Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 512.554

БАЗИСЫ ГРЕБНЕРА — ШИРШОВА НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР ЛИ

Ю. Чен, Ю. Ли, К. Танг

Аннотация. Найдены базисы Гребнера — Ширшова для алгебры Ли Дринфельда — Коно $\mathbf{L}_n$ из [1] и алгебры Ли A_P, построенной Кукиным в [2], где P — полугруппа. В качестве следствия показано, что $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbf{L}_n$ свободен, и найден $\mathbb{Z}$-базис в $\mathbf{L}_n$. Дано другое доказательство теоремы Кукина: *если полугруппа P имеет неразрешимую проблему слов, то алгебра Ли A_P обладает тем же свойством.*

DOI 10.17377/smzh.2017.58.122

Ключевые слова: базис Гребнера — Ширшова, алгебра Ли, алгебра Ли Дринфельда — Коно, проблема слов, полугруппа.

1. Введение

Базисы Гребнера и базисы Гребнера — Ширшова независимо ввели: А. И. Ширшов — для идеалов свободных (коммутативных, антикоммутативных) неассоциативных алгебр [3, 4], свободных алгебр Ли [4, 5] и относительно свободных ассоциативных алгебр [4, 5] (см. также [6, 7]); Хиронака [8] — для идеалов алгебр степенных рядов (и формальных, и сходящихся) и Бухбергер [9] — для идеалов алгебр многочленов.

Теория базисов Гребнера и Гребнера — Ширшова оказалась очень полезной в различных областях математики, включая коммутативную и комбинаторную алгебру (см., например, книги [10–15], статьи [6, 7, 9, 16–26] и обзоры [27–31]).

А. А. Марков [32], Пост [33], Тьюринг [34], П. С. Новиков [35] и Бун [36] построили конечно представимые полугруппы и группы с неразрешимой проблемой слов. Этот результат также следует из теоремы Хигмана [37] о том, что любая рекурсивно представимая группа вложима в конечно представимую группу. Ослабленный аналог теоремы Хигмана для алгебр Ли доказан в [16], где было показано, что существует конечно представимая алгебра Ли с неразрешимой проблемой слов.

Г. П. Кукин в [2] построил алгебру Ли A_P для полугруппы P такую, что если P имеет неразрешимую проблему слов, то это же справедливо для A_P. В настоящей статье мы находим базис Гребнера — Ширшова для A_P и даем другое доказательство результата Г. П. Кукина.

Поддержано фондом NNSF Китая (11171118, 11571121). Второй автор поддержан фондом NNSF (11401246, 11426112, 11501237), фондом NSF провинции Гуандонг (2014A030310087; 2016A030310099), фондом выдающихся молодых учителей высшего образования провинции Гуандонг (YQ2015155) и исследовательским фондом докторской программы университета Уйжоу (Huizhou University) (C513.0210; C513.0209).

Алгебра Ли Дринфельда — Коно $\mathbf{L}_n$ возникла в [38, 39] как алгебра Ли голономий дополнения к объединению диагоналей $z_i = z_j$, $i < j$. Универсальная связность Книжника — Замолодчикова имеет значения в этой алгебре Ли. В данной статье мы находим базис Гребнера — Ширшова для алгебры Ли Дринфельда — Коно $\mathbf{L}_n$ над $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}$-базис $\mathbf{L}_n$. Как следствие получаем простое доказательство того факта, что $\mathbf{L}_n$ является итерированным полупрямым произведением свободных алгебр Ли.

Мы очень благодарны профессору Л. А. Бокутю за его руководство и полезные обсуждения результатов статьи.

2. Бриллиантовая лемма о композиции для алгебр Ли над полем

Ради полноты изложения формулируем в данном разделе бриллиантовую лемму о композиции (composition-diamond lemma) для алгебр Ли над полем (см. подробнее в [4, 40, 41]).

Пусть k — поле, I — вполне упорядоченное множество индексов, $X = \{x_i \mid i \in I\}$ — множество, X^* — свободный моноид, порожденный X, и $\mathrm{Lie}(X)$ — свободная алгебра Ли над k, порожденная X.

Упорядочим $X = \{x_i \mid i \in I\}$ правилом: $x_i > x_t$ при $i > t$ для любых $i, t \in I$.

Будем использовать два линейных порядка на X^* (для любых $u, v \in X^*$):

(i) (lex-порядок) $1 \succ t$, если $t \neq 1$, и по индукции если $u = x_i u_i$ и $v = x_j v_j$, то $u \succ v$ тогда и только тогда, когда $x_i > x_j$ или $x_i = x_j$ и $u_i \succ v_j$;

(ii) (deg-lex-порядок) $u > v$ тогда и только тогда, когда $\deg(u) > \deg(v)$ или $\deg(u) = \deg(v)$ и $u \succ v$, где $\deg(u)$ — длина u.

Будем рассматривать $\mathrm{Lie}(X)$ как алгебру Ли на свободной ассоциативной алгебре $k\langle X\rangle$, порожденную множеством X относительно лиевой скобки $[u, v] = uv - vu$. Если $f \in k\langle X\rangle$, то через $\bar{f}$ обозначим старшее слово f относительно deg-lex-порядка. Элемент f *унитарен*, если коэффициент при $\bar{f}$ равен 1.

Определение 2.1. Ассоциативное слово $w \in X^* \setminus \{1\}$ называется *ассоциативным словом Линдона — Ширшова* (ALSW для краткости), если

$$(\forall u, v \in X^*,\ u, v \neq 1)\ w = uv \Rightarrow w > vu.$$

Неассоциативное слово (u) от X называется *неассоциативным словом Линдона — Ширшова* (NLSW для краткости), обозначаемым $[u]$, если

(i) u является ALSW;

(ii) если $[u] = [(u_1)(u_2)]$, то (u_1) и (u_2) являются NLSW-словами;

(iii) если $[u] = [[[u_{11}][u_{12}]][u_2]]$, то $u_{12} \preceq u_2$.

Обозначим множества всех ALSW- и NLSW-слов от X через $\mathrm{ALSW}(X)$ и $\mathrm{NLSW}(X)$ соответственно.

Для ALSW-слова w существует единственная расстановка скобок $[w]$ такая, что $[w]$ является NLSW-словом: $[w] = [[u][v]]$, если $\deg(w) > 1$, где v — наибольшее собственное ассоциативное подслово Линдона — Ширшова в w.

Лемма Ширшова. *Предположим, что $w = aub$, где $w, u \in \mathrm{ALSW}(X)$. Тогда*

(i) $[w] = [a[uc]d]$, *где $b = cd$ и допустимо равенство $c = 1$;*

(ii) *представив c в виде $c = c_1c_2\ldots c_n$, где $c_1, \ldots, c_n \in \mathrm{ALSW}(X)$ и $c_1 \preceq c_2 \preceq \cdots \preceq c_n$, и заменяя $[uc]$ на $[\ldots[[u][c_1]]\ldots[c_n]]$, получим слово*

$$[w]_u = [a[\ldots[[[u][c_1]][c_2]]\ldots[c_n]]d],$$

которое называется специальной расстановкой скобок Ширшова слова w относительно u;

(iii) $\overline{[w]_u} = w$.

Определение 2.2. Пусть $S \subset \mathrm{Lie}(X)$, где каждый $s \in S$ унитарен, $a, b \in X^*$ и $s \in S$. Если $a\bar{s}b$ — ALSW-слово, то называем $[asb]_{\bar{s}} = [a\bar{s}b]_{\bar{s}}|_{[\bar{s}]\mapsto s}$ *специальным нормальным S-словом*, если $[a\bar{s}b]_{\bar{s}}$ определено, как в лемме Ширшова. S-слово (asb) называется *нормальным S-словом*, если $\overline{(asb)} = a\bar{s}b$.

Предположим, что $f, g \in S$. Тогда есть два типа композиций.

(i) Если $w = \bar{f} = a\bar{g}b$ для некоторых $a, b \in X^*$, то многочлен $(f, g)_w = f - [agb]_{\bar{g}}$ называется *композицией включения* f и g относительно w.

(ii) Если слово w таково, что $w = \bar{f}b = a\bar{g}$ при некоторых $a, b \in X^*$ и $\deg(\bar{f}) + \deg(\bar{g}) > \deg(w)$, то многочлен $(f, g)_w = [fb]_{\bar{f}} - [ag]_{\bar{g}}$ называется *композицией пересечения* f и g относительно w.

Слово w из (i) и (ii) называется *неоднозначностью.*

Пусть h — лиев многочлен и $w \in X^*$. Будем говорить, что h *тривиален по модулю* (S, w) (обозначение: $h \equiv_{\mathrm{Lie}} 0 \mod (S, w)$), если $h = \sum\limits_i \alpha_i(a_i s_i b_i)$, где каждое $(a_i s_i b_i)$ является нормальным S-словом и $a_i \bar{s}_i b_i < w$.

Множество S называется *базисом Гребнера — Ширшова* в $\mathrm{Lie}(X)$, если любая композиция в S тривиальна по модулю S и соответствующего w.

Теорема 2.3 (бриллиантовая лемма о композиции для алгебр Ли над полем). *Пусть $S \subset \mathrm{Lie}(X) \subset k\langle X\rangle$ — непустое множество унитарных лиевых многочленов, а $\mathrm{Id}(S)$ — идеал в $\mathrm{Lie}(X)$, порожденный S. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *S — базис Гребнера — Ширшова в* $\mathrm{Lie}(X)$.

(ii) $f \in \mathrm{Id}(S) \Rightarrow \bar{f} = a\bar{s}b$ *для некоторых $s \in S$ и $a, b \in X^*$.*

(iii) $\mathrm{Irr}(S) = \{[u] \in \mathrm{NLSW}(X) \mid u \neq a\bar{s}b,\ s \in S,\ a, b \in X^*\}$ *— линейный базис в* $\mathrm{Lie}(X|S) = \mathrm{Lie}(X)/\,\mathrm{Id}(S)$.

Замечание. Бриллиантовая лемма о композиции также остается справедливой, если мы заменим основное поле k произвольным коммутативным кольцом с единицей. В этом случае $\mathrm{Lie}(X|S)$ является свободным K-модулем с базисом $\mathrm{Irr}(S)$.

3. Конструкция Кукина алгебры Ли с неразрешимой проблемой слов

Пусть $P = \mathrm{sgp}\langle x, y \mid u_i = v_i,\ i \in I\rangle$ — полугруппа. Рассмотрим алгебру Ли

$$A_P = \mathrm{Lie}(x, \hat{x}, y, \hat{y}, z|S),$$

где S состоит из следующих соотношений:

(1) $[\hat{x}x] = 0$, $[\hat{x}y] = 0$, $[\hat{y}x] = 0$, $[\hat{y}y] = 0$,

(2) $[\hat{x}z] = -[zx]$, $[\hat{y}z] = -[zy]$,

(3) $\lfloor zu_i \rfloor = \lfloor zv_i \rfloor$, $i \in I$.

Здесь $\lfloor zu \rfloor$ означает левонормированную расстановку скобок.

В данном разделе строим базис Гребнера — Ширшова для алгебры Ли A_P и, используя данный результат, даем другое доказательство теоремы Кукина (см. следствие 3.2).

Пусть $\hat{x} > \hat{y} > z > x > y$, отношение $>$ является deg-lex-порядком на $\{\hat{x}, \hat{y}, x, y, z\}^*$ и ρ — конгруэнция на $\{x, y\}^*$, порожденная $\{(u_i, v_i),\ i \in I\}$. Пусть

(3)$'$ $\lfloor zu \rfloor = \lfloor zv \rfloor$, $(u, v) \in \rho$ при $u > v$.

Теорема 3.1. *Во введенных выше обозначениях множество* $S_1 = \{(1), (2), (3)'\}$ *является базисом Гребнера — Ширшова в* $\mathrm{Lie}(\hat{x}, \hat{y}, x, y, z)$.

Доказательство. Для любого $u \in \{x, y\}^*$ имеем $\overline{\lfloor zu \rfloor} = zu$ индукцией по $|u|$. Все возможные композиции в S_1 являются пересечениями (2), $(3)'$ и включениями $(3)'$, $(3)'$.

При $(2) \wedge (3)'$, $w = \hat{x}zu$, $(u, v) \in \rho$, $u > v$, $f = [\hat{x}z] + [zx]$, $g = \lfloor zu \rfloor - \lfloor zv \rfloor$. Имеем

$$\begin{aligned}([\hat{x}z] + [zx], \lfloor zu \rfloor - \lfloor zv \rfloor)_w &= [fu]_{\bar{f}} - [\hat{x}g]_{\bar{g}} \\ &\equiv \lfloor ([\hat{x}z] + [zx])u \rfloor - [\hat{x}(\lfloor zu \rfloor - \lfloor zv \rfloor)] \\ &\equiv \lfloor zxu \rfloor + \lfloor \hat{x}zv \rfloor \equiv \lfloor zxu \rfloor - \lfloor zxv \rfloor \equiv 0 \mod (S_1, w).\end{aligned}$$

При $(3)' \wedge (3)'$ имеем $w = zu_1 = zu_2e$, $e \in \{x, y\}^*$, $(u_i, v_i) \in \rho$, $u_i > v_i$, $i = 1, 2$. Справедливо

$$\begin{aligned}(\lfloor zu_1 \rfloor - \lfloor zv_1 \rfloor, \lfloor zu_2 \rfloor - \lfloor zv_2 \rfloor)_w &\equiv (\lfloor zu_1 \rfloor - \lfloor zv_1 \rfloor) - \lfloor (\lfloor zu_2 \rfloor - \lfloor zv_2 \rfloor)e \rfloor \\ &\equiv \lfloor \lfloor zv_2 \rfloor e \rfloor - \lfloor zv_1 \rfloor \equiv \lfloor zv_2e \rfloor - \lfloor zv_1 \rfloor \equiv 0 \mod (S_1, w),\end{aligned}$$

значит, $S_1 = \{(1), (2), (3)'\}$ — базис Гребнера — Ширшова в $\mathrm{Lie}(\hat{x}, \hat{y}, x, y, z)$. $\square$

Следствие 3.2 (Г. П. Кукин [2]). *Пусть* $u, v \in \{x, y\}^*$. *Тогда*

$$u = v \text{ в полугруппе } P \Leftrightarrow \lfloor zu \rfloor = \lfloor zv \rfloor \text{ в алгебре Ли } A_P.$$

Доказательство. Предположим, что $u = v$ в полугруппе P. Без ограничения общности можно считать, что $u = au_1b$ и $v = av_1b$ для некоторых $a, b \in \{x, y\}^*$ и $(u_1, v_1) \in \rho$. Для любого $r \in \{x, y\}$, применяя (1), имеем $[\hat{x}r] = 0$, а потому $\lfloor zxc \rfloor = \lfloor [z\hat{x}]c \rfloor = [\lfloor zc \rfloor \hat{x}]$, $\lfloor zyc \rfloor = [\lfloor zc \rfloor \hat{y}]$ для любого $c \in \{x, y\}^*$. Отсюда следует, что в A_P справедливо $\lfloor zu \rfloor = \lfloor zau_1b \rfloor = \lfloor \lfloor zau_1 \rfloor b \rfloor = \lfloor \lfloor zu_1 \widehat{\overleftarrow{a}} \rfloor b \rfloor = \lfloor zu_1 \widehat{\overleftarrow{a}}\, b \rfloor = \lfloor zv_1 \widehat{\overleftarrow{a}}\, b \rfloor = \lfloor zav_1b \rfloor = \lfloor zv \rfloor$, где $\overleftarrow{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}} = x_{i_n} x_{i_{n-1}} \ldots x_{i_1}$ и $\widehat{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}} = \widehat{x_{i_1}}\widehat{x_{i_2}} \ldots \widehat{x_{i_n}}$, $x_{i_j} \in \{x, y\}$. Более того, $(3)'$ выполняется в A_P.

Предположим, что $\lfloor zu \rfloor = \lfloor zv \rfloor$ в алгебре Ли A_P. Тогда $\lfloor zu \rfloor$ и $\lfloor zv \rfloor$ имеют одну и ту же нормальную форму в A_P. Так как S_1 — базис Гребнера — Ширшова в A_P по теореме 3.1, то $\lfloor zu \rfloor$ и $\lfloor zv \rfloor$ могут быть приведены к одной и той же нормальной форме вида $\lfloor zc \rfloor$ для некоторого $c \in \{x, y\}^*$ с учетом только соотношения $(3)'$. Это означает, что $u = c = v$ в P. $\square$

По следствию 3.2 если полугруппа P имеет неразрешимую проблему слов, то это же справедливо для алгебры Ли A_P.

4. Базис Гребнера — Ширшова для алгебры Ли Дринфельда — Коно $\mathbf{L}_n$

В данном разделе находим базис Гребнера — Ширшова для алгебры Ли Дринфельда — Коно $\mathbf{L}_n$.

Определение 4.1 [1]. Пусть $n > 2$ — целое число. Алгебра Ли Дринфельда — Коно $\mathbf{L}_n$ над $\mathbb{Z}$ определяется порождающими $t_{ij} = t_{ji}$ для различных индексов $1 \le i, j \le n - 1$ и соотношениями

$$t_{ij}t_{kl} = 0, \quad t_{ij}(t_{ik} + t_{jk}) = 0,$$

где i, j, k, l различны.

Очевидно, что $\mathbf{L}_n$ имеет представление $\mathrm{Lie}_{\mathbb{Z}}(T|S)$, где $T = \{t_{ij} \mid 1 \le i < j \le n-1\}$ и S состоит из следующих соотношений

$$t_{ij}t_{kl} = 0, \quad k < i < j,\ k < l,\ l \neq\ i, j, \tag{1}$$

$$t_{jk}t_{ij} + t_{ik}t_{ij} = 0, \quad i < j < k, \tag{2}$$

$$t_{jk}t_{ik} - t_{ik}t_{ij} = 0, \quad i < j < k. \tag{3}$$

Упорядочим T: $t_{ij} < t_{kl}$, если либо $i < k$, либо $i = k$ и $j < l$. Пусть $<$ является deg-lex-порядком на T^*.

Теорема 4.2. *Пусть $S = \{(1), (2), (3)\}$, как и выше, $<$ обозначает deg-lex-порядок на T^*. Тогда S — базис Гребнера — Ширшова для $\mathbf{L}_n$.*

Доказательство. Перечислим все возможные неоднозначности. Обозначим через $(i) \wedge (j)$ композицию типа (i) и типа (j).

При $(1) \wedge (n)$, $1 \le n \le 3$, есть следующие неоднозначности для w:
$(1) \wedge (1)$ $\quad t_{ij}t_{kl}t_{mr}$ $\quad (k < i < j,\ k < l,\ l \neq i, j,\ m < k < l,\ m < r,\ r \neq k, l)$,
$(1) \wedge (2)$ $\quad t_{ij}t_{kl}t_{mk}$ $\quad (k < i < j,\ k < l,\ l \neq i, j,\ m < k < l)$,
$(1) \wedge (3)$ $\quad t_{ij}t_{kl}t_{ml}$ $\quad (k < i < j,\ k < l,\ l \neq i, j,\ m < k < l)$.
Для $(2) \wedge (n)$, $1 \le n \le 3$, возможны следующие неоднозначности для w:
$(2) \wedge (1)$ $\quad t_{jk}t_{ij}t_{mr}$ $\quad (m < i < j < k,\ m < r,\ r \neq i, j)$,
$(2) \wedge (2)$ $\quad t_{jk}t_{ij}t_{mi}$ $\quad (m < i < j < k)$,
$(2) \wedge (3)$ $\quad t_{jk}t_{ij}t_{mj}$ $\quad (m < i < j < k)$.
В случае $(3) \wedge (n)$, $1 \le n \le 3$, имеются следующие неоднозначности для w:
$(3) \wedge (1)$ $\quad t_{jk}t_{ik}t_{mr}$ $\quad (m < i < j < k,\ m < r,\ r \neq i, k)$,
$(3) \wedge (2)$ $\quad t_{jk}t_{ik}t_{mi}$ $\quad (m < i < j < k)$,
$(3) \wedge (3)$ $\quad t_{jk}t_{ik}t_{mk}$ $\quad (m < i < j < k)$.
Утверждается, что все композиции тривиальны относительно S.

Рассмотрим только случаи $(1) \wedge (1)$, $(1) \wedge (2)$, $(2) \wedge (1)$ и $(2) \wedge (2)$, остальные рассматриваются аналогично.

В случае $(1) \wedge (1)$ пусть $f = t_{ij}t_{kl}$, $g = t_{kl}t_{mr}$, $k < i < j$, $k < l$, $l \neq i, j$, $m < k < l$, $m < r$, $r \neq k, l$. Тогда $w = t_{ij}t_{kl}t_{mr}$ и

$$(f, g)_w = (t_{ij}t_{kl})t_{mr} - t_{ij}(t_{kl}t_{mr}) = (t_{ij}t_{mr})t_{kl} \mod (S, w).$$

Возможны три подслучая: $r \neq\ i, j$, $r = i$, $r = j$.

Подслучай 1. Если $r \neq i, j$, то

$$(t_{ij}t_{mr})t_{kl} \equiv 0 \mod (S, w).$$

Подслучай 2. Если $r = i$, то

$$(t_{ij}t_{mr})t_{kl} = (t_{ij}t_{mi})t_{kl} \equiv t_{kl}(t_{mj}t_{mi}) \equiv (t_{kl}t_{mj})t_{mi} + t_{mj}(t_{kl}t_{mi}) \equiv 0 \mod (S, w).$$

Подслучай 3. Если $r = j$, то

$$\begin{aligned}(t_{ij}t_{mr})t_{kl} = (t_{ij}t_{mj})t_{kl} &\equiv -t_{kl}(t_{mj}t_{mi}) \\ &\equiv -(t_{kl}t_{mj})t_{mi} - t_{mj}(t_{kl}t_{mi}) \equiv 0 \mod (S, w).\end{aligned}$$

В случае $(1) \wedge (2)$ пусть $f = t_{ij}t_{kl}$, $g = t_{kl}t_{mk} + t_{ml}t_{mk}$, $k < i < j$, $k < l$, $l \neq i, j$, $m < k < l$. Тогда $w = t_{ij}t_{kl}t_{mk}$ и

$$\begin{aligned}(f, g)_w = (t_{ij}t_{kl})t_{mk} - t_{ij}(t_{kl}t_{mk} + t_{ml}t_{mk}) &= (t_{ij}t_{mk})t_{kl} - t_{ij}(t_{ml}t_{mk}) \\ &\equiv -t_{ij}(t_{ml}t_{mk}) \equiv -(t_{ij}t_{ml})t_{mk} - t_{ml}(t_{ij}t_{mk}) \equiv 0 \mod (S, w).\end{aligned}$$

В случае (2) $\wedge$ (1) пусть $f = t_{jk}t_{ij} + t_{ik}t_{ij}$, $g = t_{ij}t_{mr}$, $m < i < j < k$, $m < r$, $r \neq i, j$. Тогда $w = t_{jk}t_{ij}t_{mr}$ и

$$(f, g)_w = (t_{jk}t_{ij} + t_{ik}t_{ij})t_{mr} - t_{jk}(t_{ij}t_{mr}) \equiv (t_{jk}t_{mr})t_{ij} + (t_{ik}t_{mr})t_{ij} \mod (S, w).$$

Возможны два подслучая: $r \neq k$, $r = k$.

Подслучай 1. Если $r \neq k$, то

$$(t_{jk}t_{mr})t_{ij} + (t_{ik}t_{mr})t_{ij} \equiv 0 \mod (S, w).$$

Подслучай 2. Если $r = k$, то

$$\begin{aligned}(t_{jk}t_{mr})t_{ij} + (t_{ik}t_{mr})t_{ij} &= (t_{jk}t_{mk})t_{ij} + (t_{ik}t_{mk})t_{ij} \\ &\equiv -t_{ij}(t_{mk}t_{mj}) - t_{ij}(t_{mk}t_{mi}) \equiv (t_{ij}t_{mj})t_{mk} + (t_{ij}t_{mi})t_{mk} \\ &\equiv -t_{mk}(t_{mj}t_{mi}) + t_{mk}(t_{mj}t_{mi}) \equiv 0 \mod (S, w).\end{aligned}$$

В случае (2) $\wedge$ (2) пусть $f = t_{jk}t_{ij} + t_{ik}t_{ij}$, $g = t_{ij}t_{mi} + t_{mj}t_{mi}$, $m < i < j < k$. Тогда $w = t_{jk}t_{ij}t_{mi}$ и

$$\begin{aligned}(f, g)_w &= (t_{jk}t_{ij} + t_{ik}t_{ij})t_{mi} - t_{jk}(t_{ij}t_{mi} + t_{mj}t_{mi}) \\ &= (t_{jk}t_{mi})t_{ij} + (t_{ik}t_{mi})t_{ij} + t_{ik}(t_{ij}t_{mi}) - t_{jk}(t_{mj}t_{mi}) \\ &\equiv t_{ij}(t_{mk}t_{mi}) - t_{ik}(t_{mj}t_{mi}) - t_{jk}(t_{mj}t_{mi}) \\ &\equiv -(t_{ij}t_{mi})t_{mk} + (t_{ik}t_{mi})t_{mj} - (t_{jk}t_{mj})t_{mi} \\ &\equiv -t_{mk}(t_{mj}t_{mi}) - (t_{mk}t_{mi})t_{mj} + (t_{mk}t_{mj})t_{mi} \equiv 0 \mod (S, w).\end{aligned}$$

Следовательно, S — базис Гребнера — Ширшова для $\mathbf{L}_n$. $\square$

Пусть L — алгебра Ли над коммутативным кольцом K, L_1 — идеал в L, а L_2 — подалгебра в L. Назовем L *полупрямым произведением* L_1 и L_2, если L есть сумма K-модулей $L = L_1 \oplus L_2$.

Из теорем 2.3 и 4.2 немедленно вытекают

Следствие 4.3. *Алгебра Ли Дринфельда — Коно* $\mathbf{L}_n$ *является свободным* $\mathbb{Z}$*-модулем с* $\mathbb{Z}$*-базисом*

$$\mathrm{Irr}(S) = \{[t_{ik_1}t_{ik_2}\dots t_{ik_m}] \mid t_{ik_1}t_{ik_2}\dots t_{ik_m} - ALSW \text{ в } T^*,\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Следствие 4.4 [1]. $\mathbf{L}_n$ *является итерированным полупрямым произведением свободных алгебр Ли.*

Доказательство. Пусть A_i — свободная алгебра Ли, порожденная $\{t_{ij} \mid i < j \leq\ n-1\}$. Очевидно, что

$$\mathbf{L}_n = A_1 \oplus\ A_2 \oplus \dots \oplus\ A_{n-2}$$

является суммой $\mathbb{Z}$-модулей и из соотношений (1)–(3) имеем

$$A_i \lhd\ A_i + A_{i+1} + \dots + A_{n-2}. \quad \square$$

Замечание. Если заменим в данной статье основное поле k (кольцо $\mathbb{Z}$) произвольным коммутативным кольцом K с единицей, то все результаты также остаются справедливыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Etingof P., Henriques A., Kamnitzer J., Rains E. M.* The cohomology ring of the real locus of the moduli space of stable curves of genus 0 with marked points // Ann. Math. 2010. V. 171. P. 731–777.
2. *Кукин Г. П.* О проблеме равенства для алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 5. С. 1194–1197.
3. *Ширшов А. И.* Некоторые алгоритмические проблемы для ε-алгебр // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 1. С. 132–137.
4. *Selected works of A. I. Shirshov* (Eds. L. Bokut, V. Latyshev, I. Shestakov and E. Zelmanov; Trs. M. Bremner and M. Kochetov). Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 2009.
5. *Ширшов А. И.* Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 2. С. 292–296.
6. *Bergman G. M.* The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. 1978. V. 29. P. 178–218.
7. *Бокуть Л. А.* Вложения в простые ассоциативные алгебры // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 2. С. 117–142.
8. *Hironaka H.* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field if characteristic zero. I, II // Ann. Math. 1964. V. 79. P. 109–203; 205–326.
9. *Buchberger B.* An algorithmical criteria for the solvability of algebraic systems of equations // Aequationes Math. 1970. V. 4. P. 374–383.
10. *Bokut L. A., Kukin G.* Algorithmic and combinatorial algebra. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
11. *Buchberger B., Collins G. E., Loos R., Albrecht R.* Computer algebra, symbolic and algebraic computation. New York: Springer-Verl., 1982. (Comput Suppl.; V. 4).
12. *Buchberger B., Winkler F.* Gröbner bases and applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; V. 251).
13. *Cox D. A., Little J., O'Shea D.* Ideals, varieties and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. New York: Springer-Verl., 1992. (Undergrad. Texts Math.).
14. *Eisenbud D.* Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. Berlin; New York: Springer-Verl., 1995. (Grad. Texts Math.; V. 150).
15. *Adams W. W., Loustaunau P.* An introduction to Gröbner bases. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (Grad. Stud. Math.; V. 3).
16. *Bokut L. A.* Insolvability of the word problem for Lie algebras and subalgebras of finitely presented Lie algebras // Iz. AN USSR (Math.) 1972. V. 36. P. 1173–1219.
17. *Bokut L. A., Chen Y. Q., Chen Y. S.* Composition-Diamond lemma for tensor product of free algebras // J. Algebra. 2010. V. 323. P. 2520–2537.
18. *Bokut L. A., Chen Y. Q., Chen Y. S.* Groebner–Shirshov bases for Lie algebras over a commutative algebra // J. Algebra. 2011. V. 337. P. 82–102.
19. *Бокуть Л. А., Чен Б., Ден Ш.* Базисы Гребнера — Ширшова для алгебр Рота — Бакстера // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1237–1250.
20. *Bokut L. A., Chen Y. Q., Li Y.* Lyndon–Shirshov basis and anti-commutative algebras // J. Algebra. 2013. V. 378. P. 173–183.
21. *Bokut L. A., Chen Y. Q., Liu C. H.* Gröbner–Shirshov bases for dialgebras // Inter. J. Algebra Comput. 2010. V. 20. P. 391–415.
22. *Bokut L. A., Chen Y. Q., Mo Q. H.* Gröbner–Shirshov bases and embeddings of algebras // Inter. J. Algebra Comput. 2010. V. 20. P. 875–900.
23. *Bokut L. A., Chen Y. Q., Mo Q. H.* Gröbner–Shirshov bases for semirings // J. Algebra. 2013. V. 385. P. 47–63.
24. *Chen Y. S., Chen Y. Q.* Gröbner–Shirshov bases for metabelian Lie algebras // J. Algebra. 2012. V. 358. P. 143–161.
25. *Kang S.-J., Lee K.-H.* Gröbner–Shirshov bases for irreducible sl_{n+1}-modules // J. Algebra. 2000. V. 232. P. 1–20.
26. *Mikhalev A. A., Zolotykh A. A.* Standard Gröbner–Shirshov bases of free algebras over rings, I. Free associative algebras // Inter. J. Algebra Comput. 1998. V. 8, N 6. P. 689–726.
27. *Bokut L. A., Chen Y. Q.* Gröbner–Shirshov bases: Some new results // Proc. II-nd Inter. congress algebra and combinatorics. Singapore: World Scientific, 2008. P. 35–56.
28. *Bokut L. A., Chen Y. Q., Shum K. P.* Some new results on Gröbner–Shirshov bases // Proc. Inter. conf. algebra 2010. Advances in algebraic structures. Singapore: World Scientific, 2012. P. 53–102.

29. *Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F., Kolesnikov P. S.* Gröbner and Gröbner–Shirshov bases in algebra and conformal algebras // Fundam. Appl. Math. 2000. V. 6, N 3. P. 669–706.
30. *Bokut L. A., Kolesnikov P. S.* Gröbner–Shirshov bases: from their incipiency to the present // J. Math. Sci. 2003. V. 116, N 1. P. 2894–2916.
31. *Bokut L. A., Kolesnikov P. S.* Gröbner–Shirshov bases, conformal algebras and pseudo-algebras // J. Math. Sci. 2005. V. 131, N 5. P. 5962–6003.
32. *Markov A. A.* Impossibility of some algorithms in the theory of some associative system // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1947. V. 55. P. 587–590.
33. *Post E.* A variant of a recursively unsolvable problem // Bull. Amer. Math. Soc. 1946. V. 52. P. 264–268.
34. *Turing A. M.* The word problem in semi-groups with cancellation // Ann. Math. 1950. V. 52. P. 191–505.
35. *Новиков П. С.* Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1955. Т. 44. С. 1–144.
36. *Boone W. W.* The word problem // Ann. Math. 1959. V. 70. P. 207–265.
37. *Higman G.* Subgroups of finitely presented groups // Proc. Royal Soc. London, Ser. A. 1961. V. 262. P. 455–475.
38. *Дринфельд В. Г.* О почти коммутативных алгебрах Хопфа // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 2. С. 30–45.
39. *Kohno T.* Serie de Poincare Koszul associee aux groupes de tresses pures // Invent. Math. 1985. V. 82. P. 57–75.
40. *Lyndon R. C.* On Burnside's problem. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. P. 202–215.
41. *Ширшов А. И.* О свободных кольцах Ли // Мат. сб. 1958. Т. 45, № 2. С. 113–122.

Статья поступила 13 мая 2013 г.

Chen Yuqun (Чен Ючин)
School of Mathematical Sciences,
South China Normal University,
Guangzhou 510631, P. R. China
yqchen@scnu.edu.cn

Li Yu (Ли Юй)
Department of Mathematics,
Huizhou University,
Huizhou 516007, P. R. China
LiYu820615@126.com

Tang Qingyan (Тан Циньгуань)
School of Mathematical Sciences,
South China Normal University,
Guangzhou 510631, P. R. China
tangqingyan0812@163.com