Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 517.98+519.46

УЗКИЕ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В РЕШЕТОЧНО–НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. А. Плиев, С. Фан

Аннотация. Рассматривается новый класс ортогонально аддитивных узких операторов, действующих в решеточно-нормированных пространствах. Устанавливается, что каждый C-компактный, латерально по норме непрерывный, ортогонально аддитивный оператор, действующий из пространства Банаха — Канторовича V в банахово пространство Y, узкий. Также показано, что каждый мажорируемый оператор Урысона, действующий из пространства Банаха — Канторовича V в банахову решетку последовательностей Y, также узкий. Установлено, что порядковая узость мажорируемого оператора Урысона, действующего из пространства Банаха — Канторовича V в банахово пространство со смешанной нормой W, влечет порядковую узость точной мажоранты оператора.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.117

Ключевые слова: векторная решетка, банахова решетка, решеточно-нормированное пространство, ортогонально аддитивный оператор, мажорируемый оператор Урысона, узкий оператор.

Первые работы об ортогонально аддитивных операторах в векторных решетках относятся к 1990 гг. [1, 2]. В [3–5] изучались ортогонально аддитивные операторы, действующие в решеточно-нормированных пространствах. Интерес к данной тематике наблюдается и в последние годы [6–11].

1. Предварительные сведения

Приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего, а именно зафиксируем терминологию, обозначения и введем требуемые понятия. Стандартными источниками для ссылок по теории векторных решеток и решеточно-нормированных пространств являются монографии [12, 13].

Пусть V — действительное векторное пространство и E — действительная архимедова векторная решетка. Отображение $\lvert\!\cdot\!\rvert : V \to E_+$ называется *векторной нормой*, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\lvert v \rvert \geq 0$, $\lvert v \rvert = 0 \Leftrightarrow v = 0$, $v \in V$;

2) $\lvert v_1 + v_2 \rvert \leq \lvert v_1 \rvert + \lvert v_2 \rvert$, $v_1, v_2 \in V$;

3) $\lvert \lambda v \rvert = |\lambda| \lvert v \rvert$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

Векторная норма называется *разложимой*, если

4) для любых $e_1, e_2 \in E_+$ и $x \in V$ из представления $\lvert x \rvert = e_1 + e_2$ следует существование $x_1, x_2 \in V$ таких, что $x = x_1 + x_2$ и $\lvert x_k \rvert = e_k$, $k := 1, 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–51–53119).

Тройка $(V,|\cdot|,E)$ ((V,E), $(V,|\cdot|)$ или даже V для краткости) называется *решеточно-нормированным пространством*, если $|\cdot|$ — это E-значная векторная норма, заданная на V. Если векторная норма $|\cdot|$ разложима, то пространство V также называется *разложимым.* Будем говорить, что сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ (bo)-*сходится* к элементу $v\in V$, и писать $v=(bo)\text{-}\lim v_\alpha$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в E_+ такая, что $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma}(e_\gamma)=0$ и для любого $\gamma\in\Gamma$ существует индекс $\alpha(\gamma)\in\Delta$ такой, что $|v-v_{\alpha(\gamma)}|\le e_\gamma$ для любого $\alpha\ge\alpha(\gamma)$. Сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ называется (bo)-*фундаментальной*, если сеть $(v_\alpha-v_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\Delta\times\Delta}$ (bo)-сходится к нулю. Решеточно-нормированное пространство называется (bo)-*полным*, если каждая (bo)-фундаментальная сеть (bo)-сходится к элементу этого пространства. Разложимое (bo)-полное решеточно-нормированное пространство называется *пространством Банаха — Канторовича.*

Все векторные решетки, рассматриваемые ниже, архимедовы, а решеточно-нормированные пространства разложимы. Элемент y решеточно-нормированного пространства (V,E) называют *осколком* элемента $x\in V$, если $|y|\perp|x-y|$. Запись $y\sqsubseteq x$ означает, что y — осколок x. Пишем $x=\bigsqcup\limits_{i=1}^{n}x_i$, если $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ и $x_i\perp x_j$, $i\ne j$. Два осколка x_1,x_2 элемента x называют *взаимно дополнительными*, если $x=x_1\sqcup x_2$.

Множество всех осколков элемента x обозначается через $\mathscr{F}_x$. Пусть V — решеточно-нормированное пространство и $x\in V$. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *дизъюнктным деревом* относительно x, если $x_1=x$, $x_n=x_{2n}\sqcup x_{2n+1}$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Ясно, что каждый x_n является осколком x.

Пусть E — векторная решетка и X — действительное векторное пространство. Отображение $T:E\to X$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(x+y)=T(x)+T(y)$ для любых дизъюнктных элементов $x,y\in E$. Ортогонально аддитивный оператор $T:E\to X$ называется *четным*, если $T(x)=T(-x)$ для любого $x\in E$.

Из определения следует, что $T(0)=0$. Множество всех ортогонально аддитивных операторов является действительным векторным пространством относительно сложения операторов и умножения на скаляры. Ортогонально аддитивный оператор называется *порядково ограниченным*, если он отображает порядково ограниченные множества в E в порядково ограниченные множества в F.

Порядково ограниченный ортогонально аддитивный оператор $T:E\to F$ называется *абстрактным оператором Урысона.* Векторное пространство всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается через $\mathscr{U}(E,F)$. Подпространство всех четных абстрактных операторов Урысона обозначается через $\mathscr{U}^{ev}(E,F)$.

Отметим, что в случае порядковой полноты векторной решетки F пространство $\mathscr{U}^{ev}(E,F)$ отлично от нуля. Согласно [1, предложение 3.4] для любого $T\in\mathscr{U}(E,F)$ существует четный оператор $\widetilde{T}\in U_+^{ev}(E,F)$, заданный формулой

$$\widetilde{T}f=\sup\{|T|g:|g|\le|f|\}.$$

Лемма 1 [10, лемма 3.2]. *Пусть E,F — векторные решетки и решетка F порядково полна. Тогда $\mathscr{U}^{ev}(E,F)$ — порядково полная векторная подрешетка в $\mathscr{U}(E,F)$.*

Пусть (V,E) и (W,F) — решеточно-нормированные пространства. Оператор $T:V\to W$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(u+v)=Tu+Tv$

для любых $u, v \in V$, $u \perp v$. Ортогонально аддитивный оператор $T : V \to W$ называется *мажорируемым оператором Урысона*, если существует $S \in \mathscr{U}_+^{ev}(E, F)$ такой, что $\lvert Tv \rvert \leq S\lvert v \rvert$ для любого $v \in V$. В этом случае говорят, что S — *мажоранта* для T. Множество всех мажорант оператора T обозначается через $\mathrm{Domin}(T)$. Если в множестве $\mathrm{Domin}(T)$ существует наименьший элемент относительно порядка, индуцированного из $\mathscr{U}_+^{ev}(E, F)$, тогда он называется *наименьшей* или *точной* мажорантой T и обозначается через $\lvert T \rvert$. Множество всех мажорируемых операторов Урысона из V в W обозначается через $\mathscr{D}_U((V, E), (W, F))$, или $\mathscr{D}_U(V, W)$ для краткости.

Пример 1. Пусть X, Y — нормированные пространства. Рассмотрим решеточно-нормированые пространства $(X, \mathbb{R})$ и $(Y, \mathbb{R})$. Тогда отображение $T : X \to Y$ принадлежит $\mathscr{D}_U(X, Y)$ тогда и только тогда, когда существует четная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ такая, что $f(0) = 0$, множество $f(D)$ ограничено в $\mathbb{R}$ для любого ограниченного подмножества $D \subset \mathbb{R}$ и для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Tx\| \leq f(\|x\|)$.

Пример 2. Пусть E, F — векторные решетки и решетка F порядково полна. Рассмотрим случай, когда $V = E$, $W = F$ и векторная норма в (V, E) и (W, F) совпадает с модулем. Для решеточно-нормированных пространств (E, E) и (F, F) вместо более громоздкого $\mathscr{D}_U((E, E), (F, F))$ будем коротко писать $\mathscr{D}_U(E, F)$. Можно показать, что векторные пространства $\mathscr{D}_U(E, F)$ и $\mathscr{U}(E, F)$ совпадают. Действительно, если $T \in \mathscr{D}_U(E, F)$, то существует $S \in \mathscr{U}_+^{ev}(E, F)$ такой, что $|Tx| \leq S|x|$ для любого $x \in E$. Следовательно, оператор T порядково ограничен. Если же $T \in \mathscr{U}(E, F)$, то согласно [1, предложение 3.4] существует $S \in \mathscr{U}_+^{ev}(E, F)$ такой, что $|Tf| \leq S(f) \leq S(|f|)$ и $T \in \mathscr{D}_U(E, F)$.

Пример 3. Пусть (A, Σ, μ) — пространство с полной конечной мерой, E — порядковый идеал в $L_0(\mu)$ и X — банахово пространство. Пусть $N : A \times X \to X$ — функция, удовлетворяющая следующим требованиям:

(C_0) $N(t, 0) = 0$ для μ-п. в. $t \in A$;

(C_1) $N(\cdot, x)$ μ-измерима по Бохнеру для всех $x \in X$;

(C_2) $N(t, \cdot)$ непрерывна по норме X для μ-п. в. $t \in A$;

(C_3) существует измеримая функция $M : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ такая, что для μ-п. в. $t \in A$ a) $M(t, \cdot)$ возрастает на $\mathbb{R}$; b) $M(t, 0) = 0$; c) $M(t, \cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}$; d) $M(t, \cdot)$ — четная функция; e) выполняется неравенство

$$\sup_{\|x\| \leq r} \|N(t, x)\| \leq M(t, r), \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Через $\mathrm{Dom}(N)$ обозначим множество μ-измеримых по Бохнеру вектор-функций $f : A \to X$ таких, что $N(\cdot, f(\cdot)) \in L_1(\mu, X)$. Если $E(X) \subset \mathrm{Dom}(N)$ и $M(\cdot, g(\cdot)) \in L_1(\mu)$ для любого $g \in E$, то определен ортогонально аддитивный оператор $T : E(X) \to X$:

$$Tf := \int\limits_A N(t, f(t))\, d\mu(t).$$

Покажем, что $T \in \mathscr{D}_U(E(X), X)$. Действительно

$$\lvert Tf \rvert = \|Tf\|_X = \Big\| \int\limits_A N(t, f(t))\, d\mu(t) \Big\|_X \leq \int\limits_A \|N(t, f(t))\|_X \, d\mu(t)$$

$$\leq \int\limits_A M(t, \|f(t)\|_X)\, d\mu(t) = S(\|f(\cdot)\|_X) = S\lvert f \rvert,$$

где $S : E \to \mathbb{R}_+$ — интегральный функционал Урысона, $Se = \int\limits_A M(t, e(t))\, d\mu(t)$ и S — мажоранта для T.

2. Определение и некоторые свойства узких операторов

В этом разделе рассмотрим отдельный класс ортогонально аддитивных операторов в решеточно-нормированных пространствах и опишем некоторые их свойства.

Пусть (V, E) — решеточно-нормированное пространство над безатомной векторной решеткой E и X — банахово пространство. Отображение $T : V \to X$ называется *узким*, если для любого $v \in V$ и $\varepsilon > 0$ существуют взаимно дополнительные осколки v_1, v_2 элемента v такие, что $\|Tv_1 - Tv_2\| < \varepsilon$. Пусть (W, F) также решеточно-нормированное пространство. Отображение $T : V \to W$ называется *порядково узким*, если для любого $v \in V$ существует сеть разбиений $v = v^1_\alpha \sqcup v^2_\alpha$ элемента v таких, что $\big(Tv^1_\alpha - Tv^2_\alpha\big) \xrightarrow{(bo)} 0$.

Лемма 2. *Пусть (V, E) — решеточно-нормированное пространство, а (W, F) — банахово пространство со смешанной нормой. Тогда каждый ортогонально аддитивный узкий оператор $T : V \to W$ порядково узкий.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $u \in V$. Пусть $\varepsilon_n := \frac{1}{2^n}$ и $u = u^1_n \sqcup u^2_n$, $n \in \mathbb{N}$ — последовательность разбиений элемента u такая, что

$$\big\|\big|Tu^1_n - Tu^2_n\big|\big\| = \big\|\|Tu^1_n - Tu^2_n\|\big\| \leq \varepsilon_n.$$

Так как

$$f_n = \sum_{k=n}^{\infty} \big|Tu^1_k - Tu^2_k\big|, \quad f_n \in F_+,\ f_n \downarrow 0,$$

имеет место оценка $\big|Tu^1_n - Tu^2_n\big| \leq f_n$. Отсюда выводим $\big(Tu^1_n - Tu^2_n\big) \overset{(bo)}{\to} 0$. $\square$

Множества узких и порядково узких операторов совпадают, когда векторная норма в пространстве образов порядково непрерывна.

Лемма 3. *Пусть (V, E) и (W, F) — решеточно-нормированные пространства и F — банахова решетка с порядково непрерывной нормой. Тогда ортогонально аддитивный оператор $T : V \to W$ порядково узок тогда и только тогда, когда он узок.*

Доказательство. Пусть T — порядково узкий оператор. Тогда для любого $u \in V$ существует сеть разбиений $u = u^1_\alpha \sqcup u^2_\alpha$ элемента u такая, что $\big(Tu^1_\alpha - Tu^2_\alpha\big) \overset{(bo)}{\to} 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу того, что норма в F порядково непрерывна, найдется индекс $\alpha_0 \in \Lambda$ такой, что $\big\|\big|Tu^1_\alpha - Tu^2_\alpha\big|\big\| < \varepsilon$ для любого $\alpha \geq \alpha_0$. Обратное утверждение доказано выше. $\square$

3. C-компактные операторы и операторы, действующие в пространства последовательностей

Установим связь узких и C-компактных ортогонально аддитивных операторов.

Напомним, что сеть (x_α) в решеточно-нормированном пространстве называется (V, E)-*латерально* сходящейся к $x \in V$ и обозначается через $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{lat}} x$, если $x_\alpha \sqsubseteq x_\beta \sqsubseteq x$ для любых $\alpha < \beta$ и $x_\alpha \xrightarrow{(bo)} x$.

Пусть (V, E) — решеточно-нормированное пространство и F — банахово пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T : V \to F$ называется *латерально по норме непрерывным*, если он отображает латерально сходящиеся сети в V в сети, сходящиеся по норме в F; *C-компактным*, если множество $T(\mathscr{F}_v)$ предкомпактно в F для любого $v \in V$.

Множество всех C-компактных, мажорируемых операторов Урысона из V в F обозначается через $\mathscr{C}\mathscr{D}(V, F)$. Следующее полезное утверждение будет использовано ниже [14, лемма 10.19].

Лемма 4. *Пусть $(x_i)_{i=1}^n$ — конечный набор векторов конечномерного нормированного пространства X, и пусть $(\lambda_i)_{i=1}^n$ — набор действительных чисел $0 \leq \lambda_i \leq 1$ для любого i. Тогда найдется набор $(\theta_i)_{i=1}^n$, где $\theta_i \in \{0, 1\}$, такой, что*

$$\left\| \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \theta_i) x_i \right\| \leq \frac{\dim X}{2} \max_i \|x_i\|.$$

Лемма 5. *Пусть (V, E) — пространство Банаха — Канторовича над безатомной, порядково полной векторной решеткой E, F — банахово пространство и $T : V \to F$ — ортогонально аддитивный, латерально по норме непрерывный оператор. Если $e \in E_+$, $(v_n)_{n=1}^\infty \subset V$, $\lvert v_n \rvert \leq e$ и $v_n \perp v_m$ для любых $n \neq m$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|T(v_n)\| = 0$.*

Доказательство. Так как V — пространство Банаха — Канторовича, последовательность $u_n = \sum\limits_{k=1}^n v_k$ латерально сходится к $u = \sum\limits_{k=1}^\infty v_k$ и, следовательно, Tu_n сходится к Tu в F. Последовательность $(T(u_n))_{n=1}^\infty$ фундаментальна, поскольку $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|T(u_n) - T(u_m)\| = 0$. Тогда

$$\|T(u_n) - T(u_{n-1})\| = \left\| T\left(\sum_{k=1}^n v_k\right) - T\left(\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right) \right\| = \|T(v_n)\|,$$

откуда выводим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T(v_n)\| = 0$. □

Лемма 6. *Пусть (V, E) — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной безатомной векторной решеткой E, F — банахово пространство, $T : V \to F$ — ортогонально аддитивный, латерально по норме непрерывный оператор и $v \in V$. Тогда существуют взаимно дополнительные осколки v_1, v_2 элемента v такие, что $\|T(v_1)\| = \|T(v_2)\|$.*

Доказательство. Возьмем пару взаимно дополнительных осколков v_1, v_2 элемента v. Если $\|T(v_1)\| = \|T(v_2)\|$, то доказывать нечего. Будем полагать, что $\|T(v_1)\| - \|T(v_2)\| > 0$. Рассмотрим частично упорядоченное множество

$$D = \{w \sqsubseteq v_1 : \|T(v_1 - w)\| - \|T(v_2 + w)\| \geq 0\},$$

где $w_1 \leq w_2$ тогда и только тогда, когда $w_1 \sqsubseteq w_2$. Если $B \subseteq D$ — цепь, то $w^\star = \vee B \in D$ согласно латеральной по норме непрерывности оператора T. Воспользовавшись леммой Цорна, найдем максимальный элемент $w_0 \in D$. Тогда $\|T(v_1 - w_0)\| - \|T(v_2 + w_0)\| = 0$. Действительно, предположим противное:

$$\alpha = \|T(v_1 - w_0)\| - \|T(v_2 + w_0)\| > 0.$$

Тогда в силу безатомности решетки E, разложимости векторной нормы пространства V и непрерывности оператора T найдется ненулевой осколок $f \sqsubseteq (v_1 - w_0)$ такой, что $\|Tf\| < \frac{\alpha}{4}$ и $\|T(-f)\| < \frac{\alpha}{4}$, но $w_0 \perp f$, $w_0 + f \sqsubseteq v_1$, откуда

$$\begin{aligned}
&\|T(v_1 - w_0 - f)\| - \|T(v_2 + w_0 + f)\| \\
&\qquad = \|T(v_1 - w_0) + T(-f)\| - \|T(v_2 + w_0) + T(f)\| \\
&\qquad \geq \|T(v_1 - w_0)\| - \|T(-f)\| - \|T(v_2 + w_0)\| - \|T(f)\| > \frac{\alpha}{2} > 0,
\end{aligned}$$

что противоречит максимальности элемента w_0. $\square$

Лемма 7. *Пусть (V, E), F, $T : V \to F$ такие, как в лемме 6, $v \in V$ и $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ — дизъюнктное дерево на v. Если $\|T(v_{2n})\| = \|T(v_{2n+1})\|$ для любого $n \geq 1$, то*

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_m = 0, \quad \text{где } \gamma_m = \max_{2^m \leq i < 2^{m+1}} \|T(v_i)\|.$$

Доказательство. *Этажом уровня m* дизъюнктного дерева $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ называется множество $\mathscr{E}_m = \{v_i : 2^m \leq i < 2^{m+1}\}$. Пусть $\varepsilon = \limsup\limits_{m\to\infty} \gamma_m$. Достаточно доказать, что $\varepsilon = 0$. Предположим обратное, что $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся этаж уровня m и $v_i \in \mathscr{E}_m$ такие, что дизъюнктное дерево $\left(v_i^m\right)_{m=1}^{\infty}$ на v_i, являющееся ограничением исходного дерева на v_i, содержит бесконечное число элементов $v_i^{m_k}$ таких, что $\left\|Tv_i^{m_k}\right\| \geq \varepsilon$. Теперь можно построить последовательность попарно дизъюнктных элементов $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ таких, что $\|T(\xi_k)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Последовательность строится следующим образом. Будем полагать, что $\|Tv_i\| \geq \varepsilon$, тогда $\|Tv_{2i}\| = \|Tv_{2i+1}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Хотя бы одно из дизъюнктных деревьев $\left(v_{2i}^m\right)_{m=1}^{\infty}$ и $\left(v_{2i+1}^m\right)_{m=1}^{\infty}$ содержит бесконечное множество элементов w таких, что $\|Tw\| \geq \varepsilon$. Не ограничивая общности, будем полагать, что это $\left(v_{2i+1}^m\right)_{m=1}^{\infty}$. Тогда в качестве первого элемента последовательности выберем элемент $\xi_1 = v_{2i}$. На следующем шаге в дизъюнктном дереве $\left(v_{2i+1}^m\right)_{m=1}^{\infty}$ выберем элемент w такой, что $\|Tw\| \geq \varepsilon$. Снова разбиваем элемент w на два взаимно дополнительных осколка w_1 и w_2 таких, что $\|Tw_1\| = \|Tw_2\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть дизъюнктное дерево $\left(w_2^m\right)_{m=1}^{\infty}$ содержит бесконечное множество элементов g таких, что $\|Tg\| \geq \varepsilon$. В качестве второго элемента последовательности выбираем элемент $\xi_2 = w_1$. Продолжая процесс неограниченно, получаем искомую последовательность. Но существование такой последовательности невозможно согласно лемме 5; противоречие. $\square$

Лемма 8. *Пусть (V, E) — пространство Банаха — Канторовича над безатомной порядково полной векторной решеткой E и F — конечномерное банахово пространство. Тогда каждый латерально по норме непрерывный C-компактный оператор $T : V \to F$ узкий.*

Доказательство. Возьмем произвольные $v \in V$ и $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 6 существует дизъюнктное дерево (v_n) на v такое, что $\|T(v_{2n})\| = \|T(v_{2n+1})\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно лемме 7 найдется номер m такой, что $\gamma_m \dim F < \varepsilon$. По лемме 4 найдутся такие $\lambda_i \in \{0, 1\}$, $i = 2^m, \dots, 2^{m+1} - 1$, что

$$\left\| 2 \sum_{i=2^m}^{2^{m+1}-1} \left(\frac{1}{2} - \lambda_i\right) T(v_i) \right\| \leq \dim F \max_{2^m \leq i < 2^{m+1}} \|T(v_i)\| = \gamma_m \dim F < \varepsilon. \tag{1}$$

Отметим, что для $I_1 = \{i = 2^m, \dots, 2^{m+1} - 1 : \lambda_i = 0\}$ и $I_2 = \{i = 2^m, \dots, 2^{m+1} - 1 : \lambda_i = 1\}$ векторы $w_j = \sum\limits_{i \in I_j} v_i$, $j = 1, 2$, являются взаимно дополнительными осколками элемента v. Согласно (1) выводим окончательную оценку

$$\|T(w_1) - T(w_2)\| = \left\| \sum_{i=2^m}^{2^{m+1}-1} (1 - 2\lambda_i) T(v_i) \right\| < \varepsilon. \quad \square$$

Докажем первый основной результат данного раздела.

Теорема 1. *Пусть (V, E) — пространство Банаха — Канторовича над безатомной порядково полной векторной решеткой E и F — банахово пространство. Тогда каждый ортогонально аддитивный латерально по норме непрерывный C-компактный оператор $T : V \to F$ узкий.*

Доказательство. Банахово пространство F можем рассматривать как замкнутое линейное подпространство банахова пространства $l_\infty(B_{F^\star})$ ограниченных функций на компакте. Это можно записать в виде цепочки вложений:

$$F \hookrightarrow F^{\star\star} \hookrightarrow l_\infty(B_{F^\star}),$$

где под $\hookrightarrow$ понимаем изометрическое вложение, а через $B_{F^\star}$ обозначается единичный шар банахова пространства $F^\star$. Известно, что если H — относительно компактное подмножество $l_\infty(D)$ для некоторого бесконечного множества D и $\varepsilon > 0$, то существует оператор конечного ранга $S \in \mathscr{L}(l_\infty(D))$ такой, что $\|x - Sx\| \leq \varepsilon$ для любого $x \in H$ [14, лемма 10.25]. Для банахова пространства X через $\mathscr{L}(X)$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов, действующих в X. Возьмем произвольный элемент $v \in V$ и $\varepsilon > 0$. Так как T — C-компактный оператор, $K = T(\mathscr{F}_v)$ — предкомпактное множество в F и, следовательно, в $l_\infty(B_{F^\star})$. Найдется линейный непрерывный оператор конечного ранга $S \in \mathscr{L}(l_\infty(B_{F^\star}))$ такой, что $\|w - Sw\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ для любого $w \in K$. Тогда $R = S \circ T$ — ортогонально аддитивный латерально по норме непрерывный оператор конечного ранга. Согласно лемме 8 найдутся взаимно дополнительные осколки v_1, v_2 элемента v такие, что $\|Rv_1 - Rv_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \|Tv_1 - Tv_2\| &= \|Tv_1 - Tv_2 + S(Tv_1) - S(Tv_2) - S(Tv_1) + S(Tv_2)\| \\ &= \|Tv_1 - Tv_2 + Rv_1 - Rv_2 - S(Tv_1) + S(Tv_2)\| \\ &\leq \|Rv_1 - Rv_2\| + \|Tv_1 - S(Tv_1)\| + \|Tv_2 - S(Tv_2)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Сформулируем второй основной результат данного раздела.

Теорема 2. *Пусть (V, E) — пространство Банаха — Канторовича над безатомной порядково полной векторной решеткой E и Γ — некоторое множество. Через $X = X(\Gamma)$ обозначим одну из банаховых решеток $c_0(\Gamma)$ или $\ell_p(\Gamma)$, где $1 \leq p < \infty$. Тогда каждый латерально по норме непрерывный мажорируемый оператор Урысона $T : V \to X$ узкий.*

Доказательство. Пусть $T : V \to X$ — мажорируемый оператор Урысона, $v \in V$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|Tu| \leq \lvert T \rvert \lvert u \rvert \leq \lvert T \rvert \lvert v \rvert = x \in X_+$$

для любого $u \sqsubseteq v$. Можно выбрать конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такое, что

1) $|x(\gamma)| \le \varepsilon/4$ для любого $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, если $X = c_0(\Gamma)$;
2) $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0} (x(\gamma))^p \le (\varepsilon/4)^p$, если $X = \ell_p(\Gamma)$.

Пусть P — непрерывный проектор из X на $X(\Gamma_0)$ вдоль $X(\Gamma \setminus \Gamma_0)$ и $Q = \mathrm{Id} - P$ — ортогональный проектор. Операторы P и Q — положительные линейные ограниченные операторы. Так как $S = P \circ T : V \to X(\Gamma_0)$ — конечномерный латерально по норме непрерывный ортогонально аддитивный оператор конечного ранга, по лемме 8 S — узкий оператор и, следовательно, найдутся взаимно дополнительные осколки v_1, v_2 элемента v такие, что $\|Sv_1 - Sv_2\| < \varepsilon/2$. Поскольку $|Tv_i| \le x$, в силу положительности оператора Q имеем $Q(Tv_i) \le Qx$, тем самым $\|Q(Tv_i)\| \le \|Qx\|$ для $i = 1, 2$. Более того, $\|Qx\| \le \varepsilon/4$ и

$$\|Tv_1 - Tv_2\| = \|Sv_1 + Q(Tv_1) - Sv_2 - Q(Tv_2)\|$$
$$\le \|Sv_1 - Sv_2\| + \|Q(Tv_1)\| + \|Q(Tv_2)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|Qx\| + \|Qx\| < \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 2 может быть обобщена следующим образом.

Пусть F — упорядоченное векторное пространство. Будем говорить, что линейный оператор $G : F \to F$ является *квазимонотонным с константой* $M > 0$, если для любых $x, y \in F^+$ неравенство $x \le y$ влечет $Gx \le MGy$. Оператор $G : F \to F$ называется *квазимонотонным*, если он квазимонотонен с константой $M = 1$.

Отметим, что квазимонотонные операторы — в точности положительные операторы.

Напомним, что последовательность элементов $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства F называется *базисом*, если для любого $f \in F$ существует единственная последовательность скаляров $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n$. Любой базис (f_n) банахова пространства порождает соответствующие *базисные проекторы* (P_n), заданные формулами

$$P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,$$

которые равномерно непрерывны. Более подробное изложение можно найти в [15]. Дополнительные к P_n проекторы обозначим через $Q_n = \mathrm{Id} - P_n$, где Id — тождественный оператор в F, указанные проекторы называются *дополнительными* относительно базиса $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Базис (f_n) банаховой решетки F называется *d-квазимонотонным*, если существует константа $M > 0$ такая, что дополнительные проекторы квазимонотонны с константой M.

Теорема 3. *Пусть (V, E) — пространство Банаха — Канторовича над безатомной порядково полной векторной решеткой E и F — банахова решетка с d-квазимонотонным базисом. Тогда каждый мажорируемый латерально по норме непрерывный оператор Урысона $T : V \to F$ узкий.*

Доказательство. Пусть (Q_n) — дополнительные к базисным проекторы в F, где (P_n) — базисные проекторы, $M > 0$ — константа такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор $Q_n = \mathrm{Id} - P_n$ квазимонотонен с константой M. Пусть $T : V \to F$ — мажорируемый оператор Урысона, $v \in V$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $f \in F_+$ такой, что $|Tu| \leq f$ для любых $u \sqsubseteq v$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} P_n f = f$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n f = 0$. Выберем n таким, что

$$\|Q_n f\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{2}$$

Поскольку $S = P_n \circ T : V \to E_n$ — мажорируемый оператор Урысона конечного ранга, согласно лемме 8 оператор S узок. Таким образом, найдутся взаимно дополнительные осколки v_1, v_2 элемента v такие, что $\|Sv_1 - Sv_2\| < \varepsilon/2$. В силу оценки $|Tv_i| \leq f$ и согласно квазимонотонности проекторов Q_n получаем $\|Q_n(Tv_i)\| \leq M\|Q_n f\|$, где $i = 1, 2$. Тогда с учетом (2)

$$\|Tv_1 - Tv_2\| = \|Sv_1 + Q(Tv_1) - Sv_2 - Q(Tv_2)\|$$
$$\leq \|Sv_1 - Sv_2\| + \|Q(Tv_1)\| + \|Q(Tv_2)\| < \frac{\varepsilon}{2} + M\|Qf\| + M\|Qf\| < \varepsilon. \quad \square$$

4. Проблема мажорации для узких операторов

В настоящем разделе изучим проблему мажорации для узких мажорируемых операторов Урысона. Рассмотрим множество

$$\widetilde{E}_+ = \left\{ e \in E_+ : e = \bigsqcup_{i=1}^{n} \lvert v_i \rvert,\ v_i \in V,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Теорема 4 [10, теоремы 3.4, 3.7]. *Пусть (V, E), (W, F) — решеточно-нормированные пространства, где V разложимо и решетка F порядково полна. Тогда каждый мажорируемый оператор Урысона $T : V \to W$ обладает точной мажорантой $\lvert T \rvert$, которая вычисляется по следующим формулам:*

(1) $\lvert T \rvert(e) = \sup\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \lvert Tu_i \rvert : \coprod\limits_{i=1}^{n} \lvert u_i \rvert = e,\ n \in \mathbb{N} \right\}$, $e \in \widetilde{E}_+$;

(2) $\lvert T \rvert(e) = \sup\{\lvert T \rvert(e_0) : e_0 \in \widetilde{E}_+,\ e_0 \sqsubseteq e\}$, $e \in E_+$;

(3) $\lvert T \rvert(e) = \lvert T \rvert(e_+) + \lvert T \rvert(e_-)$, $e \in E$.

Теорема 5. *Пусть (V, E) — решеточно-нормированное пространство, где решетка E безатомна, (W, F) — банахово пространство со смешанной нормой, F — банахова решетка с порядково непрерывной нормой и T — мажорируемый оператор Урысона из V в W. Если оператор T порядково узок, то точная мажоранта $\lvert T \rvert : E \to F$ также порядково узка.*

Доказательство. Согласно лемме 3 вместо порядковой узости можно рассматривать узость. Возьмем произвольный элемент $e \in \widetilde{E}_+$ и $\varepsilon > 0$. Множество $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \lvert Tv_i \rvert : \coprod\limits_{i=1}^{n} \lvert v_i \rvert = e,\ n \in \mathbb{N} \right\}$ направлено вверх, в силу чего существует конечный набор $\{v_1^\alpha, \ldots, v_{n_\alpha}^\alpha\} \subset V$, $\alpha \in \Lambda$, такой, что $e = \coprod\limits_{i=1}^{n_\alpha} \lvert v_i^\alpha \rvert$, $\alpha \in \Lambda$, и $\left(\lvert T \rvert(e) - \sum\limits_{i=1}^{n_\alpha} \lvert Tv_i^\alpha \rvert \right) \leq y_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$, где $y_\alpha \downarrow 0$. Так как норма в F порядково непрерывна, можно полагать, что $\left\| \lvert T \rvert(e) - \sum\limits_{i=1}^{n_\alpha} \lvert Tv_i^\alpha \rvert \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ для некоторого $\{v_1^\alpha, \ldots, v_{n_\alpha}^\alpha\}$, $\alpha \in \Lambda$. В силу того, что T — узкий оператор, найдется конечное множество $v_i^\alpha = u_i^\alpha \sqcup w_i^\alpha$, $i \in \{1, \ldots, n_\alpha\}$, такое, что $\left\| |Tu_i^\alpha - Tw_i^\alpha| \right\| < \frac{\varepsilon}{3n_\alpha}$ для любого $i \in \{1, \dots, n_\alpha\}$. Пусть $f^\alpha = \coprod_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|} u_i^\alpha \mathbf{|}$ и $g^\alpha = \coprod_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|} w_i^\alpha \mathbf{|}$. Тогда

$$0 \le \left\| \mathbf{|}T\mathbf{|}(f^\alpha) - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tu_i^\alpha\mathbf{|} \right\| \le \left\| \mathbf{|}T\mathbf{|}(e) - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tv_i^\alpha\mathbf{|} \right\|,$$

$$0 \le \left\| \mathbf{|}T\mathbf{|}(g^\alpha) - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tw_i^\alpha\mathbf{|} \right\| \le \left\| \mathbf{|}T\mathbf{|}(e) - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tv_i^\alpha\mathbf{|} \right\|.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{|}T\mathbf{|}f^\alpha - \mathbf{|}T\mathbf{|}g^\alpha\| &= \Bigg\| \mathbf{|}T\mathbf{|}f^\alpha - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tu_i^\alpha\mathbf{|} + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tu_i^\alpha\mathbf{|} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tw_i^\alpha\mathbf{|} + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tw_i^\alpha\mathbf{|} - \mathbf{|}T\mathbf{|}g^\alpha \Bigg\| \le \left\| \mathbf{|}T\mathbf{|}f^\alpha - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tu_i^\alpha\mathbf{|} \right\| \\
&\quad + \left\| \mathbf{|}T\mathbf{|}g^\alpha - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tw_i^\alpha\mathbf{|} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tu_i^\alpha\mathbf{|} - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tw_i^\alpha\mathbf{|} \right\| \\
&\le 2\left(\left\| \mathbf{|}T\mathbf{|}(e) - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tv_i^\alpha\mathbf{|} \right\| \right) + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \left\| \mathbf{|}Tu_i^\alpha\mathbf{|} - \mathbf{|}Tw_i^\alpha\mathbf{|} \right\| \\
&\le 2\left(\left\| \mathbf{|}T\mathbf{|}(e) - \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{|}Tv_i^\alpha\mathbf{|} \right\| \right) + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \|\|Tu_i^\alpha - Tw_i^\alpha\|\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Следовательно, $e = f^\alpha \sqcup g^\alpha$ и f^α, g^α — взаимно дополнительные осколки элемента e с требуемыми свойствами. Пусть теперь $e \in E_+$. Отметим, что множество $D = \{f \sqsubseteq e : f \in \widetilde{E}_+\}$ направлено вверх, где под $f_1 \le f_2$ понимаем $f_1 \sqsubseteq f_2$. Действительно, пусть $f_1 = \coprod_{i=1}^{k} \mathbf{|}u_i\mathbf{|}$, $f_1 \sqsubseteq e$, $f_2 = \coprod_{j=1}^{n} \mathbf{|}w_j\mathbf{|}$, $f_2 \sqsubseteq e$, $u_i, w_j \in V$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$. Тогда в силу разложимости векторной нормы найдется множество попарно дизъюнктных элементов (v_{ij}), $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$, таких, что $u_i = \coprod_{j=1}^{n} v_{ij}$ для любого $1 \le i \le k$ и $w_j = \coprod_{i=1}^{k} v_{ij}$ для любого $1 \le j \le n$. Пусть $f = \coprod \mathbf{|}v_{ij}\mathbf{|}$. Ясно, что $f \in D$, $f_i \sqsubseteq f$ и $\mathbf{|}T\mathbf{|}f_i \le \mathbf{|}T\mathbf{|}f$, где $i \in \{1, 2\}$. Пусть $(e_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, $e_\alpha \in D$, — сеть, где $\mathbf{|}T\mathbf{|} = \sup\limits_\alpha \mathbf{|}T\mathbf{|}e_\alpha$. Возьмем $\alpha \in \Lambda$ такое, что $\|\mathbf{|}T\mathbf{|}e - \mathbf{|}T\mathbf{|}e_\alpha\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Согласно предположению для любого $e_\alpha \in D$ найдется разбиение $e_\alpha = f_\alpha \sqcup g_\alpha$ такое, что $\|\mathbf{|}T\mathbf{|}f_\alpha - \mathbf{|}T\mathbf{|}g_\alpha\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{|}T\mathbf{|}(e - e_\alpha + f_\alpha) - \mathbf{|}T\mathbf{|}g_\alpha\| &= \|\mathbf{|}T\mathbf{|}(e - e_\alpha) + \mathbf{|}T\mathbf{|}f_\alpha - \mathbf{|}T\mathbf{|}g_\alpha\| \\
&\le \|\mathbf{|}T\mathbf{|}e - \mathbf{|}T\mathbf{|}e_\alpha\| + \|\mathbf{|}T\mathbf{|}f_\alpha - \mathbf{|}T\mathbf{|}g_\alpha\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Следовательно, $e = ((e - e_\alpha) \sqcup f_\alpha)) \sqcup g_\alpha$ — требуемые взаимно дополнительно осколки элемента e. Так как $\mathbf{|}T\mathbf{|} \in \mathscr{U}_+^{ev}(E, F)$, то $\mathbf{|}T\mathbf{|}(e) = \mathbf{|}T\mathbf{|}(-e)$ для любого $e \in (-E_+)$, и если $e = f \sqcup g$ — разложение элемента e, то $-e = (-f) \sqcup (-g)$ также является разложением элемента $-e$. Наконец, для произвольного элемента $e \in E$ получаем $e = e_+ - e_-$ и $\mathbf{|}T\mathbf{|}(e) = \mathbf{|}T\mathbf{|}(e_+) + \mathbf{|}T\mathbf{|}(e_-)$. Таким образом, если $e_+ = f_1 \sqcup f_2$ и $e_- = g_1 \sqcup g_2$ — взаимно дополнительные осколки элементов e_+ и e_- такие, что

$$\|\mathbf{|}T\mathbf{|}f_1 - \mathbf{|}T\mathbf{|}f_2\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\mathbf{|}T\mathbf{|}g_1 - \mathbf{|}T\mathbf{|}g_2\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то

$$\begin{aligned}\|{\mid}T{\mid}(f_1+g_1)-{\mid}T{\mid}(f_2+g_2)\| &= \|{\mid}T{\mid}f_1-{\mid}T{\mid}f_2+{\mid}T{\mid}g_1-{\mid}T{\mid}g_2\| \\ &\leq \|{\mid}T{\mid}f_1-{\mid}T{\mid}f_2\|+\|{\mid}T{\mid}g_1-{\mid}T{\mid}g_2\|<\varepsilon\end{aligned}$$

и (f_1+g_1) и (f_2+g_2) — требуемые взаимно дополнительные осколки элемента e. $\square$

В качестве заключительного комментария отметим, что авторам неизвестно, возможно ли в условиях теоремы 5 отказаться от порядковой непрерывности нормы для решетки F.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензенту за внимательное чтение текста и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mazón J. M., Segura de León S.* Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1990. V. 35, N 4. P. 329–353.
2. *Mazón J. M., Segura de León S.* Uryson operators // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1990. V. 35, N 5. P. 431–449.
3. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Ортогонально аддитивные операторы в решеточно нормированных пространствах // Владикав. мат. журн. 1999. № 3. С. 33–43.
4. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Слабое интегральное представление мажорируемого ортогонально аддитивного оператора // Владикав. мат. журн. 1999. № 4. С. 22–39.
5. *Плиев М. А.* Операторы Урысона в пространствах со смешанной нормой // Владикав. мат. журн. 2007. № 3. С. 47–57.
6. *Pliev M.* Domination problem for narrow orthogonally additive operators // Positivity. DOI 10.1007/s11117-016-0401-9.
7. *Ben Amor M. A., Pliev M.* Laterally continuous part of an abstract Uryson operator // Int. J. Math. Anal. 2013. V. 7, N 58. P. 2853–2860.
8. *Gumenchuk A. V., Pliev M. A., Popov M. M.* Extensions of orthogonally additive operators // Mat. Stud. 2014. V. 41, N 2. P. 214–219.
9. *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity. 2014. V. 18, N 4. P. 641–667.
10. *Pliev M., Popov M.* Dominated Uryson operators // Int. J. Math. Anal. 2014. V. 8, N 22. P. 1051–1059.
11. *Pliev M. A., Weber M. R.* Disjointness and order projections in the vector lattices of abstract Uryson operators // Positivity. DOI 10.1007/s11117-015-0381-1.
12. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
13. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
14. *Popov M., Randrianantoanina B.* Narrow operators on function spaces and vector lattices. Berlin: De Gruyter, 2013. (De Gruyter Stud. Math.; V. 45).
15. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. V. 1. Sequence spaces. Berlin: Springer-Verl., 1977.

Статья поступила 25 января 2016 г.

Плиев Марат Амурханович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362025;
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198
plimarat@yandex.ru

Фан Сяочунь (Fang Xiaochun)
Department of Mathematics, Tongji University,
Shanghai 200092, China
xfang@tongji.edu.cn