Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 512.542

О ПРОНОРМАЛЬНОСТИ И СИЛЬНОЙ ПРОНОРМАЛЬНОСТИ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

М. Н. Нестеров

Аннотация. Исследуются некоторые известные вопросы, связанные со свойствами пронормальности и сильной пронормальности холловых подгрупп. В частности, построены примеры конечных групп: а) обладающих холловой подгруппой, непронормальной в своем нормальном замыкании (что отрицательно решает проблему 18.32 из «Коуровской тетради»); б) обладающих пронормальной, но не сильно пронормальной холловой подгруппой; в) простых и обладающих не сильно пронормальной холловой подгруппой (что отрицательно решает проблему 17.45(б) из «Коуровской тетради»).

DOI 10.17377/smzh.2017.58.116

Ключевые слова: холлова подгруппа, пронормальная подгруппа, сильно пронормальная подгруппа, конечная простая группа.

Введение

Всюду через π обозначается некоторое фиксированное множество простых чисел, а через π' — дополнение к нему в множестве всех простых чисел.

Подгруппа H группы G называется *π-холловой*, если она является π-группой (т. е. все простые делители ее порядка лежат в π), а ее индекс не делится на числа из π. Понятие π-холловой подгруппы обобщает понятие силовской p-подгруппы и совпадает с ним, если $\pi = \{p\}$. Множество π-холловых подгрупп группы G будем обозначать символом $\mathrm{Hall}_\pi(G)$. Подгруппу, которая является π-холловой для некоторого множества π, будем называть просто *холловой*. Другими словами, подгруппа H группы G холлова, если $(|H|, |G : H|) = 1$.

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g\rangle$. Классическими примерами пронормальных подгрупп являются

- нормальные подгруппы;
- максимальные подгруппы;
- силовские подгруппы конечных групп;
- холловы подгруппы конечных разрешимых групп.

Известно, что в неразрешимой конечной группе может существовать более одного класса сопряженных π-холловых подгрупп и, как следствие, холловы подгруппы могут оказаться непронормальными. Рассмотрим группу $X = \mathrm{GL}_3(2)$ порядка $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ и в ней стабилизатор H прямой и стабилизатор K

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14–21–00065).

© **2017 Нестеров М. Н.**

плоскости в естественном модуле. Легко видеть, что H и K являются несопряженными $\{2,3\}$-холловыми подгруппами. Регулярное сплетение $G = X \wr \mathbb{Z}_5$ с базой

$$Y = \underbrace{X \times \dots \times X}_{5 \text{ раз}}$$

содержит непронормальную $\{2,3\}$-холлову подгруппу

$$U = K \times \underbrace{H \times \dots \times H}_{4 \text{ раза}}.$$

В теории холловых подгрупп изучение вопросов пронормальности оказывается чрезвычайно важным (см. [1–8]). Так, именно в терминах пронормальности в [2] сформулированы результаты, обобщающие и усиливающие другие, более ранние, результаты о холловых подгруппах, полученные в [3, 9, 10] и др. работах.

Дальнейшее изучение свойства пронормальности для холловых подгрупп упирается в ряд открытых вопросов, сформулированных в [1–3], часть из которых записаны также в «Коуровскую тетрадь» [11]. В данной работе дадим ответ на некоторые из этих вопросов.

Прежде всего рассмотрим следующую проблему.

Проблема 1 [11, 18.32; 3, гипотеза 11]. *Всегда ли холлова подгруппа конечной группы пронормальна в своем нормальном замыкании?*

Заметим, что нормальное замыкание $\{2,3\}$-холловой подгруппы U из примера выше совпадает с базой Y сплетения $X \wr \mathbb{Z}_5$ и подгруппа U пронормальна в Y. В [5] доказана пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах. Поскольку нормальное замыкание любой нетривиальной подгруппы конечной простой группы совпадает со всей группой, положительное решение проблемы 1 можно было бы рассматривать как обобщение результата, полученного в [5].

Однако в общем случае проблема 1 имеет отрицательное решение, которое дает

Теорема 1. *Пусть множество простых чисел π таково, что*

(1) *существует конечная простая группа X, содержащая более одного класса сопряженных π-холловых подгрупп;*

(2) *существует конечная простая группа Y, содержащая π-холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в Y.*

Тогда в регулярном сплетении $G = X \wr Y$ существует непронормальная π-холлова подгруппа, нормальное замыкание которой совпадает с G.

Условиям теоремы удовлетворяет, например, множество $\{2,3\}$. Действительно, группа

$$X = \mathrm{GL}_3(2) \simeq \mathrm{PSL}_3(2)$$

содержит два класса сопряженных $\{2,3\}$-холловых подгрупп. Далее, $\{2,3\}$-холлова подгруппа H группы T верхне-треугольных матриц группы

$$Y = \mathrm{SL}_2(16) \simeq \mathrm{PSL}_2(16)$$

отлична от $T = N_T(H)$ (поскольку порядок группы T делится на 5), а значит, и от нормализатора подгруппы H в Y. Кроме того, H является $\{2,3\}$-холловой подгруппой в Y. Значит, по теореме 1 группа

$$G = \mathrm{SL}_3(2) \wr \mathrm{SL}_2(16)$$

обладает непронормальной $\{2,3\}$-холловой подгруппой, у которой нормальное замыкание совпадает с G.

Из теоремы 1 для конечных множеств π вытекает

Следствие 1. *Пусть множество простых чисел π конечно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны в своем нормальном замыкании;*

(2) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны;*

(3) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы сопряжены.*

Согласно [1] подгруппу H группы G называют *сильно пронормальной*, если для любой подгруппы $K \leq H$ и любого элемента $g \in G$ подгруппа K^g сопряжена с некоторой подгруппой из H (но необязательно с K) с помощью элемента из $\langle H, K^g \rangle$. Ясно, что сильно пронормальная подгруппа пронормальна. Приведенные выше примеры пронормальных подгрупп (нормальная, максимальная, силовские подгруппы и холловы подгруппы в разрешимых группах) будут также примерами сильно пронормальных подгрупп. В то же время [6] построены примеры пронормальных, но не сильно пронормальных подгрупп. В [8] показано, что если (при фиксированном π) для π-подгрупп группы G выполняется полный аналог теоремы Силова, то π-холловы подгруппы в G сильно пронормальны.

Известны следующие проблемы.

Проблема 2 [11, 17.45(б); 3, гипотеза 7; 1, проблема 7.1]. *Верно ли, что холловы подгруппы конечных простых групп сильно пронормальны?*

Проблема 3 [3, гипотеза 9]. *Всегда ли пронормальная холлова подгруппа конечной группы сильно пронормальна?*

Отрицательное решение проблемы 3 может быть получено из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Допустим, что выполняются следующие условия:*

(1) *некоторая конечная группа X содержит более одного класса сопряженных пронормальных π-холловых подгрупп;*

(2) *некоторая конечная группа Y содержит собственную пронормальную π-холлову подгруппу M и $M = N_Y(M)$.*

Рассмотрим произвольное транзитивное подстановочное действие

$$\rho : Y \to S(\Omega)$$

группы Y на некотором множестве Ω, при котором подгруппа M действует нетранзитивно[1)]*. Тогда подстановочное сплетение $G = X \wr_\rho Y$ обладает π-холловой подгруппой U такой, что*

(a) *U пронормальна в G;*

(b) *$(U \cap A)^A \neq (U \cap A)^G$, где A — база сплетения $X \wr_\rho Y$;*

(c) *U не сильно пронормальна в G.*

Условиям теоремы удовлетворяет, например, множество $\{2,3\}$: группа

$$X = \mathrm{PSL}_2(7) \simeq \mathrm{GL}_3(2)$$

[1)] Такое действие, очевидно, существует: можно рассмотреть действие группы Y правыми сдвигами на множестве правых смежных классов под подгруппе M.

содержит два класса сопряженных $\{2,3\}$-холловых подгрупп, и группа $Y = S_5$ содержит собственную пронормальную $\{2,3\}$-холлову подгруппу $M = N_Y(M) = S_4$, причем подгруппа S_4 группы S_5 нетранзитивна. Значит, по теореме 2 группа $P = \mathrm{PSL}_2(7) \wr S_5$ обладает пронормальной, но не сильно пронормальной π-холловой подгруппой.

Заметим, что группа $\mathrm{SL}_2(7)$ также содержит два класса сопряженных $\{2,3\}$-холловых подгрупп, а значит, подстановочное сплетение $\mathrm{SL}_2(7) \wr S_5$ обладает пронормальной, но не сильно пронормальной $\{2,3\}$-холловой подгруппой. Данное замечание позволяет также получить следующее утверждение, дающее отрицательное решение проблемы 2.

Следствие 2. *В простой симплектической группе* $\mathrm{PSp}_{10}(7)$ *содержится не сильно пронормальная* $\{2,3\}$*-холлова подгруппа.*

В действительности, из теоремы 2 вытекает существование пронормальных, но не сильно пронормальных π-холловых подгрупп в подходящих конечных группах для многих множеств π, как показывает

Следствие 3. *Пусть множество π простых чисел таково, что существует конечная группа, содержащая более одного класса сопряженных π-холловых подгрупп. Тогда существует группа, обладающая пронормальной, но не сильно пронормальной π-холловой подгруппой.*

Со следствиями 1 и 3 связан естественный известный вопрос [1, проблема 7.20]: *для каких множеств π существуют группы, содержащие более одного класса сопряженных π-холловых подгрупп*? К сожалению, как показывают исследования [12], даже в весьма частном случае, когда $\pi = p'$ для некоторого простого числа p, данный вопрос упирается в сложные теоретико-числовые проблемы типа гипотезы Нагеля — Люнггрена [13, 14].

Важную роль в изучении пронормальности для холловых подгрупп (в том числе и в данной работе) играет следующее утверждение, дающее признак пронормальности

Лемма 1 [7, лемма 13]. *Пусть H — холлова подгруппа некоторой конечной группы G. Предположим, что для некоторой нормальной подгруппы A группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) $(H \cap A)$ *пронормальна в A;*

(2) (HA/A) *пронормальна в G/A;*

(3) $(H \cap A)^A = (H \cap A)^G$.

Тогда H пронормальна в G.

Утверждение (2), очевидно, является также необходимым условием для пронормальности H. В [2] сформулирован вопрос: *являются ли условия* (1) *и* (3) *также необходимыми*? Из утверждений (a) и (b) теоремы 2 вытекает, что условие (3) леммы 1 не является необходимым. Теорема 2 показывает, что условие (1) леммы 1 также не является необходимым для пронормальности холловой подгруппы, поскольку справедливо

Следствие 4. *Пусть для некоторого множества π простых чисел конечная группа X содержит более одного класса сопряженных π-холловых подгрупп. Пусть также Y — диэдральная группа порядка $2p$, где $p \in \pi'$. Пусть $G = X \wr_\rho Y$ — подстановочное сплетение, соответствующее естественному транзитивному действию ρ группы Y на множестве из p элементов. Обозначим через A полный* *прообраз в G (нормальной) силовской p-подгруппы группы Y. Тогда G обладает пронормальной π-холловой подгруппой U такой, что $U \cap A$ не пронормальна в A.*

Отметим два открытых вопроса, возникающих в связи с результатами работ [2, 3].

Проблема 4. *Будут ли сильно пронормальными π-холловы подгруппы в конечной группе, где все π-холловы подгруппы сопряжены?*

Проблема 5. *Всегда ли существует сильно пронормальная π-холлова подгруппа в конечной группе, которая содержит π-холлову подгруппу?*

1. Предварительные сведения и результаты

Используемые обозначения стандартны и могут быть найдены в [15–17]. Будем употреблять также следующие обозначения: A^B — множество $\{A^b \mid b \in B\}$ для $A \subseteq G$ и $B \subseteq G$; $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ — множество π-холловых подгрупп группы G; $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов; $H \operatorname{prn} G$ — утверждение о том, что подгруппа H группы G пронормальна; $H \operatorname{sprn} G$ — утверждение о том, что подгруппа H группы G сильно пронормальна.

Нам понадобится следующая известная

Лемма 2 [18, лемма 1]. *Пусть A — нормальная и H — π-холлова подгруппы конечной группы G. Тогда $H \cap A \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$, $HA/A \in \mathrm{Hall}_\pi(G/A)$.*

Следующее утверждение является частным случаем леммы 1.

Лемма 3 [3, лемма 13]. *Пусть G — группа, $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ для некоторого множества π простых чисел, $A \trianglelefteq G$ и $G = HA$. Тогда если $(H \cap A) \operatorname{prn} A$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Лемма 4. *Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Если подгруппа H сильно пронормальна в G, то $(A \cap H)^A = (A \cap H)^G$.*

Доказательство. Поскольку $H \operatorname{sprn} G$, для любого $g \in G$ найдется $x \in \langle H, (H \cap A)^g \rangle$ такой, что $(H \cap A)^x = (H \cap A)^g$. Но $\langle H, (H \cap A)^g \rangle \subseteq HA$, следовательно, $(H \cap A)^g = (H \cap A)^x \in (H \cap A)^{HA}$, откуда $(H \cap A)^A = (H \cap A)^{HA} = (H \cap A)^G$. $\square$

Лемма 5 [19, гл. I, предложение (6.4)]. *Пусть A — нормальная и H — произвольная подгруппы конечной группы G. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$H \operatorname{prn} G$;*
(2) *$H \operatorname{prn} N_G(HA)$ и $(HA) \operatorname{prn} G$.*

Лемма 6. *Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Если подгруппа H группы G содержит A и $(H/A) \operatorname{sprn}(G/A)$, то $H \operatorname{sprn} G$.*

Доказательство. Пусть $K \leq H$ и $g \in G$. Ввиду сильной пронормальности подгруппы H/A в G/A найдется элемент $x \in \langle H, K^g \rangle A = \langle H, K^g \rangle$ такой, что $K^{gx}A \subseteq HA = H$. Поскольку $K^{gx} \subseteq K^{gx}A$, получаем $K^{gx} \subseteq H$. $\square$

2. Доказательства теоремы 1 и ее следствия

Доказательство теоремы 1. Обозначим базу сплетения $G = X \wr Y$ следующим образом:

$$A = \prod_{y \in Y} X_y.$$

Здесь X_y — изоморфная копия группы X. Пусть также $x \mapsto x_y$ — изоморфизм групп X и X_y.

По условию теоремы группа X содержит несопряженные π-холловы подгруппы H, K. При этом группа Y содержит π-холлову подгруппу M, отличную от своего нормализатора в Y.

Пусть $\{y_i\}_{i=0}^n$ — левая трансверсаль подгруппы M в группе Y, причем $y_0 = e$. Рассмотрим подгруппу

$$V = \prod_{y \in M} K_y \times \prod_{y \in y_1 M} H_y \times \dots \times \prod_{y \in y_n M} H_y$$

группы A. Очевидно, что $V \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$. Поскольку подгруппа V инвариантна относительно подгруппы M, произведение подгрупп $U = VM$ также будет подгруппой группы G. Заметим, что $U \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$.

По условию теоремы множество $N_Y(M) \backslash M$ непусто. Пусть $g \in N_Y(M) \backslash M$. Не теряя общности, можно считать, что $Mg^{-1} = g^{-1}M = y_1 M$.

Предположим, что $U \operatorname{prn} G$. Тогда подгруппы U и U^g сопряжены в $\langle U, U^g \rangle$, т. е. $U^x = U^g$ для некоторого $x \in \langle U, U^g \rangle$.

Из равенств $U = VM$ и $U^g = (VM)^g = V^g M$ заключаем, что

$$\langle U, U^g \rangle \subseteq AM = MA.$$

В частности, $x \in MA$, т. е. $x = ma$, для некоторых $m \in M$ и $a \in A$. Поскольку $m \in M \subseteq U$, имеем

$$U^a = U^{ma} = U^x = U^g.$$

Подгруппа V^a содержится в π-подгруппе $U^a \cap A$ и является π-холловой подгруппой группы A. Следовательно, $V^a = U^a \cap A$. Аналогично получаем равенство $V^g = U^g \cap A$. Итак, $V^a = V^g$. Пусть $a \mapsto a(y)$ — отображение координатной проекции $A \to X_y$. Имеем

$$\prod_{y \in M} K_y^{a(y)} \times \prod_{y \in y_1 M} H_y^{a(y)} \times \dots \times \prod_{y \in y_n M} H_y^{a(y)}$$
$$= V^a = V^g = \prod_{y \in M} H_y \times \prod_{y \in y_1 M} K_y \times \dots \times \prod_{y \in y_n M} H_y.$$

В частности, равенство $V^a = V^g$ влечет равенство $K_e^{a(e)} = V^a(e) = V^g(e) = H_e$, где e — единица группы Y, что противоречит несопряженности подгрупп H и K в группе X. $\square$

Доказательство следствия 1. Импликации (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Для доказательства следствия достаточно доказать импликацию (1) $\Rightarrow$ (3).

Предположим, она неверна. Тогда существует простая группа X, содержащая более одного класса сопряженных π-холловых подгрупп, в то время как в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны в своем нормальном замыкании.

Поскольку множество π конечно, ввиду малой теоремы Ферма существует натуральное число n такое, что все нечетные простые числа из π и какое-нибудь нечетное число из π' делят число $2^n - 1$. Тогда группа $Y = \mathrm{SL}_2(2^n) \simeq \mathrm{PSL}_2(2^n)$ содержит π-холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в Y. Действительно, группа верхне-треугольных матриц T группы Y разрешима, и ее π-холлова подгруппа M нормальна в T. Вместе с тем $|T| = 2^n(2^n - 1)$ делится на некоторое число из π' ввиду выбора n. Поэтому $M < T = N_T(M) \le N_Y(M)$. Кроме того, индекс $|Y : T| = 2^n + 1$ взаимно прост со всеми числами из π (числа 2, $2^n - 1$ и $2^n + 1$ попарно взаимно просты), откуда $|Y : M| = |Y : T||T : M|$ — π'-число. Значит, $M \in \mathrm{Hall}_\pi(Y)$.

По теореме 1 в регулярном сплетении $G = X \wr Y$ существует непронормальная π-холлова подгруппа, нормальное замыкание которой совпадает с G; противоречие с (1). $\square$

3. Доказательства теоремы 2 и ее следствий

Доказательство теоремы 2. По условию теоремы группа X содержит пронормальные несопряженные π-холловы подгруппы H, K. Обозначим базу сплетения $X \wr_\rho Y$ следующим образом:

$$A = \prod_{\alpha \in \Omega} X_\alpha.$$

Здесь $X_\alpha \simeq X$ для всех $\alpha \in \Omega$.

По условию теоремы подгруппа M действует нетранзитивно на Ω, и пусть O — некоторая орбита группы M. Поскольку группа Y действует транзитивно на Ω, для некоторого $y \in Y$ справедливо $\mathrm{O} \ne \mathrm{O}y$.

Так как подгруппа $\prod\limits_{\alpha \in \mathrm{O}} H_\alpha \times \prod\limits_{\alpha \in \Omega\setminus \mathrm{O}} K_\alpha$ инвариантна относительно M, произведение $U = \big(\prod\limits_{\alpha \in \mathrm{O}} H_\alpha \times \prod\limits_{\alpha \in \Omega\setminus \mathrm{O}} K_\alpha\big)M$ является подгруппой группы G. Очевидно, что U — π-холлова подгруппа в G.

Допустим, справедливо равенство $(A \cap U)^A = (A \cap U)^G$. Тогда найдется элемент $a = \prod\limits_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \in A$, где $a_\alpha \in X_\alpha$, такой, что $(A \cap U)^{y^{-1}} = (A \cap U)^a$. Это равенство можно переписать в виде

$$\prod_{\alpha \in \mathrm{O}} K_\alpha \times \prod_{\alpha \in \mathrm{O}y} H_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Omega\setminus(\mathrm{O}\cup\mathrm{O}y)} K_\alpha = \prod_{\alpha \in \mathrm{O}} H_\alpha^{a_\alpha} \times \prod_{\alpha \in \mathrm{O}y} K_\alpha^{a_\alpha} \times \prod_{\alpha \in \Omega\setminus(\mathrm{O}\cup\mathrm{O}y)} K_\alpha^{a_\alpha}.$$

В частности $K_\alpha = H_\alpha^{a_\alpha}$ для $\alpha \in \mathrm{O}$, что противоречит несопряженности подгрупп H и K в группе X. Таким образом, утверждение (b) доказано.

Утверждение (c) следует из (b) и леммы 4.

Докажем утверждение (a). Поскольку $(A \cap U) \,\mathrm{prn}\, A$, по лемме 3 подгруппа U пронормальна в UA. С другой стороны, $UA = MA$, и так как $M = N_Y(M)$, нетрудно заметить, что $MA = N_G(MA)$. Из пронормальности подгруппы M в группе Y следует пронормальность подгруппы MA в группе G. По лемме 5 получаем $U \,\mathrm{prn}\, G$. $\square$

Как отмечалось выше, естественное подстановочное сплетение $G = \mathrm{SL}_2(7) \wr S_5$ обладает не сильно пронормальной $\{2,3\}$-холловой подгруппой. Используя этот факт, докажем следствие 2.

Доказательство следствия 2. Предположим, что все $\{2,3\}$-холловы подгруппы группы $\mathrm{PSp}_{10}(7)$ сильно пронормальны.

Рассмотрим естественное сплетение $G = \mathrm{SL}_2(7) \wr S_5$. В силу теоремы 2 существует не сильно пронормальная $\{2,3\}$-холлова подгруппа H группы G. Группа G изоморфно вкладывается в $\mathrm{Sp}_{10}(7)$ как стабилизатор разложения естественного симплектического модуля группы $\mathrm{Sp}_{10}(7)$ в ортогональную прямую сумму пяти двумерных невырожденных подпространств. Поскольку индекс $|\,\mathrm{Sp}_{10}(7) : G|$ взаимно прост с числами 2 и 3, подгруппа H является также

$\{2,3\}$-холловой в $\mathrm{Sp}_{10}(7)$. Так как подгруппа H не является сильно пронормальной в G, она также не является сильно пронормальной и в $\mathrm{Sp}_{10}(7)$.

Центр Z группы $\mathrm{Sp}_{10}(7)$ имеет порядок 2, следовательно, он содержится в H. В силу нашего предположения

$$(H/Z)\,\mathrm{sprn}(\mathrm{Sp}_{10}(7)/Z) = \mathrm{PSp}_{10}(7),$$

но тогда по лемме 6 подгруппа H сильно пронормальна в $\mathrm{Sp}_{10}(7)$; противоречие. $\square$

Доказательство следствия 3. По условию следствия существует группа X, содержащая более одного класса сопряженных π-холловых подгрупп. Обозначим минимальное простое число, не лежащее в π, через p. По [20, теорема A] $p > 2$.

Стабилизатор M точки в естественном действии ρ группы $Y = S_p$ изоморфен S_{p-1} и является π-холловой подгруппой группы Y. Кроме того, $M = N_Y(M)$. Значит, по теореме 2 группа $G = X \wr Y$ обладает пронормальной, но не сильно пронормальной π-холловой подгруппой. $\square$

Доказательство следствия 4. Обозначим через M некоторую силовскую 2-подгруппу группы Y. По условию следствия $|Y| = 2p$, где $p \notin \pi$, значит, $M \in \mathrm{Hall}_\pi(Y)$. Поскольку ρ — транзитивное действие группы Y на множестве из p элементов, группа M действует не транзитивно.

По теореме 2 группа G обладает π-холловой подгруппой U такой, что

(a) U пронормальна в G;

(b) $(U \cap B)^B \neq (U \cap B)^G$, где B — база сплетения.

Предположим, что $(U \cap A)\,\mathrm{prn}\,A$. Поскольку $|B : A| = p$ является π'-числом, справедливо равенство

$$U \cap A = U \cap A \cap B = U \cap B.$$

В силу нашего предположения для любого $a \in A$ найдется $b \in \langle (U \cup B), (U \cup B)^a \rangle \subseteq B$ такой, что $(U \cup B)^b = (U \cup B)^a$. Таким образом,

$$(U \cap B)^B = (U \cap B)^A = (U \cap B)^{UA} = (U \cap B)^G;$$

противоречие. Следовательно, группа G обладает пронормальной π-холловой подгруппой U такой, что $U \cap A$ не пронормальна в A. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
2. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Существование пронормальных π-холловых подгрупп в E_π-группах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 481–486.
3. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* О пронормальности холловых подгрупп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 35–43.
4. *Го В., Ревин Д. О.* О классе групп с пронормальными π-холловыми подгруппами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 3. С. 509–524.
5. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.
6. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* О пронормальности и сильной пронормальности подгрупп // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 22–33.
7. *Нестеров М. Н.* Пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 1032–1038.
8. *Manzaeva N. C.* On the heritability of the Hall property D_π by overgroups of π-Hall subgroups // arXiv preprint arXiv:1504.03137. 2015.

9. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 506–516.

10. *Revin D. O., Vdovin E. P.* Frattini argument for Hall subgroups // J. Algebra. 2014. V. 414. P. 95–104.

11. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 18-е изд. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2014.

12. *Нестеров М. Н.* Арифметика сопряженности p-дополнений // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 1. С. 53–69.

13. *Ljunggren W.* Some theorem on indeterminate equations of the form $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$ // Norsk Mat. Tidsskr. 1943. V. 25. P. 17–20.

14. *Bugeaud Y., Mihailescu P.* On the Nagell–Ljunggren equation $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$ // Math. Scand. 2007. V. 101, N 2. P. 177–183.

15. *Aschbacher M.* Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.

16. *Kleidman P. B., Liebeck M. W.* The subgroup structure of finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

17. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

18. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 3, N 2. P. 286–304.

19. *Doerk K., Hawkes T. O.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

20. *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19, N 4. P. 311–319.

Статья поступила 3 марта 2016 г.

Нестеров Михаил Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mauk00@mail.ru