо $G \cong C_n^k$ для некоторого k, либо G DP-степенно-раскрашиваем.*

Доказательство. Предположим, что G является 2-связным n-вершинным мультиграфом, в котором каждая вершина имеет не более двух соседей, но G не DP-степенно-раскрашиваем. Тогда основа мультиграфа G является циклом и по лемме 14 G регулярный, поэтому $G \cong C_n^k$ согласно лемме 11. $\square$

Лемма 18. *Если G — 2-связный n-вершинный мультиграф, не имеющий DP-степенной раскраски, то $G \cong K_n^k$ или C_n^k для некоторого k.*

Доказательство. В силу лемм 16 и 17 можем считать, что G содержит такую вершину u, что $3 \le |N_G(u)| \le n-2$. Так как G 2-связен, $G - u$ остается связным. Однако $G - u$ не 2-связный. Действительно, пусть v_1 — произвольная вершина в $V(G) \setminus (\{u\} \cup N_G(u))$, которая имеет общего с u соседа w. Из леммы 15 с u вместо v_2 получаем, что $G - v_1 - u$ несвязен. Поэтому v_1 является точкой сочленения в $G - u$.

Следовательно, $G - u$ содержит по крайней мере два висячих блока, скажем, B_1 и B_2. Для $i \in [2]$ пусть x_i будет точкой сочленения в $G - u$, содержащейся в B_i. Так как сам G 2-связен, u имеет соседа $v_i \in V(B_i) \setminus \{x_i\}$ для каждого $i \in [2]$. Тогда v_1 и v_2 не смежны и $G - u - v_1 - v_2$ связен. Поскольку u имеет по крайней мере трех соседей, то $G - v_1 - v_2$ также связен. Получаем противоречие с леммой 15, где u играет роль w. $\square$

Лемма 19. *Пусть $w \in V(G)$, $G = G_1 + G_2$ и $V(G_1) \cap V(G_2) = \{w\}$. Если G_1 и G_2 не DP-степенно-раскрашиваемы, то G не DP-степенно-раскрашиваем.*

Доказательство. Предположим, что G_1 не (L_1, H_1)-раскрашиваем и G_2 не (L_2, G_2)-раскрашиваем, при этом для каждого $i \in [2]$ (L_i, H_i) является таким накрытием мультиграфа G_i, что $|L(v)| = \deg_{G_i}(v)$ для всех $v \in V(G_i)$. Не ограничивая общности, предположим, что $L_1(v_1) \cap L_2(v_2) = \varnothing$ для всех $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$. Для всех $v \in V(G)$ положим

$$L(v) := \begin{cases} L_1(v), & \text{если } v \in V(G_1) \setminus \{w\}, \\ L_2(v), & \text{если } v \in V(G_2) \setminus \{w\}, \\ L_1(w) \cup L_2(w), & \text{если } v = w, \end{cases}$$

и пусть $H := H_1 + H_2 + K(L(w))$, где $K(L(w))$ обозначает полный граф с множеством вершин $L(w)$. Тогда (L, H) является накрытием мультиграфа G и для всех $v \in V(G)$ имеем $|L(v)| = \deg_G(v)$. Предположим, что G (L, H)-раскрашиваем и I является (L, H)-раскраской графа G. Без ограничения общности будем считать, что $I \cap L(w) \subseteq L_1(w)$. Тогда $I \cap V(H_1)$ является (L_1, H_1)-раскраской G_1; противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 9. Леммы 7, 8 и 19 показывают, что если каждый блок мультиграфа G изоморфен одному из мультиграфов K_n^k, C_n^k для некоторых n и k, то G не DP-степенно-раскрашиваем.

Теперь предположим, что G связен и не DP-степенно-раскрашиваем. Если G 2-связен, то доказательство вытекает из леммы 18. Таким образом, можем считать, что G имеет точку сочленения $w \in V(G)$. Пусть G_1 и G_2 такие нетривиальные связные подграфы G, что $G = G_1 + G_2$ и $V(G_1) \cap V(G_2) = \{w\}$. Остается показать, что ни G_1, ни G_2 не DP-степенно-раскрашиваемы, так как утверждение теоремы сразу следует из этого по индукции. Предположим, что G_1 DP-степенно-раскрашиваем. Пусть (L, H) такое накрытие мультиграфа G, что $|L(v)| = \deg_G(v)$ для всех $v \in V(G)$. Применяя лемму 12 к связным компонентам в $G_2 - w$, получаем, что существует такое независимое множество $I_2 \subseteq \bigcup\limits_{v \in V(G_2) \setminus \{w\}} L(v)$, что $|L(v) \cap I_2| = 1$ для всех $v \in V(G_2) \setminus \{w\}$. Для любого $v \in V(G_1)$ пусть

$$L_1(v) := L(v) \setminus N_H(I_2).$$

(Заметим, что $L_1(v) = L(v)$ для всех $v \in V(G_1) \setminus \{w\}$.) Кроме того, положим

$$H_1 := H\Big[\bigcup_{v \in V(G_1)} L_1(v)\Big].$$

Тогда (L_1, H_1) является накрытием мультиграфа G_1. Для любого $v \in V(G_1) \setminus \{w\}$ будет

$$|L_1(v)| = |L(v)| = \deg_G(v) = \deg_{G_1}(v),$$

и для w имеем

$$|L_1(w)| = |L(v)| - |N_H(I_2) \cap L(w)| \geq \deg_G(w) - \deg_{G_2}(w) = \deg_{G_1}(w).$$

Поскольку G_1 DP-степенно-раскрашиваем, он, в частности, (L_1, H_1)-раскрашиваем. Но если I_1 — это (L_1, H_1)-раскраска G_1, то $I_1 \cup I_2$ — (L, H)-раскраска G. $\square$

4. DP-критические графы

Галлаи [8] доказал оценку (2) для обыкновенных k-критических n-вершинных графов, используя верхнюю оценку числа ребер в *деревьях Галлаи* — связных графах, в которых каждый блок представляет собой полный граф или нечетный цикл. Нам понадобится такое же утверждение для GDP-*деревьев* — связных графов, в которых каждый блок представляет собой полный граф или цикл (не обязательно нечетный).

Лемма 20. *Если $k \ge 4$ и T — n-вершинное GDP-дерево с максимальной степенью $\Delta(T) \le k-1$, не содержащее K_k, то*

$$2|E(T)| \le \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n. \tag{4}$$

Доказательство такое же, как у Галлаи. Для полноты приводим доказательство в приложении, так как работа Галлаи на немецком языке. Ниже приведем остаток доказательства следствия 10. Оно основано на идеях Галлаи, но короче, поскольку использует метод перераспределения зарядов.

Пусть G — n-вершинный DP-k-критический граф, отличный от K_k. По лемме 12 минимальная степень графа G не меньше $k-1$. Исходный заряд каждой вершины $v \in V(G)$ положим равным $\mathrm{ch}(v) := \deg_G(v)$. Единственное правило перераспределения заключается в следующем.

(R1) Каждая вершина $v \in V(G)$ с $\deg_G(v) \ge k$ посылает каждому соседу заряд $(k-1)/(k^2-3)$.

Обозначим новый заряд каждой вершины v через $\mathrm{ch}^*(v)$. Покажем, что

$$\sum_{v\in V(G)} \mathrm{ch}^*(v) \ge \left(k-1+\frac{k-3}{k^2-3}\right)n. \tag{5}$$

Действительно, если $\deg_G(v) \ge k$, то

$$\mathrm{ch}^*(v) \ge \deg_G(v) - \frac{k-1}{k^2-3}\cdot \deg_G(v) \ge k\left(1-\frac{k-1}{k^2-3}\right) = k-1+\frac{k-3}{k^2-3}. \tag{6}$$

Кроме того, если T является компонентой подграфа G', индуцированного вершинами степени $k-1$, то

$$\sum_{v\in V(T)} \mathrm{ch}^*(v) \ge (k-1)|V(T)| + \frac{k-1}{k^2-3}|E_G(V(T), V(G)\setminus V(T)|.$$

Поскольку T является GDP-деревом и не содержит K_k, по лемме 20

$$|E(V(T), V(G)\setminus V(T)| \ge (k-1)|V(T)| - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)|V(T)| = \frac{k-3}{k-1}|V(T)|.$$

Таким образом, для каждой компоненты T графа G' имеем

$$\sum_{v\in V(T)} \mathrm{ch}^*(v) \ge (k-1)|V(T)| + \frac{k-1}{k^2-3}\cdot\frac{k-3}{k-1}\cdot|V(T)| = \left(k-1+\frac{k-3}{k^2-3}\right)|V(T)|.$$

С учетом (6) отсюда следует (5).

5. Приложение

Повторим доказательство Галлаи леммы 20 индукцией по числу блоков. Если T — блок, то, поскольку $T \not\cong K_k$ и $k \ge 4$, имеем оценку $\Delta(T) \le k-2$, которая сильнее, чем (4).

Предположим, что (4) имеет место для всех GDP-деревьев с не более чем s блоками и T представляет собой GDP-дерево с $s+1$ блоком. Пусть B — висячий блок T и x — точка сочленения в $V(B)$. Пусть $D := \Delta(B)$.

Случай 1: $D \le k-3$. Пусть $T' := T - (V(B)\setminus\{x\})$. Тогда T' является GDP-деревом с s блоками. Значит, $2|E(T)| = 2|E(T')| + D|V(B)|$, и по индукции

$2|E(T')| \leq \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)(n-|V(B)|+1)$. Если $B = K_r$, то $r = D+1 \leq k-2$. Стало быть, в этом случае

$$\begin{aligned}
&2|E(T)| - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n \\
&\quad \leq \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)(n-D) + D(D+1) - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n \\
&\quad = D\left(-k+2-\frac{2}{k-1}+D+1\right) \leq -D\frac{2}{k-1} < 0,
\end{aligned}$$

как и утверждалось. Аналогично если $B = C_t$, то $k \geq 5$ и

$$\begin{aligned}
&2|E(T)| - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n \\
&\quad \leq \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)(n-t+1) + 2t - n\left(k-2+\frac{2}{k-1}\right) \\
&\quad = (t-1)\left(-k+2-\frac{2}{k-1}+2\right) + 2 < 2\left(-k+4\right) + 2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Случай 2: $D = k-2$. Так как $\Delta(T) \leq k-1$, только один блок B' помимо B может содержать x и этот блок B' изоморфен K_2. Пусть $T'' = T - V(B)$. Тогда T'' является GDP-деревом с $s-1$ блоком. Имеем $2|E(T)| = 2|E(T'')| + D|V(B)| + 2$, и по индукции $2|(T'')| \leq \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)(n-|V(B)|)$. Следовательно, поскольку $|V(B)| \geq D+1 = k-1$, получаем

$$\begin{aligned}
&2|E(T)| - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n \\
&\quad \leq \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)(n-|V(B)|) + (k-2)|V(B)| + 2 - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n \\
&\quad = |V(B)|\left(-k+2-\frac{2}{k-1}+k-2\right) + 2 \leq -\frac{2}{k-1}|V(B)| + 2 \leq 0,
\end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Благодарность. Авторы признательны рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Визинг В. Г., Плесневич Г. С.* К проблеме минимальной окраски вершин графа // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6, № 1. С. 234–236.
2. *Визинг В. Г.* Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. 1976. Т. 29. С. 3–10.
3. *Erdős P., Rubin A. L., Taylor H.* Choosability in graphs // Proc. West Coast Conf. combinatorics, graph theory and computing (Humboldt State Univ., Arcata, CA, 1979) / Congr. Numer. 1980. V. 26. P. 125–157.
4. *Alon N.* Degrees and choice numbers // Random Struct. Algorithms. 2000. V. 16. P. 364–368.
5. *Бородин О. В.* Критерий хроматичности степенного предписания // Тр. IV Всесоюз. конф. по теоретической кибернетике. Новосибирск, 1977. С. 127–128.
6. *Бородин О. В.* Задачи раскраски и покрытия вершин графов индуцированными подграфами: дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Новосиб. гос. университет, 1979.
7. *Kostochka A. V., Stiebitz M., Wirth B.* The colour theorems of Brooks and Gallai extended // Discrete Math. 1996. V. 162. P. 299–303.
8. *Gallai T.* Kritische Graphen. I // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1963. V. 8. P. 165–192.

9. *Dvořák Z., Postle L.* List-coloring embedded graphs without cycles of lengths 4 to 8 // http://arxiv.org/abs/1508.03437.
10. *Alon N., Tarsi M.* Colorings and orientations of graphs // Combinatorica. 1992. V. 12. P. 125–134.
11. *Bernshteyn A.* The asymptotic behavior of the correspondence chromatic number // http://arxiv.org/abs/1602.00347.
12. *Johansson A.* Asymptotic choice number for triangle-free graphs. Technical Report 91–95, DIMACS, 1996.
13. *Borodin O. V.* Colorings of plane graphs: A survey // Discrete Math. 2013. V. 313. P. 517–539.
14. *Gallai T.* Kritische Graphen. II // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1963. V. 8. P. 373–395.

Статья поступила 21 марта 2016 г.

Бернштейн Антон Юрьевич
Университет штата Иллинойс, кафедра математики,
Урбана, США
bernsht2@illinois.edu

Косточка Александр Васильевич
Университет штата Иллинойс, кафедра математики,
Урбана, США;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sasha@math.nsc.ru

Пронь Сергей Петрович
Алтайский гос. университет,
факультет математики и информационных технологий,
пр. Ленина, 61, Барнаул 656002
pspron@mail.ru