Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 517.982.256+517.982.252

МОНОТОННО ЛИНЕЙНО СВЯЗНОЕ МНОЖЕСТВО С РАДИАЛЬНО НЕПРЕРЫВНОЙ СНИЗУ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ ЯВЛЯЕТСЯ СТРОГИМ СОЛНЦЕМ

А. Р. Алимов

Аннотация. Известно, что в конечномерном банаховом пространстве монотонно линейно связное множество является солнцем. Показано, что в конечномерном банаховом пространстве множество, являющееся солнцем при пересечении с любым замкнутым шаром (B-солнце), является солнцем. Установлено, что B-солнце при дополнительном условии ORL-непрерывности (внешней радиальной непрерывности снизу) метрической проекции является строгим солнцем, что дает частичное обращение известной теоремы Брозовского — Дойча. Показано, что B-солнечное LG-множество (глобальный минимизатор) является B-стягиваемым строгим солнцем.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.102

Ключевые слова: солнце, строгое солнце, монотонно линейно связное множество, радиальная непрерывность оператора метрической проекции.

Величиной наилучшего приближения или *расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до множества* $\varnothing \neq M \subset X$ называется величина $\rho(x, M) := \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$. Множество всех *ближайших точек* из M для заданного x обозначается через $P_M x$, т. е. $P_M x := \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\}$. Для подмножества $\varnothing \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*) такая, что

$$y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x) \quad \text{для всех } \lambda \geq 0. \tag{1}$$

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие (1) выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Если для $x \in X \setminus M$ условие (1) выполнено для любого $y \in P_M x$, то точка x называется *точкой строгой протосолнечности* (здесь в отличие от точки строгой солнечности ближайшая точка y к x не обязана существовать). Множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно строгой солнечности) для M. Замкнутое множество $M \subset X$ называется *строгим протосолнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой строгой протосолнечности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–01–00295).

Ниже следуем определениям, данным в [1]. Всюду ниже X — действительное линейное нормированное пространство, X_n — линейное нормированное пространство конечной размерности n, $B(x,r)$ — замкнутый шар с центром x и радиусом r и $\mathring{B}(x,r)$ — открытый шар.

Будем называть множество *B-солнцем*, если его пересечение с любым замкнутым шаром является солнцем или пусто; множество называется *B-строгим солнцем*, если его пересечение с любым замкнутым шаром является строгим солнцем или пусто.

Пусть $k(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, — непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Кривая $k(\cdot)$ называется *монотонной*, если $f(k(\tau))$ является монотонной функцией по τ для любого экстремального функционала f сопряженной единичной сферы $S*$ (см. [1]). Замкнутое множество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным* [2], если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot)$, след которой лежит в M.

Замкнутое множество M называется LG-*множеством* [3], если для любого $x \notin M$ каждый локальный минимум функции расстояния $\Phi_x(y) = \|y - x\|$, $y \in M$, глобальный; иными словами, из того, что $y \in P_{M\cap B(y,\varepsilon)}x$ при некотором $\varepsilon > 0$, следует, что $y \in P_M x$. Солнце (в отличие от строгого солнца, см. теорему A ниже) не обязано быть LG-множеством даже в двумерном случае.

Пусть $\varnothing \ne M \subset X$, $x_0 \in X$, и P_M — оператор метрической проекции на M. Метрическая проекция P_M *внешне радиально непрерывна снизу* (ORL-*непрерывна*) в точке x_0, если для любого $v_0 \in P_M x_0$ и любого открытого множества W такого, что $P_M x_0 \cap W \ne \varnothing$, существует окрестность U точки x_0 такая, что $P_M x \cap W \ne \varnothing$ для каждого $x \in U \cap \{v_0 + \lambda(x_0 - v_0) \mid \lambda \ge 1\}$. Метрическая проекция P_M ORL-непрерывна для $M \subset X$, если оператор P_M ORL-непрерывен в каждой точке пространства X.

Известно, что если $F(x_0)$ компактно, где $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$, то F полунепрерывно снизу в точке x_0, если и только если F полунепрерывно снизу по Хаусдорфу в точке x_0, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность U точки x_0 такая, что $h(F(x_0), F(x)) < \varepsilon$ для всех $x \in U$. Здесь $h(A,B) := \sup\{\rho(a,B) \mid a \in A\}$ — одностороннее расстояние Хаусдорфа (или уклонение) между множествами A и B. Соответственно если $M \subset X$ ограниченно компактно, то P_M всегда полунепрерывно сверху, а непрерывность по Хаусдорфу оператора P_M эквивалентна его полунепрерывности снизу.

Вполне понятно, что полунепрерывная снизу метрическая проекция является ORL-непрерывной. Однако обратная импликация может нарушаться.

Множество $\mathring{K}(y,x) = \bigcup\limits_{r>0} \mathring{B}(-ry + (r+1)x, (r+1)\|x-y\|)$, состоящее из гомотетичных раздутий шара $\mathring{B}(x, \|x-y\|)$ относительно точки y, называется *опорным конусом* $\mathring{K}(y,x)$ к шару $B(x,\|x-y\|)$ в его граничной точке y.

Далее, точка $y_0 \in M$ называется *лунной точкой* [3, 4], если из того, что $x \in P_M^{-1} y_0$ и $\mathring{K}(y_0,x) \cap M \ne \varnothing$, следует, что $y_0 \in \overline{\mathring{K}(y_0,x) \cap M}$. Замкнутое множество называется *луной* [3, 4], если все его точки лунные; LG-множество всегда является луной. Пространство X называется (MS)-*пространством* (см. [1]), если в X любая луна является строгим протосолнцем (или, что то же самое, множеством Колмогорова). Известен следующий результат [5].

Теорема A. *Пусть M — непустое подмножество линейного нормированного пространства X. Тогда из (i) следует $(i+1)$, $i = 1,2,3$:*

(1) *M — строгое протосолнце;*

(2) *метрическая проекция* P_M ORL-*непрерывна во всех точках;*
(3) M — LG-*множество (глобальный минимизатор);*
(4) M — *луна.*
Если X *является* (MS)-*пространством, то условия* (1)–(4) *эквивалентны.*

Замечание 1. В общем случае импликации (2)⇒(3), (3)⇒(4) теоремы A необратимы. Чтобы убедиться, что (4)$\not\Rightarrow$(3), достаточно рассмотреть множество $M := \{(x, y) \mid x^2/4 + y^2 \geq 1\}$ на евклидовой плоскости. Легко видеть, что M — луна, но не LG-множество. Пусть M — дополнение открытого единичного шара на евклидовой плоскости. Тогда M — LG-множество (и, следовательно, луна). С другой стороны очевидно, что M не солнце, поскольку M имеет ограниченное дополнение. Соответственно (3)$\not\Rightarrow$(2). Автору неизвестны попытки найти условия, при которых выполнена обратная импликация (2)⇒(1).

Настоящая работа устанавливает частичное обращение импликации (2)⇒(1) при дополнительном предположении о B-солнечности (в частности, монотонной линейной связности) рассматриваемого множества.

Теорема 1. *В конечномерном банаховом пространстве B-солнечное* LG-*множество является строгим солнцем.*

Напомним еще одно определение. Следуя Л. П. Власову, если Q обозначает некоторое свойство (например, «связность»), то будем говорить, что замкнутое множество M *обладает свойством*

$$B\text{-}Q, \quad \text{если } M \cap B(x, r) \text{ обладает свойством Q при всех } x \in X,\ r > 0.$$

Следствие 1. *Пусть M — монотонно линейно связное множество в конечномерном банаховом пространстве. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) *метрическая проекция* P_M ORL-*непрерывна;*
2) M *является B-стягиваемым строгим солнцем;*
3) M *является строгим солнцем.*

Следствие 2. *Пусть X — конечномерное банахово пространство и $M \subset X$ — B-солнце. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) *метрическая проекция* P_M ORL-*непрерывна;*
2) M — *строгое солнце.*

Таким образом, в предположении о B-солнечности рассматриваемого множества (в частности, в предположении его монотонной линейной связности) получен частичный ответ на давно стоящий вопрос об обращении импликации (2)⇒(1) в теореме A.

Замечание 2. В теореме 1 ни одно из условий в отдельности не гарантирует строгой солнечности даже в двумерном случае. В замечании 1 было построено LG-множество, не являющееся солнцем. С другой стороны, по теореме 2 (см. далее) в X_n B-солнце (в частности, монотонно линейно связное множество) является солнцем (но, конечно, не обязано быть строгим солнцем).

Множество, удовлетворяющее условиям теоремы 1, может не быть B-строгим солнцем даже в трехмерном пространстве (см. [6, замечание 7.1]). Автору неизвестно, будет ли B-солнечная луна в X_n, $n \geq 3$, строгим солнцем. На нормированной плоскости (и, естественно, в (MS)-пространствах) ответ на этот вопрос положителен. Ответ также положителен для чебышевской B-солнечной луны. В общем случае несложно проверяется, что в произвольном X B-солнечная луна является солнцем. Известный пример луны, не являющейся солнцем, построенный в [4] в пространстве многочленов на $[0,1]$ с равномерной нормой, не является B-солнцем (см. также замечание 1).

В задаче о солнечности B-солнечных множеств устанавливаем следующий результат.

Теорема 2. *B-солнце в конечномерном банаховом пространстве является солнцем.*

Замечание 3. Неизвестно, существует ли пример B-солнца (конечно, в бесконечномерном пространстве), не являющегося солнцем. Недавно автор показал, что для любой конечной размерности $n \geq 3$ существует пространство X_n, содержащее чебышевское солнце и не являющееся B-солнцем. Этот результат перекликается с недавним результатом А. А. Флерова [7], который построил чебышевское множество, не являющееся локально чебышевским (в терминологии [7]).

Доказательство теоремы 2. Для $x \neq 0$ рассмотрим отображение $x \mapsto \Sigma_x := \{f \in S^* \mid f(x) = \|x\|\}$. Хорошо известно, что в конечномерном пространстве отображение Σ_x сильно-сильно полунепрерывно сверху (в бесконечномерном случае можно гарантировать лишь nw^*-полунепрерывность сверху, при этом известны примеры пространств, для которых отображение Σ_x не полунепрерывно сверху). По определению полунепрерывности сверху если последовательность (x_n) сходится к $x \neq 0$, $f_n \in \Sigma_{x_n}$ и $f_n \to f$, то $f \in \Sigma_x$.

Пусть $M \subset X$ — B-солнце. Без ограничения общности считаем $0 \notin M$, $\rho(0, M) = 1$. Требуется показать, что M — солнце.

Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множества $M_n := M \cap B(0,n)$. По условию M_n — солнце для каждого n. Соответственно пусть y_n — точка светимости из M_n для 0. Понятно, что $y_n \in P_M 0$. В силу компактности (переходя без ограничения общности к подпоследовательности) имеем $y_n \to y$, $n \to \infty$, $y \in P_M 0$. Покажем, что y — точка светимости для 0. Будем рассуждать от противного. Если y не является точкой светимости для 0, то $\mathring{K}(y,0) \cap M \neq \varnothing$ согласно хорошо известному свойству отделимости конусами для солнц (см., например, [1, § 3.1]). Выберем $z \in \mathring{K}(y,0) \cap M \neq \varnothing$ и положим $R := \|z\| > 0$. Напомним, что $\mathring{K}(y,0) = \{x \mid f(x) < 1 = f(y)\ \forall f \in \Sigma_y\}$.

Для любого $\varepsilon > 0$ положим $O^\varepsilon := \mathscr{O}_\varepsilon(\{f \mid f = \lim \varphi_n,\ \varphi_n \in \Sigma_{y_n}\})$, $\Sigma^\varepsilon := O^\varepsilon \cap \Sigma_y$, где $\mathscr{O}_\varepsilon(A)$ — ε-окрестность множества $A \subset X^*$. По определению полунепрерывности сверху по ε можно выбрать N такое, что $\Sigma_{y_n} \subset O^\varepsilon$ для всех $n \geq N$. Зафиксируем $n > N$ и определим

$$\mathring{K}^R_{y_n} := \{x \mid \|x\| \leq R,\ \varphi(x) < \varphi(y_n) = 1\ \forall \varphi \in \Sigma_{y_n}\},$$

$$\mathring{K}^R_y := \{x \mid \|x\| \leq R,\ f(x) < f(y) = 1\ \forall f \in \Sigma_y\},$$

$$\mathring{K}^R_{y,\varepsilon} := \{x \mid \|x\| \leq R,\ f(x) < f(y) = 1\ \forall f \in \Sigma^\varepsilon\}.$$

Ясно, что $z \in \mathring{K}^R_y \subset \mathring{K}^R_{y,\varepsilon}$. Рассмотрим произвольный функционал $\varphi \in \Sigma_{y_n}$. Поскольку $\Sigma_{y_n} \subset O^\varepsilon$, найдется $f_\varphi \in \Sigma^\varepsilon$ такой, что $\|f_\varphi - \varphi\| < \varepsilon$. Пусть $\zeta \in \mathring{K}^R_{y,\varepsilon}$. Имеем $\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta) - f_\varphi(\zeta) + f_\varphi(\zeta) < \varepsilon R + 1$ (в последнем переходе воспользовались также тем, что $\zeta \in \mathring{K}^R_y$, откуда $f_\varphi(\zeta) < 1$ для $f_\varphi \in \Sigma^\varepsilon$). Поскольку функционал $\varphi \in \Sigma_{y_n}$ был выбран произвольно, а ζ — произвольная точка из $\mathring{K}^R_{y,\varepsilon}$, из неравенства $\varphi(\zeta) \leq \varepsilon R + 1$ вытекает, что $\mathring{K}^R_{y,\varepsilon} \subset \mathscr{O}_{\varepsilon R}(\mathring{K}^R_{y_n})$ при $n > N$, а значит,

$\mathring{K}_y^R \subset \mathscr{O}_{\varepsilon R}(\mathring{K}_{y_n}^R)$ при $n > N$ ввиду очевидного включения $\Sigma^\varepsilon \subset \Sigma_y$. Таким образом, $\mathring{K}_{y_n}^R$ стремится к $\mathring{K}_y^R$ в смысле одностороннего расстояния (уклонения) по Хаусдорфу. Значит, при больших $n > N$ выполняется $z \in \mathring{K}_{y_n}^R$, а значит, $z \in \mathring{K}(y_n, 0) \cap M_n$. Однако это невозможно, поскольку $z \in M_n$, а y_n — точка светимости для 0 из M_n, т. е. $\mathring{K}(y_n, 0) \cap M_n = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что y — точка светимости из M для 0. $\square$

Лемма 1. *Пусть X — конечномерное банахово пространство и $M \subset X$ — луна, $x \notin M$, $y \in P_M x$. Предположим, что точка y содержится в относительной внутренности собственной грани F сферы $S(x, \rho(x, M))$ и $P_M x \subset F$. Тогда если $M \cap B(y, \delta)$ является солнцем при всех достаточно малых $\delta > 0$, то y — точка светимости.*

Предположение о B-солнечности в лемме 1 существенно.

Доказательство леммы 1. Предположим противное: y не является точкой светимости. Тогда $\mathring{K}(y, x) \cap M \neq \varnothing$ (см. [6, § 2.1]). Пусть $\Pi := B(y, \delta)$, где число $\delta > 0$ достаточно мало. По условию $M \cap \Pi$ — солнце. Ясно, что $y \in P_{M \cap \Pi} x$. Так как $M \cap \Pi$ — солнце, то для элемента $x \notin M \cap \Pi$ найдется точка $\hat{y} \in P_{M \cap \Pi} x$ такая, что $\mathring{K}(\hat{y}, x) \cap (M \cap \Pi) = \varnothing$. Выбирая δ достаточно малым, можно считать, что $(B(y, \delta) \cap F) \subset \operatorname{ri} F$ (здесь и далее $\operatorname{ri} A$ — относительная внутренность выпуклого множества A). При таком δ отсюда следует, что $\hat{y} \in \operatorname{ri} F$, что, в свою очередь, дает $\mathring{K}(\hat{y}, x) = \mathring{K}(y, x)$, откуда $\mathring{K}(y, x) \cap (M \cap B(y, \delta)) = \varnothing$. С другой стороны, по условию M — луна, а тогда по определению луны с учетом $\mathring{K}(y, x) \cap M \neq \varnothing$ должно выполняться включение $y \in \overline{\mathring{K}(y, x) \cap M}$, что противоречит предыдущему равенству. Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что точка y не является точкой светимости множества M для точки x, было неверно. Лемма 1 доказана. $\square$

Пример 1. Построим пример 3-мерного пространства, которое содержит LG-солнце, не являющееся строгим солнцем и B-солнцем. Рассмотрим пространство $X := \ell^2(2) \oplus_1 \mathbb{R}$, в котором единичным шаром B является двойной конус с круговым основанием $\Gamma := \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ и вершинами $v_1 := (0, 0, 1)$ и $v_2 := (0, 0, -1)$. Положим $M := X \setminus \mathring{K}(v_1, 0)$. Хорошо известно, что M — солнце. Легко видеть, что M — не строгое солнце. Действительно, пусть $x \notin M$, тогда среди ближайших элементов для x всегда можно найти точку y, лежащую в относительной внутренности одномерной грани, параллельной образующей конуса вида $[v_1, c]$, $c \in \Gamma$. Любая такая точка y является точкой гладкости сферы $S(x, \|x - y\|)$, и если M — строгое солнце, то $\mathring{K}(y, x) \cap M = \varnothing$, откуда любую точку $x \notin M$ можно отделить от M открытым полупространством $\mathring{K}(y, x)$; противоречие с невыпуклостью M. Построенное множество M является LG-множеством. Действительно, пусть $x \notin M$, $y \in P_{M \cap B(y,\varepsilon)} x$. Если y — точка светимости, то по определению солнечности y доставляет глобальный минимум функции расстояния. В случае, если y не является точкой светимости, картина, по-существу, двумерная — соответствующие рассуждения проводятся, как при построении примера в замечании 1. Построенное множество M не является B-солнцем. Пусть $x \notin M$, $y \in P_M x$. Считаем, что x не лежит на оси конуса, тогда $P_M x$ представляет собой отрезок I, лежащий на $S(x, \rho(x, M))$. Как и выше, предполагаем, что y лежит в относительной внутренности одномерной грани I. Такая точка y не является точкой светимости для M. Поскольку по теореме A LG-множество является луной, по лемме 1 M не B-солнце. Итак, построенное множество M *является* LG-*солнцем, но не является строгим солнцем и* B-*солнцем.* Легко видеть, что P_M не ORL-непрерывна.

Пространство $X = \ell^2(2)\oplus_1\mathbb{R}$ из примера 1 не является (BM)-пространством и, значит, (MS)-пространством.

Доказательство теоремы 1. Пусть M — B-солнечное LG-множество. Без ограничения общности считаем $0 \notin M$, $y \in P_M 0$. Требуется показать, что y — точка светимости из M для 0. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $M_n := M \cap B(y, 1/n)$. По предположению M_n — солнце. Пусть y_n — точка из M_n для 0. Так как M является LG-множеством, y — (глобальная) точка светимости из M для 0. Окончательно y является точкой светимости как предельная точка точек светимости (последний результат был фактически установлен при доказательстве теоремы 2 с использованием полунепрерывности сверху отображения Σ_x). $\square$

Автор выражает глубокую признательность И. Г. Царькову и П. А. Бородину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84.
2. *Алимов А. Р.* Монотонная линейная связность чебышевских множеств в пространстве $C(Q)$ // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 9. С. 3–18.
3. *Amir D., Deutsch F.* Suns, moons and quasi-polyhedra // J. Approx. Theory. 1972. V. 6. P. 176–201.
4. *Brosowski B., Deutsch F.* On some geometric properties of suns // J. Approx. Theory. 1974. V. 10, N 3. P. 245–267.
5. *Brosowski B., Deutsch F.* Radial continuity of set-valued metric projection // J. Approx. Theory. 1974. V. 11. P. 236–253.
6. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств // Фунд. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 4. С. 21–91.
7. *Флеров А. А.* Избранные геометрические свойства множеств с конечнозначной метрической проекцией: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2016.

Статья поступила 26 ноября 2015 г.

Алимов Алексей Ростиславович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, Москва, ГСП-1, 119991
alexey.alimov-msu@yandex.ru