Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 517.929

К ТЕОРИИ ФАВАРА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Е. Слюсарчук

Аннотация. Получены условия существования почти периодических решений почти периодических функциональных уравнений в банаховом пространстве, не использующие $\mathscr{H}$-классы этих уравнений.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.120

Ключевые слова: почти периодический оператор, почти периодическое функциональное уравнение, почти периодическое решение.

§ 1. Основной объект исследования

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{K}$ — вещественное поле $\mathbb{R}$ или комплексное поле $\mathbb{C}$, E — произвольное банахово пространство над полем $\mathbb{K}$ с нормой $\|\cdot\|_E$ и C^0 — банахово пространство ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$ со значениями в E с нормой

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E.$$

В пространстве C^0 определим оператор сдвига S_h, $h \in \mathbb{R}$, с помощью соотношения

$$(S_h x)(t) = x(t+h), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Определение 1. Элемент $y \in C^0$ называется *почти периодическим* (см. [1, 2]), если замыкание множества $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ в пространстве C^0 является компактным подмножеством этого пространства, т. е. из каждой последовательности $(S_{h_n} y)_{n\geq 1}$ можно выделить сходящуюся в C^0 подпоследовательность.

Множество почти периодических элементов пространства C^0 является подпространством этого пространства с нормой $\|\cdot\|_{C^0}$. Это подпространство будем обозначать через B^0.

Пусть $B[a, r]$ — замкнутый шар в C^0 с центром в точке $a \in C^0$ радиуса r, т. е. множество $\{x \in C^0 : \|x - a\|_{C^0} \leq r\}$.

Определение 2. Оператор $H : C^0 \to C^0$ называется *почти периодическим*, если для каждых элемента $a \in C^0$, числа $r > 0$ и последовательности $(h_k)_{k\geq 1}$ действительных чисел существует такая подпоследовательность $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, что

$$\lim_{\substack{l_1\to\infty,\\ l_2\to\infty}} \sup_{x\in B[a,r]} \|S_{h_{l_1}} H S_{-h_{l_1}} x - S_{h_{l_2}} H S_{-h_{l_2}} x\|_{C^0} = 0.$$

© 2017 Слюсарчук В. Е.

Это определение в случае линейного почти периодического оператора H равносильно определению, которое использовалось Э. Мухамадиевым при исследовании обратимости линейных функциональных операторов в пространстве C^0 [3, 4].

Определение 3. Оператор $H : C^0 \to C^0$ называется *автономным*, если $S_h H S_{-h} = H$ для всех $h \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что автономный оператор является почти периодическим в смысле определения 2.

Пусть $\mathscr{K}$ — множество всех непустых компактных подмножеств $K \subset E$ и $R(x)$ — множество значений функции $x = x(t)$, т. е. множество $\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Для множества $K \in \mathscr{K}$ обозначим через $\mathfrak{D}_K$ множество всех элементов $x \in C^0$, для каждого из которых $R(x) \subset K$.

Удобным для дальнейшего будет следующее определение почти периодического оператора, впервые рассмотренное автором в [5] в случае дискретных уравнений.

Определение 4. Оператор $H : C^0 \to C^0$ называется *почти периодическим*, если для каждых множества $K \in \mathscr{K}$ и последовательности $(h_{m_k})_{k\geq 1}$ действительных чисел существует такая подпоследовательность $(h_{m_{k_l}})_{l\geq 1}$, что

$$\lim_{\substack{l_1\to\infty,\\ l_2\to\infty}} \sup_{x\in\mathfrak{D}_K} \|S_{h_{m_{l_1}}} H S_{-h_{m_{l_1}}} x - S_{h_{m_{l_2}}} H S_{-h_{m_{l_2}}} x\|_{C^0} = 0.$$

Заметим, что почти периодический в смысле определения 4 оператор H может не быть почти периодическим в смысле определения 2 (соответствующий пример приведен в § 5).

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\mathscr{F} x = y, \tag{2}$$

где $\mathscr{F} : C^0 \to C^0$ — почти периодический в смысле определения 4 оператор и $y \in B^0$.

Цель статьи — нахождение условий почти периодичности ограниченных непрерывных решений уравнения (2), не использующих элементов $\mathscr{H}$-класса этого уравнения. При исследовании уравнения (2) будем применять функционал δ, определенный на множестве решений этого уравнения, являющихся элементами множества $\mathfrak{S} = \bigcup\limits_{K\in\mathscr{K}} \mathfrak{D}_K$.

§ 2. Функционал δ

Фиксируем множество $K \in \mathscr{K}$. Обозначим через $N(\mathscr{F}, K)$ множество всех решений уравнения (2), для каждого из которых $R(x) \subset K$. Предположим, что $N(\mathscr{F}, K) \neq \varnothing$.

Рассмотрим элемент $x^* \in N(\mathscr{F}, K)$, для которого диаметр $\operatorname{diam} R(x^*)$ множества $R(x^*)$, т. е. число $\sup\{\|x_1 - x_2\|_E : x_1, x_2 \in R(x^*)\}$, не равняется 0. Также рассмотрим положительное число

$$r(x^*, K) = \sup\{\|x - y\|_E : x \in R(x^*),\ y \in K\}.$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon \in [0, r(x^*, K)]$.

Обозначим через $\Omega(x^*, K, \varepsilon)$ множество всех элементов $z \in C^0$, для каждого из которых

$$R(z) \subset K \quad \text{и} \quad \|z - x^*\|_{C^0} \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим функционал

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) = \inf_{z \in \Omega(x^*, K, \varepsilon)} \|\mathscr{F} z - \mathscr{F} x^*\|_{C^0}. \tag{3}$$

Здесь $\mathscr{F} x^*$ можно заменить на y, где y — правая часть уравнения (2).

Используем функционал δ для исследования уравнения (2).

§ 3. Основная теорема

Приведем условия существования почти периодических решений уравнения (2), которые в отличие от теоремы Америо о почти периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений (см. [2, 6]) не используют $\mathscr{H}$-класс уравнения (2) и условие разделенности решений уравнений $\mathscr{H}$-класса этого уравнения.

Теорема 1. *Пусть $K \in \mathscr{K}$, $x^* \in N(\mathscr{F}, K)$, $\operatorname{diam} R(x^*) \neq 0$ и*

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) > 0 \tag{4}$$

для каждого $\varepsilon \in (0, r(x^*, K))$. Тогда x^* почти периодично.

Замечание 1. Если $\operatorname{diam} R(x^*) = 0$, то $x^* \in B^0$.

Доказательство. Предположим, что решение $x^* \in N(\mathscr{F}, K)$ уравнения (2) не является элементом пространства B^0. Тогда существует последовательность $(S_{h_p} x^*)_{p \geq 1}$, для которой каждая подпоследовательность $(S_{k_p} x^*)_{p \geq 1}$ расходится в C^0. Следовательно,

$$\|S_{k_{p_r}} x^* - S_{k_{q_r}} x^*\|_{C^0} \geq \gamma, \quad r \geq 1,$$

для некоторых последовательностей $(p_r)_{r \geq 1}$, $(q_r)_{r \geq 1}$ натуральных чисел и числа $\gamma \in (0, \rho)$, где $\rho = \operatorname{diam} R(x^*)$. Поэтому

$$S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} x^* \in \Omega(x^*, K, \gamma), \quad r \geq 1.$$

Не ограничивая общности доказательства, можно считать, что на основании включения $y \in B^0$

$$\lim_{r \to \infty} \|S_{-k_{p_r}} y - S_{-k_{q_r}} y\|_{C^0} = 0. \tag{5}$$

Заметим, что $\rho \leq r(x^*, K))$. Можно также считать, что последовательность $(S_{k_p} \mathscr{F} S_{-k_p} x)_{p \geq 1}$ сходится равномерно по x на $\mathfrak{D}_K$. Поэтому

$$\lim_{p, q \to \infty} \sup_{x \in \mathfrak{D}_K} \|S_{k_p} \mathscr{F} S_{-k_p} x - S_{k_q} \mathscr{F} S_{-k_q} x\|_{C^0} = 0. \tag{6}$$

Покажем, что

$$\delta(x^*, K, \gamma) = 0. \tag{7}$$

Очевидно, что на основании (3) и (6)

$$\delta(x^*, K, \gamma) = \inf_{z \in \Omega(x^*, K, \gamma)} \|\mathscr{F} z - \mathscr{F} x^*\|_{C^0} \leq \|\mathscr{F} S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} x^* - \mathscr{F} x^*\|_{C^0}, \quad r \geq 1. \tag{8}$$

Поскольку

$$
\begin{aligned}
&\|\mathscr{F} S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} x^* - \mathscr{F} x^*\|_{C^0} \\
&\qquad = \|S_{-k_{p_r}}(S_{k_{p_r}} \mathscr{F} S_{-k_{p_r}}) S_{k_{q_r}} x^* - S_{-k_{q_r}}(S_{k_{q_r}} \mathscr{F} S_{-k_{q_r}}) S_{k_{q_r}} x^*\|_{C^0} \\
&\qquad \le \|S_{-k_{p_r}}(S_{k_{p_r}} \mathscr{F} S_{-k_{p_r}}) S_{k_{q_r}} x^* - S_{-k_{p_r}}(S_{k_{q_r}} \mathscr{F} S_{-k_{q_r}}) S_{k_{q_r}} x^*\|_{C^0} \\
&\qquad + \|S_{-k_{p_r}}(S_{k_{q_r}} \mathscr{F} S_{-k_{q_r}}) S_{k_{q_r}} x^* - S_{-k_{q_r}}(S_{k_{q_r}} \mathscr{F} S_{-k_{q_r}}) S_{k_{q_r}} x^*\|_{C^0} \\
&\qquad\qquad = \|(S_{k_{p_r}} \mathscr{F} S_{-k_{p_r}}) S_{k_{q_r}} x^* - (S_{k_{q_r}} \mathscr{F} S_{-k_{q_r}}) S_{k_{q_r}} x^*\|_{C^0} \\
&\qquad\qquad\qquad + \|S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} y - S_{-k_{q_r}} S_{k_{q_r}} y\|_{C^0} \\
&\le \sup_{x \in \mathfrak{D}_K} \|S_{k_{p_r}} \mathscr{F} S_{-k_{p_r}} x - S_{k_{q_r}} \mathscr{F} S_{-k_{q_r}} x\|_{C^0} + \|S_{-k_{p_r}} y - S_{-k_{q_r}} y\|_{C^0}, \quad r \ge 1,
\end{aligned}
$$

на основании (5), (6) и (8) выполняется равенство (7). Это противоречит (4). Следовательно, предположение, что решение $x^* \in N(\mathscr{F}, K)$ уравнения (2) не является элементом пространства B^0, ложное.

Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Требование выполнения в теореме 1 соотношения (4) существенно. В случае его невыполнения ограниченные решения уравнения (2) могут не быть почти периодическими. Также это требование не является необходимым для почти периодичности решений уравнения (2), что подтверждается следующим примером.

Пример. Рассмотрим пространство C^0 в случае $E = \mathbb{R}$ и уравнение

$$\mathscr{G} x = 0, \tag{9}$$

где $\mathscr{G} : C^0 \to C^0$ — почти периодическое в смысле определения 4 отображение и 0 — нулевой элемент пространства C^0. Предположим, что также $\mathscr{G} y = 0$, если $\|y\|_{C^0} \le 1$. Множество таких отображений непусто: элементом этого множества является отображение $\mathscr{H} : C^0 \to C^0$, определяемое соотношением

$$(\mathscr{H} x)(t) = H(x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой $H(x) = 0$, если $|x| \le 1$, и $R(H) \ne \{0\}$.

Очевидно, что каждая непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $x^* = x^*(t)$, для которой $R(x^*) \subset [-1/4, 1/4]$ (эта функция может быть элементом множества $C^0 \setminus B^0$ или множества B^0), является решением уравнения (9) и

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) = 0$$

для всех $\varepsilon \in (0, r(x^*, K))$, где $K = [-1/2, 1/2]$.

§ 4. Случай линейного уравнения (2)

Применим теорему 1 для исследования линейных почти периодических функциональных уравнений.

Обозначим через $L(C^0, C^0)$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов $A : C^0 \to C^0$ с нормой

$$\|A\|_{L(C^0, C^0)} = \sup_{\|x\|_{C^0} = 1} \|Ax\|_{C^0}.$$

Рассмотрим линейный непрерывный почти периодический в смысле определения 4 оператор $\mathscr{L} : C^0 \to C^0$ и соответствующее линейное уравнение

$$\mathscr{L} x = h, \tag{10}$$

где $h \in B^0$. Очевидно, что это уравнение — частный случай уравнения (2).

На основании теоремы 1 имеет место

Теорема 2. *Пусть* $K \in \mathscr{K}$. *Если уравнение* (10) *имеет решение* $x^* \in N(\mathscr{L}, K)$ *и выполняется соотношение*

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) > 0 \tag{11}$$

для каждого $\varepsilon \in (0, r(x^*, K))$, *то это решение почти периодическое.*

Частным случаем теоремы 2 является

Теорема 3. *Если уравнение* (10) *имеет решение* $x^* \in \mathfrak{S}$ *и выполняется соотношение*

$$\inf_{x \in \mathfrak{S},\, \|x\|_{C^0} = 1} \|\mathscr{L}x\|_{C^0} > 0, \tag{12}$$

то это решение почти периодическое.

Действительно, пусть K — произвольный элемент множества $\mathscr{K}$, для которого $x^* \in N(\mathscr{L}, K)$. В силу (12) и линейности оператора $\mathscr{L}$

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) > 0$$

для каждого $\varepsilon > 0$. Поэтому на основании теоремы 2 решение x^* уравнения (10) почти периодическое.

Замечание 3. В теоремах 2 и 3 оператор $\mathscr{L}$ может не быть почти периодическим в смысле определения 2.

Замечание 4. Множество необратимых линейных непрерывных и почти периодических в смысле определения 4 операторов $\mathscr{L} : C^0 \to C^0$, удовлетворяющих соотношению (12), не является пустым множеством, что подтверждает пример из § 5.

§ 5. Пример линейного необратимого почти периодического в смысле определения 4 оператора, удовлетворяющего соотношению (12)

В качестве банахова пространства E возьмем пространство l_1 числовых последовательностей $a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ над полем $\mathbb{K}$, для каждой из которых $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, с нормой

$$\|a\|_{l_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Покажем, что существует почти периодический в смысле определения 4 и не почти периодический в смысле определения 2 линейный непрерывный оператор $\mathscr{L} : C^0 \to C^0$, для которого выполняется соотношение (12) и $\ker \mathscr{L} \neq \{0\}$ (тогда оператор $\mathscr{L}$ не будет иметь непрерывного обратного [7]).

Построение оператора $\mathscr{L}$ осуществим в три шага (пп. 5.1–5.3).

5.1. Подпространство $\mathfrak{S}$. Очевидно, что $x + y, \alpha x \in \mathfrak{S}$, если $x, y \in \mathfrak{S}$ и $\alpha \in \mathbb{K}$. Поэтому $\mathfrak{S}$ — векторное пространство. Это пространство, очевидно, также является нормированным пространством с нормой $\|\cdot\|_{C^0}$.

Покажем, что пространство $\mathfrak{S}$ полное, т. е. замыкание множества значений каждого элемента множества $\overline{\mathfrak{S}}$ является компактным множеством.

Пусть $z \in \overline{\mathfrak{S}}$ и ε — произвольное положительное число. Существует элемент $w \in \mathfrak{S}$, для которого $\|z - w\|_{C^0} < \frac{\varepsilon}{2}$ и поэтому

$$\inf\{\|a - b\|_{l_1} : a \in \overline{R(z)},\ b \in \overline{R(w)}\} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Пусть M — конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть [7] для компактного множества $\overline{R(w)}$. Тогда на основании (13) множество M будет конечной ε-сетью для множества $\overline{R(z)}$.

Следовательно, в силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ множество $\overline{R(z)}$ компактно, а $\mathfrak{S}$ — подпространство банахова пространства C^0.

5.2. Подпространство $\overline{\mathrm{span}(Y)}$. Используем элементы

$$x_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \delta_{k3}, \dots), \quad k \in \mathbb{N},$$

пространства l_1, где δ_{kl} — символ Кронекера. Очевидно, что для произвольных чисел $p \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{K}$ и $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$ ($k_i \neq k_j$, если $i \neq j$)

$$\left\| \sum_{l=1}^{p} \beta_l x_{k_l} \right\|_{l_1} = \sum_{l=1}^{p} |\beta_l|. \tag{14}$$

Рассмотрим попарно не пересекающиеся промежутки $I_1 = (-\infty, 1)$ и $I_k = [a_{k-1}, a_k)$, $k \geq 2$, где

$$a_k = \sum_{l=m}^{k} \frac{1}{m},$$

объединение которых, очевидно, совпадает с $\mathbb{R}$.

Определим функцию $y : \mathbb{R} \to l_1$ равенством

$$y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_n(t) x_n, \tag{15}$$

где

$$\omega_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t < 0, \\ 1 - t, & \text{если } t \in [0, 1), \\ 0, & \text{если } t \geq 1, \end{cases}$$

$$\omega_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < a_{n-1}, \\ n^2(t - a_{n-1}), & \text{если } a_{n-1} \leq t < a_{n-1} + n^{-2}, \\ 1, & \text{если } a_{n-1} + n^{-2} \leq t < a_n - n^{-2}, \\ -n^2(t - a_n), & \text{если } a_n - n^{-2} \leq t < a_n, \\ 0, & \text{если } t \geq a_n, \end{cases} \quad n \geq 2. \tag{16}$$

Очевидно, что эта функция является элементом пространства C^0.

Рассмотрим множество $Y = \{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$, где S_h — оператор сдвига, что определяется формулой (1), и линейную оболочку $\mathrm{span}(Y)$ этого множества, т. е. совокупность всех элементов

$$u = \sum_{l=1}^{p} \beta_l S_{h_l} y,$$

где $p \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{C}$ и $h_1, \dots, h_p \in \mathbb{R}$ (предполагается, что $h_p > h_{p-1} > \dots > h_1$, если $p > 1$). Очевидно, что $\mathrm{span}(Y)$ — минимальное векторное подпространство пространства C^0, содержащее Y. Это пространство является нормированным пространством с нормой $\|\cdot\|_{C^0}$.

Полезным для дальнейшего является следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $u = \sum\limits_{l=1}^{p} \beta_l S_{h_l} y$ — *произвольный ненулевой элемент пространства* $\operatorname{span}(Y)$ *(здесь* $p \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{K}$, $h_1, \dots, h_p \in \mathbb{R}$ *и* $h_i \neq h_j$, *если* $i \neq j$*).*

Тогда

1) *для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существуют такие число* τ_ε *и множество* $M_\varepsilon \subset [\tau_\varepsilon, +\infty)$, *мера Лебега* $\mu(M_\varepsilon)$ *которого меньше* ε, *что выполняется соотношение*

$$\left\| \left(\sum_{l=1}^{p} \beta_l S_{h_l} y \right)(t) \right\|_{l_1} = \sum_{l=1}^{p} |\beta_l| \tag{17}$$

для всех $t \in [\tau_\varepsilon, +\infty) \setminus M_\varepsilon$;

2) *замыкание множества значений элемента* $u = u(t)$ *в пространстве* l_1 *не является компактным множеством в этом пространстве.*

Доказательство. Заметим, что

$$u(t) = \left(\sum_{l=1}^{p} \beta_l S_{h_l} y \right)(t) = \sum_{l=1}^{p} \beta_l y(t + h_l) \tag{18}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Из определений функций $y = y(t)$ и $\omega_n(t)$, $n \geq 2$ (см. (15) и (16)), и требований к числам $h_1, \dots, h_p$ вытекает, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют достаточно большое число τ_ε и множество $M_\varepsilon \subset [\tau_\varepsilon, +\infty)$, мера Лебега $\mu(M_\varepsilon)$ которого меньше ε, такие, что каждому $t \in [\tau_\varepsilon, +\infty) \setminus M_\varepsilon$ соответствуют элементы $x_{1,t}, \dots, x_{p,t} \in \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, которые попарно не совпадают между собой и для которых

$$y(t + h_l) = x_{l,t}, \quad l = \overline{1, p}. \tag{19}$$

Поэтому на основании (14), (18) и (19) выполняется соотношение (17) для всех $t \in [\tau_\varepsilon, +\infty) \setminus M_\varepsilon$, т. е. п. 1 леммы доказан.

Для доказательства п. 2 рассмотрим произвольную возрастающую последовательность $(t_n)_{n \geq 1}$ элементов множества $[\tau_\varepsilon, +\infty) \setminus M_\varepsilon$ (здесь ε — число из обоснования п. 1), для которой

$$t_{n+1} - t_n > \max_{i \neq j} |h_i - h_j|, \quad n \geq 1.$$

Тогда

$$\{x_{1,t_i}, \dots, x_{p,t_i}\} \cap \{x_{1,t_j}, \dots, x_{p,t_j}\} = \varnothing,$$

если $i \neq j$, $i \geq n, j \geq n$ и n достаточно большое. Поэтому для произвольных достаточно больших натуральных i и j $(i \neq j)$ для ненулевого элемента $u = u(t)$ выполняются соотношения

$$\|u(t_i) - u(t_j)\|_{l_1} = \left\| \sum_{l=1}^{p} \beta_l y(t_i + h_l) - \sum_{l=1}^{p} \beta_l y(t_j + h_l) \right\|_{l_1}$$
$$= \left\| \sum_{l=1}^{p} \beta_l x_{l,t_i} - \sum_{l=1}^{p} \beta_l x_{l,t_j} \right\|_{l_1} = 2 \sum_{l=1}^{p} |\beta_l| > 0.$$

Отсюда вытекает, что замыкание множества значений элемента $u = u(t)$ в пространстве l_1 не является компактным множеством.

Лемма доказана.

Таким образом, на основании леммы замыкание множества значений каждого ненулевого элемента $u = \sum\limits_{l=1}^{p} \beta_l S_{h_l} y \in \operatorname{span}(Y)$ не является компактным множеством, т. е. $u \notin \mathfrak{S}$, если $u \neq 0$.

Далее покажем, что все элементы множества $\overline{\operatorname{span}(Y)}$ обладают аналогичным свойством.

Пусть $z \in \overline{\operatorname{span}(Y)}$ и $(z_k)_{k\geq 1}$ — последовательность элементов из $\operatorname{span}(Y)$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k - z\|_{C^0} = 0. \tag{20}$$

Поскольку для каждого $k \geq 1$ существуют такие числа $p_k \in \mathbb{N}$, $\delta_{1,k}, \ldots, \delta_{p_k,k} \in \mathbb{R}$ и $h_{1,k}, \ldots, h_{p_k,k} \in \mathbb{R}$ ($h_{i,k} \neq h_{j,k}$, если $i \neq j$), что элемент $z_k = z_k(t)$ представляется в виде

$$z_k(t) = \sum_{l=1}^{p_k} \delta_{l,k} y(t + h_{l,k}),$$

на основании леммы

$$\|z_k\|_{C^0} = \sum_{l=1}^{p_k} |\delta_{l,k}|, \quad k \geq 1.$$

Как при доказательстве п. 2 леммы, для каждого числа $k \geq 1$ существует возрастающая последовательность $(t_{k,n})_{n\geq 1}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} t_{k,n} = +\infty$, такая, что

$$\|z_k(t_{k,i}) - z_k(t_{k,j})\|_{l_1} \geq 2\|z_k\|_{C^0}$$

для всех натуральных чисел i и j, не совпадающих между собой. Из этих неравенств вытекает, что

$$\begin{aligned}
&\|z(t_{k,i}) - z(t_{k,j})\|_{l_1} \\
&\quad \geq \|z_k(t_{k,i}) - z_k(t_{k,j})\|_{l_1} - \|(z(t_{k,i}) - z_k(t_{k,i})) - (z(t_{k,j}) - z_k(t_{k,j}))\|_{l_1} \\
&\quad \geq \|z_k(t_{k,i}) - z_k(t_{k,j})\|_{l_1} - \|z(t_{k,i}) - z_k(t_{k,i})\|_{l_1} - \|z(t_{k,j}) - z_k(t_{k,j})\|_{l_1} \\
&\qquad\qquad \geq 2\|z_k\|_{C^0} - 2\|z - z_k\|_{C^0}, \quad k \geq 1,\ i \neq j.
\end{aligned}$$

Отсюда и из включения $z \in \overline{\operatorname{span}(Y)}$ на основании (20) получаем, что для некоторого $\gamma > 0$ и достаточно большого натурального k_0

$$\|z(t_{k_0,i}) - z(t_{k_0,j})\|_{l_1} \geq \gamma, \quad i \neq j,$$

что означает некомпактность множества $\overline{R(z)}$ в l_1.

Итак, $\overline{\operatorname{span}(Y)}$ — подпространство банахова пространства C^0.

5.3. Оператор $\mathscr{L}$. Сначала покажем, что для каждого элемента $z = z(t)$ пространства $\overline{\operatorname{span}(Y)}$ существует предел $\lim\limits_{t\to-\infty} z(t)$ и для некоторого числа $\alpha \in \mathbb{K}$, зависящего от z,

$$\lim_{t\to-\infty} z(t) = \alpha x_1. \tag{21}$$

Очевидно, что на основании (15) и (18) для каждого $u = u(t) \in \operatorname{span}(Y)$ существует предел

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = \left(\sum_{l=1}^{p} \beta_l\right) x_1.$$

Пусть $(z_k)_{k\geqslant 1}$ — последовательность элементов пространства $\mathrm{span}(Y)$, для которой

$$\lim_{k\to\infty}\|z_k - z\|_{C^0} = 0, \tag{22}$$

и пусть

$$\lim_{t\to-\infty} z_k(t) = \alpha_k x_1, \tag{23}$$

где $\alpha_k \in \mathbb{K}$. Предположим, что последовательность $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ сходится (это требование не уменьшает общности доказательства), т. е. для некоторого $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k = \alpha. \tag{24}$$

Очевидно, что для всех $t \in \mathbb{R}$ и $k \geq 1$

$$z(t) = (z(t) - z_k(t)) + (z_k(t) - \alpha_k x_1) + (\alpha_k a - \alpha x_1) + \alpha x_1.$$

Поэтому для всех $t \in \mathbb{R}$ и $k \geq 1$

$$\|z(t) - \alpha x_1\|_{l_1} \leqslant \|z(t) - z_k(t)\|_{l_1} + \|z_k(t) - \alpha_k x_1\|_{l_1} + \|\alpha_k x_1 - \alpha x_1\|_{l_1}.$$

Отсюда и из (23) вытекает, что

$$0 \leqslant \overline{\lim_{t\to-\infty}}\|z(t) - \alpha x_1\|_{l_1} \leq \overline{\lim_{t\to-\infty}}\|z(t) - z_k(t)\|_{l_1} + \overline{\lim_{t\to-\infty}}\|z_k(t) - \alpha_k x_1\|_{l_1}$$
$$+ \overline{\lim_{t\to-\infty}}\|\alpha_k x_1 - \alpha x_1\|_{l_1} \leq \|z - z_k\|_{C^0} + \|(\alpha_k - \alpha)x_1\|_{l_1}.$$

Поскольку эти соотношения выполняются для всех $k \geq 1$, на основании (22) и (24) справедливо соотношение (21).

Рассмотрим подпространство $\mathscr{X} = \mathfrak{S}\oplus\overline{\mathrm{span}(Y)}$ пространства C^0. Заметим, что каждый элемент $x \in \mathscr{X}$ единственным образом представляется в виде $x = u + v$, где $u \in \mathfrak{S}$ и $v \in \overline{\mathrm{span}(Y)}$. Действительно, если существуют два таких представления

$$x = u_1 + v_1, \quad x = u_2 + v_2 \quad (u_1, u_2 \in \mathfrak{S},\ v_1, v_2 \in \overline{\mathrm{span}(Y)}),$$

то $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$ и, значит, при $u_1 = u_2$ получим $v_1 = v_2$, а при $u_1 \neq u_2$ будет $u_1 - u_2 = v_2 - v_1$, что противоречит тому, что $u_1 - u_2 \in \mathfrak{S}$, поскольку $v_2 - v_1 \in \overline{\mathrm{span}(Y)} \setminus \{0\}$ и $\mathfrak{S} \cap (\overline{\mathrm{span}(Y)} \setminus \{0\}) = \varnothing$.

Также рассмотрим подпространство $\mathscr{Y} = \{kx_1 : k \in \mathbb{K}\}$ пространства l_1. Используем линейный непрерывный функционал $\psi : \mathscr{Y} \to \mathbb{K}$, определенный равенством

$$\psi(kx_1) = k.$$

Очевидно, что $\|\psi\| = 1$.

Рассмотрим линейный функционал $\varphi : \mathscr{X} \to \mathbb{C}$, для которого $\|\varphi\| = 1$ и который каждому элементу $x = u+v$ ($u \in \mathfrak{S}$, $v \in \overline{\mathrm{span}(Y)}$) ставит в соответствие число

$$\varphi(x) = \varphi(u) + \varphi(v),$$

где $\varphi(u) = 0$, $\varphi(v) = \psi(\lim\limits_{t\to-\infty} v(t))$.

На основании теоремы Сухомлинова о продолжении линейного непрерывного функционала в комплексном пространстве [8] существует линейный непрерывный функционал $l : C^0 \to \mathbb{K}$, для которого $l(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in \mathscr{X}$ и $\|l\| = \|\varphi\|$.

Перейдем к построению оператора $\mathscr{L}$. Определим линейный непрерывный оператор $C : C^0 \to C^0$ с помощью формулы

$$Cx = l(x)y, \quad x \in C^0. \tag{25}$$

Покажем, что этот оператор почти периодический в смысле определения 4 и не почти периодический в смысле определения 2.

На основании (25)

$$S_h C S_{-h} x = l(S_{-h}x) S_h y, \quad h \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

для всех $x \in C^0$ и $l(S_{-h}x) = 0$, $h \in \mathbb{R}$, для всех $x \in \mathfrak{S}$. Поэтому для каждого компактного множества $K \subset E$ замыкание множества $\{S_h C S_{-h} x : h \in \mathbb{R},\ x \in \mathfrak{D}_K\}$ в пространстве C^0 компактно в C^0, поскольку это множество совпадает с $\{0\}$. Следовательно, оператор C почти периодический в смысле определения 4. Однако замыкание множества $\{S_h C S_{-h} : h \in \mathbb{R}\}$ в пространстве $L(C^0, C^0)$ не компактно в $L(C^0, C^0)$. Действительно, согласно (25) и (26) для элемента y, определяемого с помощью (15), выполняется соотношение

$$S_h C S_{-h} y = S_h y, \quad h \in \mathbb{R},$$

поэтому

$$\{S_h C S_{-h} : h \in \mathbb{R}\} y = \{S_h y : h \in \mathbb{R}\}. \tag{27}$$

Если оператор C почти периодический в смысле определения 2, т. е. множество $\{S_h C S_{-h} : h \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в пространстве $L(C^0, C^0)$, то также предкомпактным в C^0 является множество $\{S_h C S_{-h} : h \in \mathbb{R}\} y$. На основании равенства (27) предкомпактным в пространстве C^0 должно быть и множество $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$. Однако оно не обладает таким свойством, поскольку элемент y не является почти периодическим.

Оператор $\mathscr{L} : C^0 \to C^0$ определим с помощью формулы

$$\mathscr{L} x = Ix - Cx, \quad x \in C^0,$$

где $I : C^0 \to C^0$ — единичный оператор. Оператор I автономный и, следовательно, почти периодический в смысле определения 2. Поскольку оператор $C : C^0 \to C^0$ почти периодический в смысле определения 4 и не почти периодический в смысле определения 2, аналогичным свойством обладает и оператор $\mathscr{L}$.

Так как $\mathscr{L} x = Ix$ для всех $x \in \mathfrak{S}$, для $\mathscr{L}$ выполняется соотношение (12). Из соотношений $Cy = y$ и $\mathscr{L} y = Iy - Cy = y - y = 0$ получаем $\ker \mathscr{L} \neq \{0\}$.

Таким образом, построение почти периодического в смысле определения 4 и не почти периодического в смысле определения 2 линейного непрерывного оператора $\mathscr{L} : C^0 \to C^0$, для которого $\ker \mathscr{L} \neq \{0\}$ и выполняется соотношение (12), завершено.

§ 6. О применимости теорем 1–3

Операторы $\mathscr{F}$ и $\mathscr{L}$ в уравнениях (2) и (10) могут быть разностными. Поэтому результаты статьи применимы к исследованию ограниченных решений почти периодических разностных уравнений. Примерами таких уравнений могут быть следующие нелинейное и линейное разностные уравнения:

$$G(t, x(t), x(t - \Delta_1), \ldots, x(t - \Delta_m)) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

$$A_0(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} A_k(t)x(t-\Delta_k) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

где $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ — произвольные вещественные числа, $h \in B^0$, отображение $G : \mathbb{R} \times E^{m+1} \to E$ непрерывное, операторные функции $A_k : \mathbb{R} \to L(E, E)$, $k = \overline{0, m}$, непрерывны и ограничены, а операторы

$$(\mathscr{G}x)(t) = G(t, x(t), x(t-\Delta_1), \dots, x(t-\Delta_m)),$$

$$(\mathscr{A}x)(t) = A_0(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} A_k(t)x(t-\Delta_k),$$

действующие в пространстве C^0, почти периодические. Можно было бы сформулировать утверждения о почти периодичности решений уравнений (28) и (29), но мы этого не делаем, поскольку они аналогичны теоремам 1–3.

Также результаты статьи применимы к исследованию ограниченных решений почти периодических дифференциальных уравнений. Действительно, пусть C^1 — банахово пространство функций $x \in C^0$, для каждой из которых $\frac{dx}{dt} \in C^0$, с нормой

$$\|x\|_{C^1} = \max\left\{\|x\|_{C^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0}\right\}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

где $h \in B^0$, $F : \mathbb{R} \times E^2 \to E$ — непрерывное отображение и действующее из пространства C^1 в пространство C^0 отображение

$$(\mathscr{F}_1 x)(t) = F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)$$

почти периодическое. Задача о существовании почти периодических решений уравнения (30) сводится к аналогичной задаче для функционального уравнения

$$F(t, (L^{-1}y)(t), y(t) - (L^{-1}y)(t)) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Здесь $L^{-1} : C^0 \to C^1$ — обратный оператор для оператора $L : C^1 \to C^0$, определяемого формулой

$$(Lx)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что

$$(L^{-1}y)(t) = \int_0^{+\infty} e^{-s} y(t-s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

$Lx \in B^0$, если $x \in C^1 \cap B^0$, и $L^{-1}y \in C^1 \cap B^0$, если $y \in B^0$. В силу автономности L^{-1} и почти периодичности $\mathscr{F}_1$ оператор

$$(\mathscr{F}_2 y)(t) = F(t, (L^{-1}y)(t), y(t) - (L^{-1}y)(t))$$

почти периодический. Поэтому к уравнению (31) применима теорема 1, следовательно, задачу о существовании почти периодических решений дифференциального уравнения (30) можно решать с помощью теоремы 1.

Аналогичным образом теорему 1 можно применять к исследованию дифференциально-функциональных уравнений.

§ 7. Дополнительные замечания

Функционалы, аналогичные δ, применялись автором в [5, 9–16] для исследования нелинейных почти периодических функциональных, дискретных, разностных, дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений.

Приведенные в § 3–5 результаты о почти периодических решениях функциональных уравнений являются новыми. В отличие от теорем Америо [2, 6] и Фавара [2, 17] в теоремах 1–3 не используются $\mathscr{H}$-классы уравнений (2) и (10). Также в теореме 1 не используется условие разделенности решений уравнений $\mathscr{H}$-класса уравнения (2).

Исследованию почти периодических уравнений посвящено много публикаций. Для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первые теоремы о почти периодических решениях были доказаны Фаваром в [17], а для нелинейных дифференциальных уравнений — Америо в [6]. В этих работах существенно используются $\mathscr{H}$-классы исследуемых уравнений, а в [6] — также требование разделенности ограниченных решений уравнений. Результаты Фавара существенно улучшены Э. Мухамадиевым [3, 4]. Обобщениям теорем Мухамадиева посвящены работы [18–20]. Важные результаты в этом направлении также принадлежат Б. М. Левитану [1], Америо [21] и В. В. Жикову [22].

Необходимым и достаточным условиям существования и единственности ограниченных и почти периодических решений нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(x(t)) = h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение и h — элемент пространства C^0 или B^0 в случае $E = \mathbb{R}$, посвящена работа [23].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953.

2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

3. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 3. С. 269–274.

4. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 1981. Т. 30, № 3. С. 443–460.

5. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних дискретних систем, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Нелінійні коливання. 2014. Т. 17, № 3. С. 407–418.

6. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. Mat. Pura Appl. 1955. V. 39. P. 97–119.

7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

8. *Сухомлинов Г. А.* О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве // Мат. сб. 1938. Т. 3, № 2. С. 353–358.

9. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних рівнянь, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Укр. мат. журн. 2015. Т. 67, № 2. С. 230–244.

10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. 2013. Т. 16, № 1. С. 118–124.

11. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. 2013. Т. 65, № 2. С. 307–312.

12. *Слюсарчук В. Ю.* Умови періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання. 2013. Т. 16, № 3. С. 416–425.

13. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 3. С. 384–393.

14. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Math. Notes. 2014. V. 15, N 1. P. 211–215.

15. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathscr{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 6. С. 139–160.

16. *Слюсарчук В. Е.* Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 6. С. 179–192.

17. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta Math. 1927. V. 51. P. 31–81.

18. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 116, № 4. С. 483–501.

19. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 1. С. 86–104.

20. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1987. Т. 42, № 2. С. 262–267.

21. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. Mat. 1960. V. 30. P. 288–301.

22. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. 1978. Т. 23, № 1. С. 121–126.

23. *Slyusarchuk V. E.* Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations // Acta Appl. Math. 2001. V. 65, N 1–3. P. 333–341.

Статья поступила 13 декабря 2015 г.

Слюсарчук Василий Ефимович
Национальный университет водного хозяйства и природопользования,
ул. Соборная, 11, Ровно 33028, Украина
V.E.Slyusarchuk@gmail.com