Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 512.543

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП НИЛЬПОТЕНТНО АППРОКСИМИРУЕМЫХ ГРУПП В КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ π–ГРУПП

Е. В. Соколов

Аннотация. Пусть π — непустое множество простых чисел. Нильпотентную группу назовем *π-ограниченной*, если в ней существует центральный ряд, каждый фактор F которого удовлетворяет следующему условию: во всякой фактор-группе группы F все примарные компоненты периодической части, соответствующие числам из множества π, конечны. Установлено, что если группа G аппроксимируется π-ограниченными нильпотентными группами без кручения, а ее подгруппа H имеет конечный ранг Гирша — Зайцева, то π'-изолированность подгруппы H в группе G равносильна ее отделимости в этой группе классом всех конечных нильпотентных π-групп. Приведен пример применения полученных результатов к исследованию аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенного свободного произведения двух групп.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.121

Ключевые слова: отделимость подгрупп, аппроксимируемость нильпотентными группами, аппроксимируемость конечными π-группами, обобщенное свободное произведение, корневые классы групп.

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Статья продолжает работу автора [1], в которой рассматривалась отделимость подгрупп в нильпотентных группах, и ее целью является изучение свойства отделимости в группах, аппроксимируемых нильпотентными группами без кручения, а также применение полученных результатов к исследованию аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений групп.

Напомним, что согласно общему определению, данному А. И. Мальцевым в [2], подгруппа H группы G называется *отделимой в этой группе классом групп $\mathscr{C}$* (или, короче, *$\mathscr{C}$-отделимой*), если для каждого элемента $g \in G\backslash H$ существует гомоморфизм ψ группы G на группу из класса $\mathscr{C}$ такой, что $g\psi \notin H\psi$. Напомним также, что подгруппа H называется *π'-изолированной в группе G* для некоторого множества простых чисел π, если для каждого элемента $g \in G$ и для каждого простого числа $q \in \pi'$ из включения $g^q \in H$ следует, что $g \in H$ (здесь, как обычно, π' обозначает дополнение π в множестве всех простых чисел).

Если $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп, то, следуя [3], через $\pi(\mathscr{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей конечных порядков элементов всевозможных $\mathscr{C}$-групп. Нетрудно показать, что имеет место следующее утверждение.

© 2017 Соколов Е. В.

Предложение 1 [3, предложение 5]. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, состоящий только из периодических групп, G — некоторая группа и H — ее подгруппа. Если подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группе G, то она $\pi(\mathscr{C})'$-изолирована в G.* $\square$

Таким образом, если класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп и множество $\pi(\mathscr{C})$ включает не все простые числа, то при изучении свойства $\mathscr{C}$-отделимости имеет смысл ограничиться рассмотрением лишь $\pi(\mathscr{C})'$-изолированных подгрупп. Если при этом каждая $\pi(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа некоторой группы G $\mathscr{C}$-отделима в этой группе, получаем удобный в применении критерий, который может оказаться весьма полезным, например, при исследовании аппроксимационных свойств групп, представимых в виде той или иной теоретико-групповой конструкции. Стоит, однако, отметить, что результатов об отделимости подгрупп классами, отличными от класса всех конечных групп, не так уж много (см. [4–10]) и в основном они касаются отделимости циклических подгрупп.

Легко видеть, что пересечение любого числа π'-изолированных подгрупп снова оказывается π'-изолированной подгруппой. Поэтому если G — некоторая группа, то для каждой ее подгруппы H существует наименьшая подгруппа, содержащая H и являющаяся π'-изолированной в G. Будем называть ее *π'-изолятором подгруппы* H в группе G и обозначать через $\pi'\text{-}\mathfrak{Is}(G, H)$. Также через $\pi'\text{-}\mathfrak{Rt}(G, H)$ обозначим множество π'-корней, извлекающихся из элементов подгруппы H в группе G. Более точно, элемент $g \in G$ входит в множество $\pi'\text{-}\mathfrak{Rt}(G, H)$, если существует π'-число q (т. е. число, все простые делители которого принадлежат множеству π') такое, что $g^q \in H$.

Очевидно, что множество $\pi'\text{-}\mathfrak{Rt}(G, H)$ содержится в подгруппе $\pi'\text{-}\mathfrak{Is}(G, H)$ и совпадает с ней тогда и только тогда, когда само является подгруппой. Последнее всегда верно, если группа G локально нильпотентна (см., например, [11, теорема 4.5]); данный факт потребуется в дальнейшем.

Напомним ряд понятий, введенных в [1]. Если A — абелева группа и π — непустое множество простых чисел, то *примарной π-компонентой* группы A будем называть любую примарную компоненту периодической части этой группы, соответствующую простому числу из множества π. Будем говорить, что группа A *π-ограничена*, если в произвольной ее фактор-группе B все примарные π-компоненты периодической части $\tau(B)$ конечны. Нильпотентную группу назовем *π-ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным центральным рядом с абелевыми π-ограниченными факторами. Классы π-ограниченных абелевых и нильпотентных групп будем обозначать через $\mathscr{A}_\pi$ и $\mathscr{N}_\pi$ соответственно. Заметим, что при любом выборе множества π класс $\mathscr{N}_\pi$ содержит все конечно порожденные нильпотентные группы.

В [1] установлено, что если нильпотентная группа π-ограничена, то любая ее π'-изолированная подгруппа отделима классом $\mathscr{F}_\pi$ всех конечных π-групп (понятно, что множество $\pi(\mathscr{F}_\pi)$ совпадает с исходным множеством π, поэтому здесь речь идет о π'-изолированных подгруппах, а не о $\pi(\mathscr{F}_\pi)'$-изолированных). Следующее утверждение представляет собой несколько усиленный вариант данного результата.

Теорема 1. *Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел, G — $\mathscr{N}_\pi$-группа и H — подгруппа группы G. Тогда подгруппа $\pi'\text{-}\mathfrak{Is}(G, H)$ отделима в группе G классом $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$ всех конечных нильпотентных π-групп, совпадает с множеством $\pi'\text{-}\mathfrak{Rt}(G, H)$ и является $\mathscr{N}_\pi$-группой. В частности, каждая π'-изо-*

лированная подгруппа группы G $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-отделима в этой группе. Если группа G не имеет π'-кручения, то ступени нильпотентности подгрупп H и π'-$\mathfrak{Is}(G,H)$ совпадают.

Легко видеть, что условие отсутствия π'-кручения в группе G существенно для равенства ступеней нильпотентности подгрупп H и π'-$\mathfrak{Is}(G,H)$. Например, если H — бесконечная циклическая группа, K — конечная нильпотентная π'-группа ступени c и $G = H \times K$, то π'-$\mathfrak{Is}(G,H) = G$ и потому ступень нильпотентности подгруппы π'-$\mathfrak{Is}(G,H)$ равна c, в то время как ступень нильпотентности подгруппы H — единице.

Говорят (см., например, [12]), что группа имеет *конечный ранг Гирша — Зайцева*, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является периодической или бесконечной циклической группой. Приводимая далее теорема служит основным результатом настоящей статьи.

Теорема 2. *Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел, G — группа, аппроксимируемая $\mathscr{N}_\pi$-группами без кручения, и H — подгруппа группы G, имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Подгруппа H является $\mathscr{N}_\pi$-группой.*

2. *Подгруппа π'-$\mathfrak{Is}(G,H)$ $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-отделима в группе G, совпадает с множеством π'-$\mathfrak{Rt}(G,H)$, принадлежит классу $\mathscr{N}_\pi$ и имеет ту же ступень нильпотентности, что и подгруппа H. В частности, каждая π'-изолированная подгруппа группы G, имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева, $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-отделима в этой группе.*

3. *Если группа G аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то подгруппы H и π'-$\mathfrak{Is}(G,H)$ конечно порождены.*

Отметим, что условие конечности ранга Гирша — Зайцева подгруппы H существенно. Так, например, любая неабелева свободная группа аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, но при этом содержит конечно порожденную изолированную подгруппу, не отделимую классом $\mathscr{F}_p$ всех конечных p-групп ни для какого простого числа p [13].

Результаты об отделимости подгрупп нередко используются при исследовании аппроксимируемости различных свободных конструкций групп, и ниже приводится пример подобного применения теорем 1 и 2.

Следуя [14], класс групп $\mathscr{C}$ будем называть *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет следующему *условию Грюнберга*: для любой группы G и для любой субнормальной последовательности $K \leq H \leq G$ с факторами из класса $\mathscr{C}$ найдется нормальная подгруппа L группы G, лежащая в K и такая, что $G/L \in \mathscr{C}$.

Известно [15, теорема 1], что класс $\mathscr{C}$ корневой тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами $G, H \in \mathscr{C}$ содержит декартово произведение $\prod\limits_{h \in H} G_h$, где G_h — изоморфная копия группы G для каждого $h \in H$. Отсюда легко следует, что пересечение двух корневых классов снова корневой класс и что класс, состоящий только из конечных групп, корневой тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений (последний факт был независимо установлен в [16]).

В последние годы опубликовано достаточно много статей об аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп. Интерес к этому вопросу объясняется тем, что большинство классов групп, аппроксимируемость которыми изучалась ранее, корневые и новые исследования позволяют обобщить и систематизировать имеющиеся результаты. Ссылки на некоторые работы по данной тематике вместе с более подробным обсуждением самих корневых классов читатель может найти, например, в [3]. Здесь лишь сформулируем еще одно утверждение такого рода.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{C}$ — нетривиальный (т. е. включающий хотя бы одну неединичную группу) корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп; $P = \langle A * B;\ U\rangle$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой U, нормальной в свободных множителях и содержащейся в них собственным образом. Пусть также каждая из групп A и B принадлежит классу $\mathscr{N}_{\pi(\mathscr{C})}$ или аппроксимируется $\mathscr{N}_{\pi(\mathscr{C})}$-группами без кручения. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий: (α) подгруппа U циклическая; (β) подгруппа U центральна хотя бы в одном из свободных множителей и имеет конечный ранг, то следующие утверждения равносильны:*

1) *группа P $\mathscr{C}$-аппроксимируема;*

2) *группа P аппроксимируется классом $\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi(\mathscr{C})}$ всех конечных разрешимых $\pi(\mathscr{C})$-групп;*

3) *единичная подгруппа и подгруппа U $\pi(\mathscr{C})'$-изолированы в группах A и B.*

Заметим, что если $\pi(\mathscr{C})$ совпадает с множеством всех простых чисел, то $\pi(\mathscr{C})'$-изолированной оказывается любая подгруппа и утверждение 3 выполняется автоматически. В частности, это верно, если класс $\mathscr{C}$ из формулировки теоремы 3 содержит хотя бы одну непериодическую группу. В таком случае в силу свойства замкнутости относительно взятия подгрупп и фактор-групп ему принадлежат бесконечная циклическая подгруппа данной группы и все ее гомоморфные образы, среди которых — всевозможные конечные группы простых порядков.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательствам теорем 1–3.

§ 2. Доказательства теорем 1 и 2

Если $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп и G — некоторая группа, то всюду далее через $\mathscr{C}^*(G)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{C}$.

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей и G — произвольная группа. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Семейство $\mathscr{C}^*(G)$ замкнуто относительно конечных пересечений.*

2. *Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то для любой ее конечной подгруппы H найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(G)$ такая, что $N \cap H = 1$.*

Доказательство. В самом деле, если $M_1, M_2, \dots, M_k \in \mathscr{C}^*(G)$ и $M = \bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$, то фактор-группа G/M по теореме Ремака вкладывается в прямое произведение конечного числа $\mathscr{C}$-групп G/M_i, $1 \le i \le k$, и в силу условий, наложенных на класс $\mathscr{C}$, сама принадлежит данному классу. Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то для каждого неединичного элемента $h \in H$ существует не содержащая его подгруппа $N_h \in \mathscr{C}^*(G)$. Полагая $N = \bigcap_{h \in H \setminus 1} N_h$, имеем $N \cap H = 1$. Кроме того, в силу конечности подгруппы H и доказанного выше $N \in \mathscr{C}^*(G)$. Таким образом, подгруппа N искомая. $\square$

Пусть снова $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп и G — некоторая группа. Если H — подгруппа группы G, то подгруппу $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(G)} HN$ будем называть *$\mathscr{C}$-замыканием подгруппы H в группе G* и обозначать через $\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(G,H)$.

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, G — некоторая группа и H — подгруппа группы G. Тогда $\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(G,H)$ — наименьшая $\mathscr{C}$-отделимая подгруппа группы G, содержащая H. Если класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, то для всякой подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(G)$ имеет место равенство*

$$\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(G,H) = \bigcap_{\substack{N \in \mathscr{C}^*(G),\\ N \leq M}} HN.$$

Доказательство. Обозначим для краткости подгруппу $\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(G,H)$ через $\overline{H}$. Легко видеть, что произвольная подгруппа K группы G $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$K = \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(G)} KN.$$

Отсюда следует, что если подгруппа K $\mathscr{C}$-отделима в G и $H \leq K$, то $\overline{H} \leq K$. Заметим далее, что для любой подгруппы $N \in \mathscr{C}^*(G)$

$$\overline{H}N = \Big(\bigcap_{M \in \mathscr{C}^*(G)} HM\Big)N \leq (HN)N \leq HN$$

и потому

$$\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(G)} \overline{H}N \leq \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(G)} HN = \overline{H}.$$

Таким образом, подгруппа $\overline{H}$ сама $\mathscr{C}$-отделима в группе G.

Пусть M — некоторая подгруппа из семейства $\mathscr{C}^*(G)$. Если g — произвольный элемент множества $G \backslash \overline{H}$, то $g \notin HL$ хотя бы для одной подгруппы $L \in \mathscr{C}^*(G)$ и, в частности, $g \notin H(L \cap M)$. Так как класс $\mathscr{C}$ предполагается замкнутым относительно взятия подгрупп и прямых произведений, по предложению 2 подгруппа $N = L \cap M$ принадлежит семейству $\mathscr{C}^*(G)$. Поэтому

$$g \notin \bigcap_{\substack{N \in \mathscr{C}^*(G),\\ N \leq M}} HN.$$

Таким образом,

$$\overline{H} \supseteq \bigcap_{\substack{N \in \mathscr{C}^*(G),\\ N \leq M}} HN,$$

и поскольку обратное включение очевидно, требуемое равенство доказано. $\square$

Предложение 4. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, G — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа и H — нильпотентная подгруппа группы G ступени c. Тогда подгруппа $\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(G,H)$ является нильпотентной группой ступени c.*

Доказательство. В самом деле, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}$ — произвольные элементы подгруппы $\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(G,H)$ и $g = [x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}]$. Тогда для любого гомоморфизма ψ группы G на $\mathscr{C}$-группу справедливы включения

$$x_1\psi, x_2\psi, \ldots, x_{c+1}\psi \in H\psi$$

и так как $H\psi$ — нильпотентная группа ступени не выше c, то

$$g\psi = [x_1\psi, x_2\psi, \ldots, x_{c+1}\psi] = 1.$$

Отсюда ввиду $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы G вытекает, что $g = 1$. Стало быть, подгруппа $\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(G,H)$ удовлетворяет тождеству $[x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] = 1$ и потому нильпотентна ступени не выше c. Так как, с другой стороны, она содержит подгруппу H, ее ступень нильпотентности в точности равна c. $\square$

Предложение 5. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, G — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа и H — подгруппа группы G. Если существует подгруппа $M \in \mathscr{C}^*(G)$, тривиально пересекающаяся с H, то подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группе G.*

Доказательство. Пусть h — произвольный элемент подгруппы $\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(G,H)$. Тогда по модулю каждой подгруппы $N \in \mathscr{C}^*(G)$ он сравним с некоторым элементом $h_N \in H$. Выбирая подгруппу N лежащей в M, получаем, что $h \equiv h_M \pmod{M}$ и $h \equiv h_N \pmod{M}$, откуда вытекает сравнение $h_M \equiv h_N \pmod{M}$. Но $M \cap H = 1$, поэтому $h_N = h_M$.

Таким образом, элемент h сравним с элементом $h_M \in H$ по модулю каждой подгруппы $N \in \mathscr{C}^*(G)$, лежащей в M. Из $\mathscr{C}$-отделимости единичной подгруппы, равносильной $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы G, и предложения 3 следует, что $\bigcap\limits_{\substack{N \in \mathscr{C}^*(G),\\ N \le M}} N = 1$. Поэтому $h = h_M \in H$, $\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(G,H) = H$ и в силу того же предложения 3 подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группе G. $\square$

Предложение 6 [3, предложение 11]. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, G — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа и H — подгруппа группы G, имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда существует подгруппа $M \in \mathscr{C}^*(G)$, тривиально пересекающаяся с H. В частности, H является $\mathscr{C}$-группой.* $\square$

Два предложения, приводимые далее, содержат ряд необходимых свойств классов $\mathscr{A}_\pi$ и $\mathscr{N}_\pi$.

Предложение 7. *Пусть A — некоторая абелева группа и π — непустое множество простых чисел. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Если в произвольной фактор-группе B группы A все примарные π-компоненты периодической части $\tau(B)$ имеют конечный период, а примарные π-компоненты периодической части самой группы A конечны, то $A \in \mathscr{A}_\pi$* [1, предложение 1].

2. *Пусть $\mathscr{F}_\pi$ обозначает класс всех конечных π-групп. Группа A обладает свойством $\mathscr{F}_\pi$-отделимости всех своих π'-изолированных подгрупп тогда и*

только тогда, когда в произвольной фактор-группе B группы A все примарные π-компоненты периодической части $\tau(B)$ имеют конечный период [1, теорема 1]. $\square$

Предложение 8. *Классы $\mathscr{A}_\pi$ и $\mathscr{N}_\pi$ замкнуты относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей.*

Доказательство. Замкнутость классов $\mathscr{A}_\pi$ и $\mathscr{N}_\pi$ относительно взятия подгрупп доказана в предложении 2 из [1]. Поэтому остается рассмотреть лишь прямые произведения.

Пусть $P = A \times B$, и пусть сначала $A, B \in \mathscr{A}_\pi$. Согласно утверждению 2 предложения 7 все π'-изолированные подгруппы групп A и B $\mathscr{F}_\pi$-отделимы в этих группах. В силу теоремы 4 из [2] тем же свойством обладает и группа P. Значит, вновь по утверждению 2 предложения 7 в произвольной фактор-группе Q группы P все примарные π-компоненты периодической части $\tau(Q)$ имеют конечный период. Поскольку каждая примарная компонента группы P является прямым произведением соответствующих примарных компонент групп A и B, все примарные π-компоненты группы P конечны. Поэтому из утверждения 1 предложения 7 следует, что $P \in \mathscr{A}_\pi$. Таким образом, для класса $\mathscr{A}_\pi$ требуемое утверждение доказано.

Пусть A, $B \in \mathscr{N}_\pi$ и

$$1 = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n = A, \quad 1 = B_0 \leq B_1 \leq \ldots \leq B_m = B$$

— центральные ряды с $\mathscr{A}_\pi$-факторами. Без потери общности можно считать, что $m = n$. Тогда подгруппы $A_i \times B_i$, $0 \leq i \leq n$, составляют центральный ряд группы P и при этом

$$(A_{i+1} \times B_{i+1})/(A_i \times B_i) \cong (A_{i+1}/A_i) \times (B_{i+1}/B_i) \in \mathscr{A}_\pi$$

в силу доказанного выше. Значит, $P \in \mathscr{N}_\pi$, что и требовалось. $\square$

Доказательство теоремы 1. Так как произвольный гомоморфный образ группы G является нильпотентной группой, $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-отделимость ее подгруппы π'-$\mathfrak{Is}(G, H)$ равносильна отделимости данной подгруппы классом $\mathscr{F}_\pi$ всех конечных π-групп. Последняя вытекает из теоремы 3 в [1]. Равенство

$$\pi'\text{-}\mathfrak{Is}(G, H) = \pi'\text{-}\mathfrak{Rt}(G, H)$$

следует из упоминавшегося во введении результата о строении изоляторов подгрупп в локально нильпотентных группах, а включение π'-$\mathfrak{Is}(G, H) \in \mathscr{N}_\pi$ — из предложения 8. Наконец, если группа G не имеет π'-кручения, то ввиду доказанного выше ее единичная подгруппа $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-отделима, что равносильно $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-аппроксимируемости группы G. Поэтому согласно предложению 4 ступени нильпотентности подгрупп $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-$\mathfrak{Cl}(G, H) = \pi'$-$\mathfrak{Is}(G, H)$ и H совпадают. $\square$

Доказательство теоремы 2. Обозначим для краткости класс всех $\mathscr{N}_\pi$-групп без кручения через $\mathscr{X}$. Согласно предложению 8 класс $\mathscr{N}_\pi$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Понятно, что теми же свойствами обладает и класс $\mathscr{X}$. Поэтому в силу предложения 6 существует подгруппа $M \in \mathscr{X}^*(G)$, тривиально пересекающаяся с подгруппой H, и, в частности, $H \in \mathscr{X}$. Таким образом, утверждение 1 теоремы доказано.

Пусть g — некоторый элемент из подгруппы $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-$\mathfrak{Cl}(G, H)$ и N — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{X}^*(G)$, лежащая в M. Легко видеть, что образ элемента g в фактор-группе G/N принадлежит подгруппе $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-$\mathfrak{Cl}(G/N, HN/N)$, которая по теореме 1 совпадает с множеством π'-$\mathfrak{Rt}(G/N, HN/N)$. Следовательно, существует наименьшее π'-число r, удовлетворяющее условию $(gN)^r \in HN/N$. Пусть также q — наименьшее π'-число, удовлетворяющее условию $(gM)^q \in HM/M$; $h, f \in H$ — элементы такие, что $hM = g^q M$ и $fN = g^r N$. Из последнего соотношения вытекает, что $(gM)^r = fM \in HM/M$ и в силу выбора q и r для некоторого π'-числа s имеет место равенство $r = qs$. Отсюда

$$h^s M = g^{qs} M = g^r M = fM$$

и, следовательно, $h^{-s} f \in H \cap M$. Но $H \cap M = 1$, значит, $f = h^s$ и

$$(gN)^{qs} = (gN)^r = fN = (hN)^s.$$

Так как группа G/N нильпотентна и не имеет кручения, извлечение корней в ней однозначно (см., например, [11, § 4]). Стало быть,

$$(gN)^q = hN \in HN/N.$$

Итак, элемент g^q принадлежит подгруппе HN для каждой подгруппы $N \in \mathscr{X}^*(G)$, лежащей в M. В соответствии с предложением 5 подгруппа H $\mathscr{X}$-отделима в группе G, поэтому в силу предложения 3 $\mathscr{X}$-$\mathfrak{Cl}(G, H) = H$. С другой стороны, согласно тому же предложению

$$\mathscr{X}\text{-}\mathfrak{Cl}(G, H) = \bigcap_{\substack{N \in \mathscr{X}^*(G),\\ N \leq M}} HN.$$

Таким образом, $g^q \in H$, и, следовательно, подгруппа $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-$\mathfrak{Cl}(G, H)$ совпадает с множеством π'-$\mathfrak{Rt}(G, H)$. Это означает, в частности, что

$$\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi\text{-}\mathfrak{Cl}(G, H) = \pi'\text{-}\mathfrak{Is}(G, H)$$

и потому подгруппа π'-$\mathfrak{Is}(G, H)$ $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-отделима в группе G.

Пусть g — произвольный элемент из пересечения π'-$\mathfrak{Is}(G, H) \cap M$. Поскольку π'-$\mathfrak{Is}(G, H) = \pi'$-$\mathfrak{Rt}(G, H)$, существует число q такое, что $g^q \in H$. Тогда элемент g^q принадлежит пересечению $H \cap M$ и, следовательно, равен 1. Но группа G не имеет кручения, поэтому $g = 1$. Таким образом,

$$\pi'\text{-}\mathfrak{Is}(G, H) \cap M = 1,$$

подгруппа π'-$\mathfrak{Is}(G, H)$ вкладывается в $\mathscr{X}$-группу G/M и, стало быть, сама принадлежит классу $\mathscr{X}$.

Группа G $\mathscr{X}$-аппроксимируема, а каждая $\mathscr{X}$-группа в силу теоремы 1 аппроксимируется классом $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$. Следовательно, группа G $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-аппроксимируема, и по предложению 4 ступени нильпотентности подгрупп $\mathscr{F}\mathscr{N}_\pi$-$\mathfrak{Cl}(G, H) = \pi'$-$\mathfrak{Is}(G, H)$ и H совпадают.

Тем самым утверждение 2 теоремы полностью доказано. Остается заметить, что если группа G аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, то, пользуясь предложением 6, подгруппу M с самого начала можно было выбрать так, чтобы фактор-группа G/M являлась конечно порожденной нильпотентной группой без кручения. Поскольку подгруппы H и π'-$\mathfrak{Is}(G, H)$ вкладываются в G/M, они в этом случае оказываются конечно порожденными, что доказывает утверждение 3. $\square$

§ 3. Доказательство теоремы 3

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, G — некоторая группа и H — ее нормальная подгруппа. Следуя [17], будем говорить, что группа G *$\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H*, если для любой подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(H)$, нормальной в G, найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(G)$ такая, что $N \cap H = M$. В основе доказательства теоремы 3 лежит следующее утверждение.

Предложение 9 [17, теорема 4]. *Пусть $\mathscr{C}$ — нетривиальный корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и $P = \langle A * B;\ U\rangle$ — свободное произведение $\mathscr{C}$-аппроксимируемых групп A и B с объединенной подгруппой U, нормальной в свободных множителях. Пусть также подгруппа U циклическая или лежит в центре группы B.*

1. *Если $A \neq U \neq B$ и группа P $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то подгруппа U $\mathscr{C}$-отделима в группах A и B.*

2. *Если подгруппа U $\mathscr{C}$-отделима в группах A и B и группа B $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе U, то группа P $\mathscr{C}$-аппроксимируема.* □

Предложение 10. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, удовлетворяющий условию $\pi(\mathscr{C}) \neq \varnothing$ и замкнутый относительно взятия подгрупп и расширений. Тогда класс $\mathscr{FS}_{\pi(\mathscr{C})}$ всех конечных разрешимых $\pi(\mathscr{C})$-групп содержится в $\mathscr{C}$. Если G — группа, принадлежащая классу $\mathscr{N}_{\pi(\mathscr{C})}$ или аппроксимируемая $\mathscr{N}_{\pi(\mathscr{C})}$-группами без кручения, и H — ее $\pi(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа, имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева, то подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группе G.*

Доказательство. В самом деле, по определению множества $\pi(\mathscr{C})$ каждому входящему в него простому числу p соответствует элемент некоторой $\mathscr{C}$-группы, порядок которого делится на p. В силу замкнутости относительно взятия подгрупп класс $\mathscr{C}$ содержит порождаемую данным элементом циклическую подгруппу, а потому и группу порядка p. Остается заметить, что произвольная $\mathscr{FS}_{\pi(\mathscr{C})}$-группа обладает субнормальным рядом, порядки факторов которого являются простыми числами из множества $\pi(\mathscr{C})$, и потому принадлежит классу $\mathscr{C}$ в силу замкнутости последнего относительно взятия расширений.

Пусть группа G и ее подгруппа H удовлетворяют условию предложения. Тогда в силу теорем 1 и 2 подгруппа H $\mathscr{FN}_{\pi(\mathscr{C})}$-отделима в G. Но согласно доказанному выше класс $\mathscr{FN}_{\pi(\mathscr{C})}$ содержится в $\mathscr{C}$. Следовательно, подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группе G, что и требовалось. □

Предложение 11. *Пусть $\mathscr{C}$ — нетривиальный класс групп, состоящий только из конечных групп и замкнутый относительно взятия подгрупп, фактор-групп и расширений. Если G — группа, принадлежащая классу $\mathscr{N}_{\pi(\mathscr{C})}$ или аппроксимируемая $\mathscr{N}_{\pi(\mathscr{C})}$-группами без кручения, и H — ее нормальная $\pi(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа, имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева, то группа G $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H.*

Доказательство. Пусть M — произвольная подгруппа из семейства $\mathscr{C}^*(H)$, нормальная в G. Поскольку фактор-группа H/M принадлежит классу $\mathscr{C}$, она является конечной $\pi(\mathscr{C})$-группой. Поэтому из $\pi(\mathscr{C})'$-изолированности подгруппы H в группе G вытекает, что подгруппа M также $\pi(\mathscr{C})'$-изолирована в этой группе. Значит, в силу предложения 10 данная подгруппа $\mathscr{C}$-отделима в G. Отсюда и из замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия фактор-групп легко следует, что группа G/M $\mathscr{C}$-аппроксимируема и потому согласно предложению 2 существует подгруппа $N/M \in \mathscr{C}^*(G/M)$, тривиально пересекающаяся с конечной подгруппой H/M. Но тогда $N \in \mathscr{C}^*(G)$ и $N \cap H = M$, что и требовалось. $\square$

Доказательство теоремы 3. $1 \Rightarrow 3$. Как замечено во введении, если класс $\mathscr{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то множество $\pi(\mathscr{C})$ включает все простые числа и потому любая подгруппа оказывается $\pi(\mathscr{C})'$-изолированной. Если класс $\mathscr{C}$ состоит только из периодических групп, то согласно предложению 1 $\pi(\mathscr{C})'$-изолированность единичной подгруппы и подгруппы U в группах A и B следует из их $\mathscr{C}$-отделимости в этих группах, имеющей место в силу $\mathscr{C}$-аппроксимируемости групп A, B и утверждения 1 предложения 9.

$3 \Rightarrow 2$. Так как класс $\mathscr{C}$ содержит хотя бы одну неединичную группу и замкнут относительно взятия подгрупп и фактор-групп, множество $\pi(\mathscr{C})$ заведомо непусто. Поэтому $\mathscr{FS}_{\pi(\mathscr{C})}$ — нетривиальный класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, фактор-групп и расширений. В силу отмеченного во введении результата из [16] отсюда следует, в частности, что данный класс корневой.

Конечность ранга абелевой подгруппы U означает, что эта подгруппа имеет и конечный ранг Гирша — Зайцева. Поэтому согласно предложению 11 группы A и B $\mathscr{FS}_{\pi(\mathscr{C})}$-регулярны по подгруппе U. Так как $\pi\left(\mathscr{FS}_{\pi(\mathscr{C})}\right) = \pi(\mathscr{C})$, из $\pi(\mathscr{C})'$-изолированности единичной подгруппы и подгруппы U в группах A и B в силу предложения 10 вытекает их $\mathscr{FS}_{\pi(\mathscr{C})}$-отделимость в этих группах. Значит, группа P $\mathscr{FS}_{\pi(\mathscr{C})}$-аппроксимируема согласно утверждению 2 предложения 9.

$2 \Rightarrow 1$. Как отмечено выше, множество $\pi(\mathscr{C})$ непусто. Поэтому из предложения 10 вытекает, что $\mathscr{FS}_{\pi(\mathscr{C})} \subseteq \mathscr{C}$. Следовательно, $\mathscr{FS}_{\pi(\mathscr{C})}$-аппроксимируемость группы P влечет за собой ее $\mathscr{C}$-аппроксимируемость, что и требовалось. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.

2. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

3. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

4. *Kim G., McCarron J.* On amalgamated free products of residually p-finite groups // J. Algebra. 1993. V. 162, N 1. P. 1–11.

5. *Doniz D.* Residual properties of free products of infinitely many nilpotent groups amalgamating cycles // J. Algebra. 1996. V. 179, N 3. P. 930–935.

6. *Kim G., Tang C. Y.* On generalized free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1998. V. 201, N 1. P. 317–327.

7. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.

8. *Bobrovskii P. A., Sokolov E. V.* The cyclic subgroup separability of certain generalized free products of two groups // Algebra Colloq. 2010. V. 17, N 4. P. 577–582.

9. *Соколов Е. В.* Отделимость подгрупп некоторыми классами конечных групп. Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2012.

10. *Sokolov E. V.* On the cyclic subgroup separability of the free product with commuting subgroups // Int. J. Algebra Comp. 2014. V. 24, N 5. P. 741–756.

11. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.

12. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* On various rank conditions in infinite groups // Algebra Discrete Math. 2007. N 4. P. 23–43.

13. *Бардаков В. Г.* К вопросу Д. И. Молдаванского о p-отделимости подгрупп свободной группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 505–509.

14. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. V. 7. P. 29–62.

15. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. V. 43. P. 856–860.

16. *Гольцов Д. В., Яцкин Н. И.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естественные, общественные науки. 2011. № 2. С. 115–128.

17. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

Статья поступила 13 марта 2016 г.

Соколов Евгений Викторович
Ивановский гос. университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
ev-sokolov@yandex.ru