Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 512.5

k–ИНВАРИАНТНЫЕ СЕТИ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИМ РАСШИРЕНИЕМ ПОЛЯ k

В. А. Койбаев, Я. Н. Нужин

Аннотация. Пусть K — алгебраическое расширение поля k, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая полная (элементарная) сеть порядка $n \geq 2$ (соответственно $n \geq 3$) над K, причем аддитивные подгруппы σ_{ij} являются k-подпространствами поля K. Доказано, что с точностью до сопряжения диагональной матрицей все σ_{ij} совпадают с некоторым промежуточным подполем P, $k \subseteq P \subseteq K$.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.114

Ключевые слова: общая и специальная линейные группы, полная и элементарная сети аддитивных подгрупп, сетевая подгруппа, алгебраическое расширение поля.

1. Введение

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Систему аддитивных подгрупп

$$\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{1}$$

кольца R будем называть *полной сетью* (или просто *сетью*) над кольцом R порядка n, если

$$\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}, \quad 1 \leq i, j, r \leq n. \tag{2}$$

Для сети принят также термин *ковер* [1, с. 137]. *Элементарной сетью* над кольцом R порядка n называется набор аддитивных подгрупп

$$\sigma = (\sigma_{ij}), \quad i \neq j, \ 1 \leq i, j \leq n, \tag{3}$$

кольца R, для которых

$$\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}, \quad i \neq j, \ i \neq r, \ j \neq r, \ 1 \leq i, j, r \leq n. \tag{4}$$

Очевидно, что если все аддитивные подгруппы σ_{ij} из (1) или (3) совпадают с некоторым подкольцом P кольца R, то условия (2) или соответственно (4) выполняются. Такую сеть будем называть *постоянной* и обозначать через σ_P. Полную (элементарную) сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ назовем *неприводимой*, если $\sigma_{ij} \neq 0$ для любых i, j (соответственно для любых i, j, $i \neq j$). Через $D(n, R)$ обозначим группу обратимых диагональных $n \times n$ матриц над кольцом R. По любой сети σ (полной или элементарной) и любой матрице $d = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ из $D(n, R)$

Работа выполнена первым автором в рамках государственного задания Минобрнауки России, вторым автором — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–01–00707).

можно определить сопряженную сеть $\sigma' = d\sigma d^{-1}$, где $\sigma'_{ij} = \varepsilon_i \sigma_{ij} \varepsilon_j^{-1}$. Легко проверяется, что условия (2) или (4) для набора σ' выполняются.

По определению *элементарная сетевая* подгруппа $E(\sigma)$ порождается трансвекциями $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$, $\alpha \in \sigma_{ij}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Здесь e — единичная матрица, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит единица, а на остальных местах нули. Назовем элементарную сеть σ *замкнутой*, если подгруппа $E(\sigma)$ не содержит новых трансвекций. Замкнутыми являются элементарные сети, диагональ которых можно дополнить подгруппами, получив при этом полную сеть (детали можно найти в [2]). Примеры незамкнутых неприводимых элементарных сетей любой степени приводятся в [3, 4]. Основным результатом статьи является

Теорема. *Пусть K — алгебраическое расширение поля k, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая полная (элементарная) сеть порядка $n \geq 2$ (соответственно $n \geq 3$) над K, причем аддитивные подгруппы σ_{ij} являются k-подпространствами поля K. Тогда $\sigma = d\sigma_P d^{-1}$ для некоторого промежуточного подполя P поля K, $k \subseteq P \subseteq K$, и некоторой матрицы $d \in D(n, K)$. В частности, элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ замкнута.*

Приведем некоторые замечания относительно полученных результатов. Во-первых, в случае полной сети теорема обобщает предложение 2 из [5], в котором наряду с условиями теоремы дополнительно требовалась конечномерность всех k-подпространств σ_{ij}. Во-вторых, более общая ситуация рассматривалась в [6, следствие 3.2], когда условие k-инвариантности накладывалось только на одну подгруппу σ_{ij}. Рассмотренный в [5] и в нашей теореме случай представляется нам принципиально важным для дальнейших исследований, в частности, потому, что в этом случае метод спуска результата от полной сети к элементарной приводит к более короткому доказательству. В-третьих, известная теорема Л. Диксона о порождении специальной линейной группы степени 2 над конечным полем двумя трансвекциями показывает, что ограничение $n \geq 3$ в теореме для элементарных сетей нельзя ослабить до $n \geq 2$.

2. Доказательство теоремы для полной сети

В этом разделе K — алгебраическое расширение поля k и $n \geq 2$. Следующая лемма, по-видимому, хорошо известна, поэтому ее доказательство мы опускаем.

Лемма 1. *Пусть подкольцо R поля K является его k-подпространством. Тогда R — поле, причем $k \subseteq R \subseteq K$.*

Лемма 2. *Пусть P — промежуточное подполе поля K, $k \subseteq P \subseteq K$, и A, B — P-подпространства из K. Тогда если $1 \in A$ и $AB = P$, то $A = B = P$.*

Доказательство. Так как $1 \in A$ и A — P-подпространство, то $P \subseteq A$. Далее, равенство $AB = P$ и включение $1 \in A$ дают включение $B \subseteq P$. Отсюда $BB \subseteq BP \subseteq B$ и, следовательно, B — кольцо. Поскольку B является еще и k-подпространством, то оно поле в силу леммы 1. В частности, $1 \in B$. Поэтому, рассуждая аналогично, получаем, что и A — поле. В силу равенства $AB = P$ имеем $A = B = P$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая полная сеть порядка $n \geq 2$ над K, причем для любых i, j подгруппы σ_{ij} являются k-подпространствами* *из K. Тогда для некоторого промежуточного подполя P, $k \subseteq P \subseteq K$, равенства $\sigma_{ij}\sigma_{ji} = P$, $\sigma_{ii} = P$ выполняются для любых i, j.*

Доказательство. Зафиксируем различные числа i, j и положим $A = \sigma_{ii}$, $B = \sigma_{ij}\sigma_{ji}$. Очевидно, A и B — k-подпространства. Из включений (2), определяющих сеть, легко следует, что A и B являются кольцами, а в силу леммы 1 — промежуточными полями. Снова ввиду (2) справедливы включения $\sigma_{ii}B \subseteq B \subseteq \sigma_{jj}$ и $\sigma_{jj}B \subseteq B \subseteq \sigma_{ii}$, из которых с учетом включения $1 \in A \cap B$ следуют соответственно $\sigma_{ii} \subseteq \sigma_{jj}$ и $\sigma_{jj} \subseteq \sigma_{ii}$. Таким образом, $\sigma_{ii} = \sigma_{jj}$. В силу произвольного выбора чисел i, j остается показать равенство $A = B$. Из (2) следуют включения $B \subseteq A$ и $AB \subseteq B$. Отсюда, учитывая, что $1 \in B$, получаем $A = B$. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы в случае полной сети. Определим диагональную матрицу $d^{-1} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, удовлетворяющую условиям теоремы. Положим $\varepsilon_1 = 1$. Далее, выбираем ε_i таким образом, что $1 \in \varepsilon_i\tau_{i1}$, $2 \le i \le n$. Докажем, что

$$\varepsilon_i\tau_{ij}\varepsilon_j^{-1} = P, \quad 1 \le i, j \le n,$$

где в качестве P берем подполе $P = \tau_{ij}\tau_{ji} = \tau_{ii}$, $1 \le i, j \le n$, определенное в лемме 3. Доказательство разобьем на два пункта.

(а) Покажем, что $\varepsilon_i\tau_{i1} = \varepsilon_i^{-1}\tau_{1i} = P$. Положим $A = \varepsilon_i\tau_{i1}$ и $B = \varepsilon_i^{-1}\tau_{1i}$. Так как $P = \tau_{ii}$, то A и B являются P-подпространствами. В силу построения $AB = P$ и $1 \in A$. Применяя лемму 2, получаем $A = B = P$.

(б) Покажем, что $\varepsilon_i\tau_{ij}\varepsilon_j^{-1} = P$. Положим $A = \varepsilon_i\tau_{ij}\varepsilon_j^{-1}$ и $B = \varepsilon_j\tau_{ji}\varepsilon_i^{-1}$. Так как $P = \tau_{ij}\tau_{ji} = \tau_{ii}$, $1 \le i, j \le n$, то A и B являются P-подпространствами и $AB = P$. Согласно п. (а) $P = \varepsilon_i\tau_{i1} = \tau_{1j}\varepsilon_j^{-1}$. Отсюда $P = (\varepsilon_i\tau_{i1})(\tau_{1j}\varepsilon_j^{-1}) \subseteq \varepsilon_i\tau_{ij}\varepsilon_j^{-1}$ и, следовательно, $1 \in A$. Остается применить лемму 2. Теорема для случая полной сети доказана.

3. Две полные сети, определяемые элементарной сетью

В этом разделе $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть порядка $n \ge 3$ над коммутативным кольцом R с единицей. Далее определим по сети σ две новые элементарные (полные) сети ω и Ω, введенные первым автором [7]. Эти сети будут использоваться в доказательстве основной теоремы.

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ называется *дополняемой*, если можно доопределить диагональные аддитивные подгруппы σ_{ii}, $1 \le i \le n$, так, чтобы $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для всех i, r, j. Хорошо известно, что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ дополняема тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}, \quad i \ne j, \ 1 \le i, j \le n \tag{5}$$

(см., например, [5, с. 25]). Это дополнение можно получить, положив

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \ne i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}. \tag{6}$$

Отметим, что не всякая элементарная сеть дополняется до полной сети. Примеры неприводимых замкнутых недополняемых элементарных сетей любой степени над полями рациональных функций указаны в [3].

Лемма 4 [7, предложение 1]. *Для любых различных* i, j *положим* $\omega_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, *где суммирование берется по всем* k, *отличным от* i *и* j. *Набор* $\omega = (\omega_{ij})$ *является элементарной дополняемой сетью (дополним ее диагональю с помощью формулы* (6)).

Лемма 5 [7, предложение 5]. *Для любых различных* i, j *положим* $\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij}$, *где* $\gamma_{ij} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$. *Набор* $\Omega = (\Omega_{ij})$ *является элементарной дополняемой сетью (дополним ее диагональю с помощью формулы* (6)).

Лемма 6 [7, предложение 6]. *Пусть* $\omega = (\omega_{ij})$ *и* $\Omega = (\Omega_{ij})$ *такие, как и в леммах* 4 *и* 5. *Тогда* $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$ *и, кроме того, справедливы включения* $\omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$ *и* $\Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$ *для* $i \neq j$, $1 \leq i, j, r \leq n$.

4. Доказательство теоремы для элементарной сети

Пусть K — алгебраическое расширение поля k, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — неприводимая элементарная сеть порядка $n \geq 3$, причем аддитивные подгруппы σ_{ij} являются k-подпространствами поля K. Для двух элементарных (полных) сетей τ и θ одного порядка запись $\tau \subseteq \theta$ означает, что $\tau_{ij} \subseteq \theta_{ij}$. Если одна из сетей полная, а другая элементарная, то запись $\tau \subseteq \theta$ означает, что $\tau_{ij} \subseteq \theta_{ij}$ для всех различных i, j.

Пусть элементарные сети $\omega = (\omega_{ij})$ и $\Omega = (\Omega_{ij})$ такие, как и в леммах 4 и 5. Дополним сети ω и Ω стандартным способом (6) до полных сетей и обозначим эти новые полные сети теми же символами ω и Ω. Так как аддитивные подгруппы σ_{rs} являются k-подпространствами поля K, таковыми будут и аддитивные подгруппы ω_{ij} и Ω_{ij} для всех i, j, $1 \leq i, j \leq n$. Поэтому в силу уже доказанного случая нашей теоремы для полных сетей и леммы 6 получаем включения

$$\omega = d_1\sigma_L d_1^{-1} \subseteq \sigma \subseteq d_2\sigma_P d_2^{-1} = \Omega \tag{7}$$

для некоторых диагональных матриц $d_1, d_2 \in D(n, K)$ и некоторых полных постоянных сетей σ_L, σ_P, соответствующих промежуточным подполям L, P поля K, $k \subseteq L, P \subseteq K$. Таким образом, $(\sigma_L)_{ij} = L$, $1 \leq i, j \leq n$, и $(\sigma_P)_{ij} = P$, $1 \leq i, j \leq n$. Отсюда $\omega_{ii} = L$, $\Omega_{ii} = P$, $1 \leq i \leq n$, так как диагональные аддитивные подгруппы не изменяются при сопряжении диагональными матрицами. Следовательно, $L \subseteq P$ в силу (7). По лемме 6 $\Omega_{11}\omega_{12} \subseteq \omega_{12}$, поэтому $P\alpha L \subseteq \alpha L$ для некоторого ненулевого $\alpha \in K$ и, стало быть, $P \subseteq L$. Итак, $P = L$. Тем самым остается показать, что $d_1 = d_2 d$ для некоторого $d \in D(n, P)$.

Согласно лемме 6 $\Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Учитывая, что $P = L$, из (7) для $i \neq j$ и произвольного r получаем включения

$$\big(d_2\sigma_P d_2^{-1}\big)_{ir}\big(d_1\sigma_P d_1^{-1}\big)_{rj} \subseteq \big(d_1\sigma_P d_1^{-1}\big)_{ij}. \tag{8}$$

Положим $d_1 = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ и $d_2 = \mathrm{diag}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Тогда включения (8) запишутся в виде

$$\eta_i\eta_r^{-1}P\varepsilon_r\varepsilon_j^{-1} \subseteq \varepsilon_i\varepsilon_j^{-1}P. \tag{9}$$

В силу (9) $\eta_i\eta_r^{-1} = \varepsilon_i\varepsilon_r^{-1}\zeta_{ir}$ для некоторого $\zeta_{ir} \in P$, $1 \leq i, r \leq n$. В частности, $\eta_i\varepsilon_i^{-1} = \eta_1\varepsilon_1^{-1}\zeta_i$ для некоторого $\zeta_i \in P$, $1 \leq i \leq n$. Из доказательства теоремы для полной сети (см. разд. 2) следует, что сопрягающие диагональные матрицы d_1 и d_2 можно выбрать так, что $\varepsilon_1 = \eta_1 = 1$. Таким образом, $\eta_i = \varepsilon_i\zeta_i$ для некоторого $\zeta_i \in P$, $1 \leq i \leq n$. Следовательно, $d_1 = d_2 d$ для некоторого $d \in D(n, P)$.

Итак, теорема доказана в полном объеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
2. *Койбаев В. А., Нужин Я. Н.* Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фунд. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 1. С. 75–84.
3. *Койбаев В. А.* Элементарные сети в линейных группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 134–141.
4. *Куклина С. К., Лихачева А. О., Нужин Я. Н.* О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 192–196.
5. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1978. Т. 75. С. 22–31.
6. *Левчук В. М.* О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 504–517.
7. *Койбаев В. А.* Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавк. мат. журн. 2010. Т. 12, № 4. С. 39–43.

Статья поступила 16 января 2016 г.

Койбаев Владимир Амурханович
Северо-Осетинский гос. университет им. К. Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 46, Владикавказ 362025;
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
koibaev-K1@yandex.ru

Нужин Яков Нифантьевич
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
nuzhin2008@rambler.ru