Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 510.53+512.562

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ $\mathbf{0}'$–ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛИМЫХ η–СХОЖИХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

М. В. Зубков

Аннотация. Получены новые достаточные условия существования $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции, задающей порядок для вычислимого η-схожего линейного порядка $\mathscr{L}$, т. е. функции G такой, что $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$. А именно, вводится понятие блоков, локально максимальных слева и локально максимальных справа, и доказано, что если размеры таких блоков в вычислимом η-схожем линейном порядке $\mathscr{L}$ ограничены, то существует $\mathbf{0}'$-предельно монотонная функция G такая, что $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.112

Ключевые слова: вычислимый линейный порядок, η-схожий линейный порядок, $\mathbf{0}'$-предельно монотонная функция.

1. Введение

Работа посвящена изучению свойств η-схожих линейных порядков, а именно вопросу существования $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции G для данного линейного порядка $\mathscr{L}$ такой, что $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$. Представимость порядкового типа в виде $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, а F — некоторая функция, можно взять в качестве одного из возможных эквивалентных определений η-схожих линейных порядков. А. Н. Фроловым и М. В. Зубковым [1] было показано, что существование $\mathbf{0}'$-предельно монотонной (т. е. имеющей $\mathbf{0}'$-вычислимую аппроксимацию, неубывающую по аргументу, по которому берется предел) функции G для η-схожего линейного порядка эквивалентно существованию вычислимой копии с Π^0_1 отношением блока (два элемента находятся в одном блоке, если между ними конечное число элементов). С другой стороны, Д. Турецким [2] построен пример вычислимого η-схожего линейного порядка $\mathscr{L}$, который не представим в виде $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$ ни для какой $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции G. Таким образом, существование вычислимой копии порядка недостаточно для существования $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции. Естественным

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15–41–02502, 15–01–08252, 15–31–20607).

образом возникает вопрос: для каких X-вычислимых η-схожих линейных порядков существуют соответствующие X'-предельно монотонные функции?

Эта задача тесно связана с задачей нахождения достаточных условий того, чтобы порядок низкой степени имел вычислимую копию. В отличие от булевых алгебр [3] существование представления линейного порядка в низкой степени (тьюрингова степень X называется *низкой*, если $X' \equiv_T 0'$) не влечет автоматически существования вычислимой копии [4]. Поэтому естественно выглядит рассмотрение дополнительных условий, накладываемых на порядковые типы. Эти дополнительные условия вместе с существованием низкой копии уже могут обеспечить вычислимую представимость линейных порядков. Так, Доуни и Мозес [5] доказали, что у каждого дискретного порядка, имеющего представление низкой степени, есть вычислимая копия (линейный порядок дискретен, если он не содержит предельных элементов).

Для X-вычислимых η-схожих линейных порядков достаточные условия существования X'-предельно монотонной функции также являются достаточными условиями того, чтобы низкий порядок имел вычислимую копию. В самом деле, тогда соответствующая X'-предельно монотонная функция будет $\mathbf{0}'$-предельно монотонной и, следовательно, гарантирует существование вычислимой копии.

В частности, таким методом можно получить результат А. Н. Фролова [6], что каждый линейный порядок низкой степени, размеры блоков которого ограничены некоторым фиксированным натуральным числом (порядки с таким ограничением на размеры блоков называются *сильно η-схожими*), имеет вычислимую копию. Это позднее отмечено им в работе [7], где было получено новое достаточное условие того, чтобы линейный порядок низкой степени имел вычислимую копию. А именно, было доказано, что если слабо η-схожий линейный порядок не имеет сильно η-схожего интервала (порядок называется *сильно η-схожим*, если размеры блоков в нем ограничены некоторым фиксированным числом), то для такого линейного порядка существование низкой копии влечет существование вычислимой копии. Более того, было доказано более сильное утверждение, что если такой линейный порядок имеет копию низкой степени, то его порядковый тип может быть задан при помощи $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции (точная формулировка приведена ниже).

Кроме того, в [6] установлено, что каждый линейный порядок низкой степени, в котором любой блок либо одноэлементный, либо бесконечный (в [6] такие порядки были названы *квазидискретными*), также имеет вычислимую копию. Далее, в [8] введен новый класс, содержащий оба указанных класса, для которого условие существования копии низкой степени достаточно для существования вычислимого представления. А именно, доказано, что каждый линейный порядок, любой блок которого либо бесконечный, либо имеет мощность, не превосходящую некоторого наперед заданного числа k (в [8] такие порядки названы *k-квазидискретными*), имеет вычислимую копию.

В данной работе вводятся понятия левых и правых максимальных блоков и доказывается, что если в η-схожем линейном порядке размеры таких блоков ограничены фиксированным числом и $\mathscr{L}$ имеет копию низкой степени, то его порядковый тип может быть задан при помощи $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции. Как следствие, такой линейный порядок будет иметь вычислимую копию. Класс порядков, удовлетворяющих этому условию, существенно шире, чем объединение классов сильно η-схожих линейных порядков и η-схожих линейных порядков, не содержащих сильно η-схожих подынтервалов (для которых соответствующий результат был известен ранее, см. [7, 8]). В частности, он содержит все конечные суммы порядков из указанных классов.

Кроме того, будет показано, что для низких k-квазидискретных линейных порядков существование $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции — более сильное условие, чем существование вычислимой копии. Это следует из того, что, как показано ниже, существует η-схожий 2-дискретный линейный порядок, имеющий низкую, а следовательно, и вычислимую копию, порядковый тип которого не может быть задан при помощи никакой $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции (точная формулировка результатов будет приведена ниже).

В работе придерживаемся основной терминологии теории вычислимости из [9], теории линейных порядков — из [10]. Также с необходимым материалом можно познакомиться в [11].

Для линейного порядка $\mathscr{L}$ и для любых $x, y \in L$ будем использовать следующие определения и обозначения:

1) (замкнутый) интервал:

$$[x, y]_{\mathscr{L}} = \{z \in L \mid x \leq_{\mathscr{L}} z \leq_{\mathscr{L}} y\};$$

2) отношение соседства:

$$S_{\mathscr{L}}(x, y) \Leftrightarrow (x < y \& [x, y]_{\mathscr{L}} = \{x, y\}) \vee (y < x \& [y, x]_{\mathscr{L}} = \{x, y\});$$

3) отношение блока:

$$B_{\mathscr{L}}(x, y) \Leftrightarrow |[x, y]_{\mathscr{L}}| < \infty \& |[y, x]_{\mathscr{L}}| < \infty;$$

4) блок, содержащий x:

$$[x]_{\mathscr{L}} = \{y \mid B_{\mathscr{L}}(x, y)\}$$

(нетрудно видеть, что отношение блока является отношением эквивалентности, а блок — это класс эквивалентности);

5) порядок $<_{\mathscr{L}}$ естественным образом индуцирует порядок на блоках, будем его обозначать тем же символом $<_{\mathscr{L}}$:

$$[x]_{\mathscr{L}} <_{\mathscr{L}} [y]_{\mathscr{L}} \Leftrightarrow [x]_{\mathscr{L}} \neq [y]_{\mathscr{L}} \& x <_{\mathscr{L}} y.$$

Определение 1. Линейный порядок называется *слабо η-схожим*, если имеет место изоморфизм $\mathscr{L}/B_{\mathscr{L}} \cong \eta$.

Определение 2. Слабо η-схожий линейный порядок называется *η-схожим*, если любой блок имеет конечную мощность, т. е. $|[x]_{\mathscr{L}}| < \infty$ для любого $x \in L$.

Определение 3. Линейный порядок $\mathscr{L}$ называется *сильно η-схожим*, если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что любой блок имеет мощность, не превосходящую k, т. е. $|[x]_{\mathscr{L}}| \leq k$ для любого $x \in L$.

Определение 4. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Линейный порядок $\mathscr{L}$ называется *k-дискретным*, если для любого $x \in L$ либо $|[x]_L| \leq k$, либо $[x]_{\mathscr{L}} = \zeta$.

Определение 5. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Линейный порядок $\mathscr{L}$ называется *k-квазидискретным*, если для любого $x \in L$ либо $|[x]_L| \leq k$, либо $|[x]_{\mathscr{L}}| = \infty$.

Нетрудно видеть, что линейный порядок дискретен тогда и только тогда, когда он 0-дискретен. Очевидно также, что каждый k-дискретный линейный порядок k-квазидискретен. Понятно, что любой сильно η-схожий линейный порядок k-квазидискретен для некоторого натурального k.

2. Достаточное условие существования $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции

В изучении свойств η-схожих линейных порядков большую роль играют предельно монотонные функции.

Определение 6. Функция $G : A \to \mathbb{N}$ называется X-*предельно монотонной*, если существует X-вычислимая аппроксимация g такая, что

1) $G(x) = \lim\limits_{s\to\infty} g(x,s)$ (здесь предел всегда конечен) для всех $x \in A$;

2) $g(x,s) \le g(x,s+1)$ для всех $x \in A$, $s \in \mathbb{N}$.

Имеется следующее соответствие между $\mathbf{0}'$-предельно монотонными функциями и η-схожими линейными порядками.

Теорема 1 [1]. *Для η-схожих линейных порядков следующие условия эквивалентны:*

(1) $(L, <_{\mathscr{L}}, S_{\mathscr{L}}, B_{\mathscr{L}})$ имеет $\mathbf{0}'$-вычислимую копию,

(2) $(L, <_{\mathscr{L}}, B_{\mathscr{L}})$ имеет $\mathbf{0}'$-вычислимую копию,

(3) $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}}(1 + F(q))$ для некоторой $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$,

(4) $\mathscr{L}$ имеет вычислимую копию с Π^0_1-отношением блока.

Как отмечено в [7], из данной теоремы немедленно следует более ранний результат А. Н. Фролова [6] о том, что каждый низкий сильно η-схожий линейный порядок имеет вычислимую копию.

Определение 7. Блок $[x]_{\mathscr{L}}$ будем называть *левым* (*правым*) *локальным максимумом*, если существует $[y]_{\mathscr{L}} <_{\mathscr{L}} [x]_{\mathscr{L}}$ ($[y]_{\mathscr{L}} >_{\mathscr{L}} [x]_{\mathscr{L}}$) такой, что для любого $[z]_{\mathscr{L}}$ если $[y]_{\mathscr{L}} <_{\mathscr{L}} [z]_{\mathscr{L}} <_{\mathscr{L}} [x]_{\mathscr{L}}$ ($[y]_{\mathscr{L}} >_{\mathscr{L}} [z]_{\mathscr{L}} >_{\mathscr{L}} [x]_{\mathscr{L}}$), то выполняется $|[z]_{\mathscr{L}}| < |[x]_{\mathscr{L}}|$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{L}$ — η-схожий линейный порядок, в котором размеры левых и правых локальных максимумов ограничены. Порядок $\mathscr{L}$ имеет низкую копию тогда и только тогда, когда существует $\mathbf{0}'$-предельно монотонная функция $G : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ такая, что $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 из существования $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции $G : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ такой, что $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$, следует существование вычислимой копии порядка $\mathscr{L}$ и, значит, низкой. Таким образом, необходимо по низкой копии построить соответствующую $\mathbf{0}'$-предельно монотонную функцию.

Для построения $\mathbf{0}'$-вычислимой аппроксимации функции G будем строить вспомогательную функцию «выбора» φ, которая будет каждому рациональному числу ставить в соответствие элемент порядка $\mathscr{L}$, ровно по одному из каждого блока, сохраняя при этом порядок. Точнее, будем строить $\mathbf{0}'$-вычислимую аппроксимацию данной функции. Так как конечной целью является построение $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции G, построение аппроксимации функции φ будет производиться так, чтобы можно было обеспечивать выполнение следующего условия: если значение аппроксимации на некотором рациональном числе изменилось, т. е. $\varphi(q,s) \ne \varphi(q,s+1)$, то количество элементов, найденных к шагу $s+1$ в блоке, содержащем новое значение аппроксимации, должно быть не меньше, чем количество элементов, найденных к шагу s в блоке, содержащем предыдущее значение. Нетрудно видеть, что если обеспечить выполнение всех указанных условий, то $\mathbf{0}'$-вычислимую аппроксимацию функции G на элементе

q на шаге s можно задать как количество элементов, найденных к шагу s в блоке, содержащем элемент $\varphi(q, s)$.

По предположению теоремы существует k такое, что размеры блоков, являющихся левыми или правыми локальными максимумами, не превосходят k.

Основная идея построения заключается в том, что каждое новое значение для функции φ выбирается таким образом, чтобы между ним и значениями, определенными ранее, было не менее k элементов. Если выбранное значение является левым или правым локальным максимумом, то изменений значений аппроксимации φ на данном аргументе не будет, так как все предыдущие и последующие значения находятся на расстоянии, большем k, и, следовательно, лежат в других блоках. Предположим, что для двух различных аргументов p и q значения аппроксимации φ лежат в одном блоке. Пусть p — аргумент с большим номером (и соответственно с меньшим приоритетом). Тогда для p необходимо переопределить значение аппроксимации. Так как исходное расстояние между значениями φ на p и на q было больше k, блок $[x_0]_{\mathscr{L}}$, их содержащий, имеет размер больше k и, следовательно, не является ни левым, ни правым локальным максимумом. Тогда между данным блоком и любым другим найдется блок, имеющий размер, не меньший размера $[x_0]_{\mathscr{L}}$, который, в свою очередь, не меньше текущего значения аппроксимации функции g на элементе p. Таким образом, на p можно будет переопределить значение аппроксимации φ, не нарушая при этом ее значений на аргументах с более высоким приоритетом.

Перейдем к формальному описанию конструкции.

Положим по определению $d(x, y, s) = |\{z \leq s \mid x <_{\mathscr{L}} z <_{\mathscr{L}} y\}| + 1$, если $x <_{\mathscr{L}} y$, $d(x, y, s) = |\{z \leq s \mid y <_{\mathscr{L}} z <_{\mathscr{L}} x\}| + 1$, если $y <_{\mathscr{L}} x$, и $d(x, y, s) = 0$, если $x = y$.

Так как $\mathscr{L}$ — низкий линейный порядок, существует $\mathbf{0}'$-вычислимая копия порядка $\mathscr{L}$ с $\mathbf{0}'$-вычислимым отношением соседства. Далее будем работать с этой $\mathbf{0}'$-вычислимой копией, используя те же обозначения $\mathscr{L} = (L; <_{\mathscr{L}})$ так же, как для исходного линейного порядка. Введем $\mathbf{0}'$-вычислимое отношение $B(x, y, s)$ следующим образом: $B(x, y, 0) \rightleftharpoons x = y$, $B(x, y, s+1) \rightleftharpoons (\exists z < s+1)[B(x, z, s) \& S_{\mathscr{L}}(y, z)]$. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{s\to\infty} B(x, y, s) \Leftrightarrow B_{\mathscr{L}}(x, y)$ и $\neg B_{\mathscr{L}}(x, y) \Rightarrow (\forall s)[\neg B_{\mathscr{L}}(x, y, s)]$. Для упрощения изложения конструкции добавим в $\mathbb{Q}$ два новых элемента $-\infty, +\infty$ и положим $-\infty <_{\mathbb{Q}} q <_{\mathbb{Q}} +\infty$. Аналогично в $\mathscr{L}$ добавим два новых элемента, которые также обозначим через $-\infty, +\infty$, и положим $-\infty <_{\mathscr{L}} l <_{\mathscr{L}} +\infty$ для любого элемента $l \in L$. Кроме того, положим $\neg B_{\mathscr{L}}(-\infty, y, s)$ и $\neg B_{\mathscr{L}}(+\infty, y, s)$ для всех $y \in L$ и $s \in \omega$. Расширенные таким образом порядки будем обозначать теми же символами $\mathbb{Q}$ и $\mathscr{L}$ соответственно. Указанные неоднозначности в обозначениях в дальнейшем не приведут к путанице, и из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь.

Пусть $\{q_i\}_{i\in\omega}$ — некоторая фиксированная вычислимая нумерация рациональных чисел такая, что $q_0 = -\infty$, $q_1 = +\infty$.

Конструкция.

Шаг 0. Полагаем $\varphi(-\infty, 0) = -\infty$, $\varphi(+\infty, 0) = +\infty$, $g(-\infty, 0) = g(+\infty, 0) = 1$ и $g(q, 0) = 0$ для $q \in \mathbb{Q}$.

Шаг $s+1$. После шага s определено множество $Sp_s = \{i \in \omega \mid \varphi(q_i, s)\downarrow\}$, и пусть $Np_s = \{i \in \omega \mid \varphi(q_i, s)\uparrow \& (\exists t < s)[\varphi(q_i, t)\downarrow]\}$, т. е. множество индексов аргументов для которых на некотором более раннем шаге аппроксимация была определена, но инициализирована к шагу s. Отметим, что если $i \notin Sp_s \cup Np_s$, то $j \notin Sp_s \cup Np_s$ для $j > i$.

Случай 1. Найдутся $i, j \in Sp_s$, $i \neq j$, такие, что $B_{\mathscr{L}}(\varphi(q_i, s), \varphi(q_j, s), s+1)$. Пусть $Sp^0_{s+1} = \{0, 1\}$ и

$$Sp^{k+1}_{s+1} = Sp^k_{s+1} \cup \big\{\min\big\{i \in Sp_s \mid i \notin Sp^k_{s+1} \\ \&\big(\forall j \in Sp^k_{s+1}\big)[\neg B(\varphi(q_i, s), \varphi(q_j, s), s+1)]\big\}\big\}, \quad k \leq s.$$

Для всех $i \in Sp^{s+1}_{s+1}$ полагаем $\varphi(q_i, s+1) = \varphi(q_i, s)$, для всех $i \notin Sp^{s+1}_{s+1}$ полагаем $\varphi(q_i, s+1) \uparrow$. Переходим к определению функции g.

Случай 2. Нет $i, j \in Sp_s$, $i \neq j$, таких, что $B_{\mathscr{L}}(\varphi(q_i, s), \varphi(q_j, s), s+1)$. Находим наименьший индекс i_0 такой, что $\varphi(q_{i_0}, s) \uparrow$, т. е. требуется определение. Для $i \in Sp_s$ полагаем $\varphi(q_i, s+1) = \varphi(q_i, s)$.

Пусть $i_l, i_r \in Sp_s$ такие, что $q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_{i_0} <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}$, и не существует $j \in Sp_s$ такого, что $q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_j <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}$, т. е. q_{i_l} и q_{i_r} — наиболее близкие к q_{i_0} аргументы, на которых аппроксимация φ уже определена. Кроме того, найдем все аргументы между q_{i_l} и q_{i_r}, для которых φ была определена ранее и инициализировалась, т. е. пусть $i_{-d+1}, \dots, i_{-1}, i_1, \dots, i_{m-1} \in Np_s$ такие, что $q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_{i_{-d+1}} <_{\mathbb{Q}} \dots <_{\mathbb{Q}} q_{i_{-1}} <_{\mathbb{Q}} q_{i_0} <_{\mathbb{Q}} q_{i_1} <_{\mathbb{Q}} \dots <_{\mathbb{Q}} q_{i_{m-1}} <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}$, и если $j \in Np_s$, то $j = i_t$ для некоторого $-d \leq t \leq m$.

Проверяем, существует ли последовательность элементов $\varphi(q_{i_l}, s) = l_{-d} <_{\mathscr{L}} l_{-d+1} <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} l_0 <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} l_{m-1} <_{\mathscr{L}} l_m = \varphi(q_{i_r}, s)$, $l_j \leq s+1$, такая, что

1) $\neg B_{\mathscr{L}}(l_i, l_j, s+1)$ и $d(l_i, l_j, s+1) \geq k$ для всех $-d \leq i \neq j \leq m$;

2) $|\{n < s+1 \mid B_{\mathscr{L}}(l_j, n, s+1)\}| \geq g(q_{i_j}, s)$ для всех $-d < j < m$.

Если таких последовательностей существует несколько, то выбираем среди них с наименьшим (как натуральное число) возможным l_0; если и таких последовательностей несколько, то выбираем среди них последовательность, имеющую наименьший индекс конечного множества $\{i_{-d+1}, \dots, i_{-1}, i_1, \dots, i_{m-1}\}$ в стандартной нумерации всех конечных множеств, и полагаем $\varphi(q_{i_j}, s) = l_j$ для всех $-d < j < m$. Переходим к определению функции g.

Если таких последовательностей нет, то оставляем функцию не определенной, т. е. полагаем $\varphi(q_{i_0}, s) \uparrow$. Переходим к определению функции g.

Определение функции g. Функцию g определяем следующим образом:
$g(q_i, s+1) = g(q_i, s)$, если $\varphi(q_i, s+1) \uparrow$;
$g(q_i, s+1) = |\{l < s+1 \mid B(l, \varphi(q_i, s), s+1)\}|$, если $\varphi(q_i, s+1) \downarrow$.

Переходим к следующему шагу.
Конец конструкции.

Лемма 1. *Функция $\varphi(q_i) = \lim\limits_{s\to\infty} \varphi(q_i, s)$ определена для всех $i \in \omega$ и обладает следующими свойствами:*

(1) *$q_i <_{\mathbb{Q}} q_j$ тогда и только тогда, когда $\varphi(q_i) <_{\mathscr{L}} \varphi(q_j)$;*

(2) *если $q_i \neq q_j$, то $\varphi(q_i)$ и $\varphi(q_j)$ лежат в разных блоках;*

(3) *для любого блока $[x]_{\mathscr{L}}$ существует индекс $i \in \omega$ такой, что $\varphi(q_i) \in [x]_{\mathscr{L}}$.*

Доказательство. Если $i = 0$, то $\varphi(q_0, 0) = -\infty$. Так как q_0 — аргумент с наименьшим возможным индексом и соответственно самым высоким приоритетом, не существует шага $s > 0$ такого, что $\varphi(q_0, s) \uparrow$. Таким образом, $\varphi(q_0, s) = \varphi(q_0, s+1)$ для любого s, и, следовательно, $\varphi(q_0) = \lim\limits_{s\to\infty} \varphi(q_0, s) = \varphi(q_0, 0) = -\infty$. Поскольку $\varphi(q_0, s)$ никогда не меняется, аналогичные рассуждения для q_1 дают, что $\varphi(q_1) = +\infty$.

Пусть $i_0 > 1$ и для всех $i < i_0$ доказаны существование предела и свойства 1, 2. Тогда существует шаг s_0 такой, что $\varphi(q_i) = \varphi(q_i, s)$ для всех $i < i_0$

и $s > s_0$. Так как каждый блок конечен, в силу свойства 2 существует шаг $s_1 > s_0$ такой, что $B(l, \varphi(q_i)) \Leftrightarrow B(l, \varphi(q_i, s), s) \Leftrightarrow B(l, \varphi(q_i, s_1), s_1)$ для всех $i < i_0$, $s \geq s_1$.

Покажем, что существует шаг $s_2 \geq s_1$ такой, что $\varphi(q_{i_0}, s_2)\downarrow$. Пусть $i_l, i_r \in Sp_s$ такие, что $q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_{i_0} <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}$ и не существует $j \in Sp_s$ такого, что $q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_j <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}$. Такие индексы существуют, так как $q_0 = -\infty$ и $q_1 = +\infty$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $i_0 \notin Np_{s_1}$. Тогда $Np_{s_1} = \varnothing$, так как $i \in Sp_{s_1}$ для $i < i_0$. Поскольку порядок η-схожий, а $\varphi(q_{i_1})$ и $\varphi(q_{i_2})$ лежат в разных блоках, существует наименьший l_0 среди l такой, что $\varphi(q_{i_l}) <_{\mathscr{L}} l <_{\mathscr{L}} \varphi(q_{i_r})$ и $\neg B(l, \varphi(q_{i_u}))$ для $u \in \{l, r\}$. В силу выбора шага s_1 имеем $B(l, \varphi(q_i)) \Leftrightarrow B(l, \varphi(q_i, s), s)$ для любых $i < i_0$ и $s \geq s_1$, следовательно, $\neg B(l, \varphi(q_i, s), s)$. Кроме того, существует наименьший шаг $s_2 \geq \max\{s_1, l\}$ такой, что $d(l, \varphi(q_i, s), s_2) \geq k$ для $i < i_0$. Если $\varphi(q_{i_0}, s)\uparrow$ для $s_1 \leq s < s_2$, то $g(q_{i_0}, s_2) = 0$ и в силу вышесказанного на шаге s_2 одноэлементная последовательность l_0 удовлетворяет всем условиям конструкции. Таким образом, на шаге s_2 имеем $\varphi(q_{i_0}, s_2) = l_0$.

Случай 2: $i_0 \in Np_{s_1}$. Докажем, что если $i_l, i_r \in Sp_s$ такие, что $q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}$ и для любого $i \in Sp_s$ либо $q_i \leq_{\mathbb{Q}} q_{i_l}$, либо $q_{i_r} \leq_{\mathbb{Q}} q_i$, то для любого $j \in Np_s$ если $q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_j <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}$, то $\max\{g(q_{i_l}, s), g(q_{i_r}, s)\} > \max\{k, g(q_j, s)\}$. Проведем индукцию по количеству таких индексов $j \in Np_s$, что $q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_j <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}$. Если таких индексов нет, то утверждение выполняется. Пусть на шаге s существуют $n+1$ индекс j такой, что $j \in Np_s$ и $q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_j <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}$. Выберем наибольший шаг $s' < s$ такой, что

$$D = \{j \in Np_s \mid q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_j <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}\} - \{j \in Np_{s'} \mid q_{i_l} <_{\mathbb{Q}} q_j <_{\mathbb{Q}} q_{i_r}\} \neq \varnothing.$$

Это означает, что для $j \in D$ либо $B(\varphi(q_j, s'), \varphi(q_{i_l}, s'), s'+1)$ и, следовательно, $g(q_{i_l}, s'+1) > \max\{k, g(q_j, s'+1)\}$, либо $B(\varphi(q_j, s'), \varphi(q_{i_r}, s'), s'+1)$ и, следовательно, $g(q_{i_r}, s'+1) > \max\{k, g(q_j, s'+1)\}$. Таким образом,

$$\max\{g(q_{i_l}, s), g(q_{i_r}, s)\} \geq \max\{k, g(q_j, s')\} = \max\{k, g(q_j, s)\},$$

так как $\varphi(q_j, s'')\uparrow$ $(j \in D)$, $\varphi(q_{i_l}, s'')\downarrow$, $\varphi(q_{i_r}, s'')\downarrow$ для всех $s' < s'' \leq s$, значит,

$$g(q_j, s) = g(q_j, s+1) \ (j \in D), \quad g(q_{i_l}, s) = g(q_{i_l}, s+1), \quad g(q_{i_r}, s) = g(q_{i_r}, s+1).$$

Применяя индукционное предположение к соответствующим парам аргументов из q_{i_l}, q_{i_r}, q_j $(j \in D)$, получаем требуемое утверждение.

Итак,

$$\max\{g(q_{i_l}, s), g(q_{i_r}, s)\} > \max\{k, g(q_j, s)\}, \quad j \in D.$$

В свою очередь,

$$\max\{|[\varphi(q_{i_l}, s_1)]_{\mathscr{L}}|, |[\varphi(q_{i_r}, s_1)]_{\mathscr{L}}|\} > \max\{g(q_{i_l}, s), g(q_{i_r}, s)\}.$$

Последнее неравенство означает, что по крайней мере один из блоков $[\varphi(q_{i_l}, s_1)]_{\mathscr{L}}$ или $[\varphi(q_{i_r}, s_1)]_{\mathscr{L}}$ не является правым и левым локальным максимумом, следовательно, существует последовательность

$$\varphi(q_{i_l}, s) = l_{-d} <_{\mathscr{L}} l_{-d+1} <_{\mathscr{L}} \cdots <_{\mathscr{L}} l_0 <_{\mathscr{L}} \cdots <_{\mathscr{L}} l_{m-1} <_{\mathscr{L}} l_m = \varphi(q_{i_r}, s), \quad l_j \leq s+1,$$

такая, что $\neg B(l_i, l_j)$, $-d \leq i \neq j \leq m$, и

$$|[l_j]_{\mathscr{L}}| \geq \max\{|[\varphi(q_{i_l}, s_1)]_{\mathscr{L}}|, |[\varphi(q_{i_r}, s_1)]_{\mathscr{L}}|\} \geq \max\{g(q_{i_l}, s), g(q_{i_r}, s)\}, \quad -k < j < m.$$

В частности, существует такая последовательность с минимальным l_0, имеющая наименьший индекс конечного множества $\{i_{-d+1}, \dots, i_{-1}, i_1, \dots, i_{m-1}\}$ в стандартной нумерации всех конечных множеств. Тогда существует наименьший шаг $s_2 \geq \max\{s_1, l_j \mid -d < j < m\}$ такой, что $d(l_i, l_j, s_2) \geq k$ для $-d \leq i \neq j \leq m$. Если $\varphi(q_{i_0}, s) \uparrow$ для $s_1 \leq s < s_2$, то в силу вышеизложенного на этом шаге одноэлементная последовательность l_0 удовлетворяет всем условиям конструкции. Таким образом, на шаге s_2 имеем $\varphi(q_{i_0}, s_2) = l_0$.

Нетрудно видеть, что если $\varphi(q_{i_0}, s_2) \downarrow$ для некоторого шага $s_2 \geq s_1$, то $\varphi(q_{i_0}, s) = \varphi(q_{i_0}, s_2)$ для всех $s > s_2$. Если $\varphi(q_{i_0}, s) \neq \varphi(q_{i_0}, s_2)$, то существует шаг $s_3 > s_2$ такой, что $B(\varphi(q_{i_0}, s), \varphi(q_i, s), s_3)$ для некоторого $i < i_0$, что противоречит выбору шага s_1.

Для доказательства п. (3) заметим, что если $\varphi(q_{i_0}, s_0) \in [x]_{\mathscr{L}}$, то для любого $s > s_0$ существует индекс i такой, что $\varphi(q_i, s) \in [x]_{\mathscr{L}}$, причем $i \leq i_0$. Осталось показать, что для любого $[x]_{\mathscr{L}}$ существует шаг s_0 такой, что $\varphi(q_{i_0}, s_0) \in [x]_{\mathscr{L}}$. Пусть l — наименьший элемент (как натуральное число) из $[x]_{\mathscr{L}}$ и на некотором шаге s_1 для любого блока, содержащего только элементы, меньшие l, искомое условие доказано. Тогда на этом шаге существуют блоки $[x_1]_{\mathscr{L}} <_{\mathscr{L}} [x]_{\mathscr{L}} <_{\mathscr{L}} [x_2]_{\mathscr{L}}$ такие, что $\varphi(q_{i_1}, s_1) \in [x_1]_{\mathscr{L}}$ и $\varphi(q_{i_2}, s_1) \in [x_2]_{\mathscr{L}}$, при этом не существует i такого, что $\varphi(q_{i_1}, s_1) <_{\mathscr{L}} \varphi(q_i, s_1) <_{\mathscr{L}} \varphi(q_{i_2}, s_1)$. Пусть i_0 — наименьший индекс такой, что $q_{i_1} <_{\mathbb{Q}} q_{i_0} <_{\mathbb{Q}} q_{i_2}$. В силу вышеизложенного $\varphi(q_{i_0}, s_1) \uparrow$, следовательно, существует наименьший шаг $s_0 \geq s_1$ такой, что $\varphi(q_{i_0}, s_0) \uparrow$ и $\varphi(q_{i_0}, s_0+1) \downarrow$, и если $\neg(\varphi(q_i, s_0) \in [x]_{\mathscr{L}})$ для любого индекса i, то l в силу минимальности будет выбран как элемент последовательности $l_{-d+1}, \dots, l_0, \dots, l_m$, значит, $\varphi(q_{i'}, s_0 + 1) \in [x]_{\mathscr{L}}$ для некоторого i'.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Функция* $G(q) = \lim\limits_{s\to\infty} g(q, s)$ *является всюду определенной* $\mathbf{0}'$-*предельно монотонной функцией, при этом* $G(q) = |[\varphi(q)]_{\mathscr{L}}|$.

Доказательство. В силу леммы 1 для любого $i \in \omega$ существует шаг s_0 такой, что для любого $s > s_0$ выполняется $\varphi(q_i, s) \downarrow= \varphi(q_i)$. По определению функции g имеем

$$g(q_i, s) = |\{l < s \mid B(l, \varphi(q_i, s), s)\}| = |\{l < s \mid B(l, \varphi(q_i), s)\}|.$$

Тогда

$$\lim_{s\to\infty} g(q, s) = \lim_{s\to\infty} |\{l < s \mid B(l, \varphi(q_i), s)\}| = |\{l \mid B(l, \varphi(q_i))\}| = |[\varphi(q_i)]_{\mathscr{L}}|.$$

Осталось показать, что $g(q_i, s+1) \geq g(q_i, s)$. Если $\varphi(q_i, s+1) \uparrow$, то $g(q_i, s+1) = g(q_i, s)$. Если $\varphi(q_i, s+1) \downarrow$ и $\varphi(q_i, s) \uparrow$, то

$$g(q_i, s+1) = |\{l < s \mid B(l, \varphi(q_i, s+1), s+1)\}|$$

и $\varphi(q_i, s+1)$ определено так, что

$$|\{l < s+1 \mid B(l, \varphi(q_i, s+1), s+1)\}| \geq g(q_i, s).$$

Если $\varphi(q_i, s+1) \downarrow$ и $\varphi(q_i, s) \downarrow$, то

$$g(q_i, s+1) = |\{l < s+1 \mid B(l, \varphi(q_i, s+1), s+1)\}|,$$
$$g(q_i, s) = |\{l < s+1 \mid B(l, \varphi(q_i, s), s)\}|.$$

Так как $\varphi(q_i, s+1) = \varphi(q_i, s)$, то

$$\{l < s+1 \mid B(l, \varphi(q_i, s+1), s+1)\} \supset \{l < s+1 \mid B(l, \varphi(q_i, s), s)\},$$

следовательно,

$$|\{l < s+1 \mid B(l, \varphi(q_i, s+1), s+1)\}| \geq |\{l < s+1 \mid B(l, \varphi(q_i, s), s)\}|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Имеет место изоморфизм* $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$.

Доказательство немедленно следует из того, что функция φ «выбирает» с сохранением порядка в точности по одному элементу из каждого блока, и равенства $G(q) = |[\varphi(q)]_{\mathscr{L}}|$. Лемма и теорема доказаны.

Приведем несколько следствий, показывающих, что класс линейных порядков, рассматриваемый в теореме 2, существенно шире класса сильно η-схожих линейных порядков и линейных порядков, не содержащих сильно η-схожих интервалов.

Следствие 1. *Пусть η-схожий линейный порядок $\mathscr{L}$ представим в виде конечной суммы интервалов, каждый из которых либо не содержит сильно η-схожих подынтервалов, либо является сильно η-схожим. Порядок $\mathscr{L}$ имеет низкую копию тогда и только тогда, когда имеет вычислимую копию.*

Доказательство. Размер блоков в каждом сильно η-схожем подынтервале ограничен. Так как таких интервалов конечное число, существует k такое, что в любом из этих интервалов размер блоков не превосходит k. Интервалы $\mathscr{L}$, не имеющие сильно η-схожих подынтервалов, не имеют левых или правых локальных максимумов, и, следовательно, любой левый или правый локальный максимум лежит в одном из сильно η-схожих подынтервалов, и тем самым его размер не превосходит k. Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть η-схожий линейный порядок $\mathscr{L}$ представим в суммы интервалов, каждый из которых либо не содержит сильно η-схожих подынтервалов, либо является сильно η-схожим, и размеры блоков во всех сильно η-схожих подынтервалах ограничены числом k. Порядок $\mathscr{L}$ имеет низкую копию тогда и только тогда, когда имеет вычислимую копию.*

Доказательство. По условию существует k такое, что в любом из сильно η-схожих подынтервалов размер блоков не превосходит k. Интервалы $\mathscr{L}$, не имеющие сильно η-схожих подынтервалов, не имеют левых или правых локальных максимумов, и, следовательно, любой левый или правый локальный максимум лежит в одном из сильно η-схожих подынтервалов, значит, его размер не превосходит k. Следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть* $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{i\in I} a_i \cdot \eta$, *где* $I \subset \mathbb{Q}$, $a_i \in \omega$. *Порядок $\mathscr{L}$ имеет низкую копию тогда и только тогда, когда имеет вычислимую копию.*

Доказательство. Порядок $\mathscr{L}$ не имеет левых и правых локальных максимумов, и утверждение следует из теоремы 2. Следствие доказано.

3. Пример 2-квазидискретного порядка, не имеющего $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции

В этом разделе покажем, что для низких k-квазидискретных линейных порядков существование $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции, более сильное условие, чем существование вычислимой копии.

Теорема 3. *Существует 2-квазидискретный слабо η-схожий линейный порядок $\mathscr{L}$, для которого не существует пары $\mathbf{0}'$-предельно монотонных функций F и G такой, что $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q) + 1 + F(q)$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно построить $\mathbf{0}'$-вычислимую копию с $\mathbf{0}'$-вычислимым отношением соседства слабо η-схожего линейного порядка, который будет содержать только одноэлементные блоки, двухэлементные блоки и блоки типа ζ. Таким образом, построенный порядок будет 2-квазидискретным. Согласно [8] данный порядок будет иметь копию в низкой степени и, следовательно, вычислимую копию, так как он 2-квазидискретный.

Порядок будет строиться в виде суммы $\eta + \sum\limits_{e\in\omega} I(e)$, где каждый интервал $I(e)$ есть объединение $I(e) = \bigcup\limits_{s\in\omega} I_s(e)$ конечных линейных подпорядков $I_s(e)$ интервала $I(e)$, построенных к шагу s.

Каждый интервал $I_s(e)$ на шаге s, в свою очередь, имеет один из следующих видов:

1) $(Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$,

2) $(Z+\eta+2+\eta)\cdot 2^{e+1}$,

3) $(Z+\eta+Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$,

т. е. является суммой 2^{e+1} одинаковых подынтервалов одного из соответствующих видов.

В процессе конструкции необходимо преобразовывать интервалы вида 1 в интервалы вида 2, интервалы вида 2 в интервалы вида 3 и интервалы вида 3 в интервалы вида 1. Опишем соответствующие процедуры.

Для любой пары элементов $x, y \in \bigcup\limits_{e\in\omega} I_s(e)$, для которой явно не указано иное к концу шага s, будем полагать $\neg S(x,y)$.

1. Преобразование интервала вида 1 в интервал вида 2. Для каждого из 2^{e+1} подынтервалов вида $(Z+\eta)$ последовательно производим следующую процедуру.

Предположим, что рассматриваемый подынтервал имеет вид

$$z_1 <_{\mathscr{L}} z_2 <_{\mathscr{L}} \cdots < z_k <_{\mathscr{L}} z_{k+1} <_{\mathscr{L}} n_1 <_{\mathscr{L}} n_2 <_{\mathscr{L}} \cdots <_{\mathscr{L}} n_t.$$

Находим три наименьших еще не использованных элемента m, a, b. Полагаем

$$z_1 <_{\mathscr{L}} z_2 < \cdots <_{\mathscr{L}} z_k <_{\mathscr{L}} z_{k+1} <_{\mathscr{L}} m <_{\mathscr{L}} a <_{\mathscr{L}} b <_{\mathscr{L}} n_1 <_{\mathscr{L}} n_2 <_{\mathscr{L}} \cdots <_{\mathscr{L}} n_t.$$

Объявляем элементы a и b соседями, т. е. $S(a,b)$, и 2-элементами, а m — новым η-элементом.

2. Преобразование интервала вида 2 в интервал вида 3. Для каждого из 2^{e+1} подынтервалов вида $(Z+\eta+2+\eta)$ последовательно производим следующую процедуру.

Предположим, что рассматриваемый подынтервал имеет вид

$$z_1 <_{\mathscr{L}} \cdots <_{\mathscr{L}} z_k <_{\mathscr{L}} z_{k+1} <_{\mathscr{L}} n_1 <_{\mathscr{L}} \cdots <_{\mathscr{L}} n_t <_{\mathscr{L}} a <_{\mathscr{L}} b \\ <_{\mathscr{L}} n_{t+1} <_{\mathscr{L}} \cdots <_{\mathscr{L}} n_p.$$

Находим два наименьших еще не использованных элемента l, r. Полагаем

$$z_1 <_{\mathscr{L}} \cdots <_{\mathscr{L}} z_k <_{\mathscr{L}} n_1 <_{\mathscr{L}} \cdots <_{\mathscr{L}} n_t <_{\mathscr{L}} l <_{\mathscr{L}} a \\ <_{\mathscr{L}} b <_{\mathscr{L}} r <_{\mathscr{L}} n_{t+1} <_{\mathscr{L}} \cdots <_{\mathscr{L}} n_p.$$

Объявляем элементы l и a соседями, b и r — соседями, т. е. $S(l,a)$ и $S(b,r)$, l, a, b, r — z-элементами.

3. Преобразование интервала вида 3 в интервал вида 1. Для каждого из 2^{e+1} подынтервалов вида $(Z+\eta+Z+\eta)$ последовательно производим следующую процедуру.

Предположим, что рассматриваемый подынтервал имеет вид

$$z_{-k} <_{\mathscr{L}} z_{-k+1} <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} z <_{\mathscr{L}} z_1 <_{\mathscr{L}} n_1 <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} n_k <_{\mathscr{L}} z_{k+1} \\ <_{\mathscr{L}} z_{k+2} <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} z_{t-1} <_{\mathscr{L}} z_t <_{\mathscr{L}} n_{k+1} <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} n_p.$$

Находим $k+1$ наименьших еще не использованных элементов $x_1,\dots,x_{k+1}$. Полагаем

$$z_{-k} <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} z_1 <_{\mathscr{L}} x_1 <_{\mathscr{L}} n_1 <_{\mathscr{L}} x_2 <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} x_k <_{\mathscr{L}} n_k <_{\mathscr{L}} x_{k+1} \\ <_{\mathscr{L}} z_{k+1} <_{\mathscr{L}} z_{k+2} <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} z_{t-1} <_{\mathscr{L}} z_t <_{\mathscr{L}} n_{k+1} <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} n_p.$$

Определяем $S(x_i,n_i)$, $S(n_i,x_{i+1})$, $i=1,\dots,k$, $S(z_1,x_1)$, $S(x_{k+1},z_{k+1})$. Объявляем z-элементами элементы $n_1,\dots,n_k$ и $x_1,\dots,x_{k+1}$, а также все предыдущие z элементы рассматриваемого подынтервала.

Конструкция.

Шаг $s=0$. Полагаем $I_s(e)=\varnothing$.

Шаг $s+1$. После выполнения шага s возможен один из четырех случаев.

0. Интервал $I_s(e)$ еще не определен, т. е. пустое множество.

1. Интервал $I_s(e)$ имеет вид 1, т. е. $(Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$.

2. Интервал $I_s(e)$ имеет вид 2, т. е. $(Z+\eta+2+\eta)\cdot 2^{e+1}$.

3. Интервал $I_s(e)$ имеет вид 3, т. е. $(Z+\eta+Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$.

Обозначим $Zsp_s(e)=\{q_i\in\mathbb{Q}\mid i\le s,\psi_e(q_i,s)+1+\varphi_e(q_i,s)>2\}$. Пусть $Zsp_{s+1}(e)=\{p_1^{s+1}<\dots<p_m^{s+1}\}$.

Случай 0. Интервал $I_s(e)$ еще не определен, т. е. пустое множество.

Если $s<e$, полагаем $I_s(e)=\varnothing$ и переходим к следующему шагу.

Если $s=e$, находим 2^{e+2} наименьших еще не использованных элементов $z_1,\dots,z_{2^{e+1}}$ и $n_1,\dots,n_{2^{e+1}}$. Полагаем

$$I_s(e)=\{z_1 <_{\mathscr{L}} n_1 <_{\mathscr{L}} z_2 <_{\mathscr{L}} n_2 <_{\mathscr{L}} \dots <_{\mathscr{L}} n_{2^{e+1}-1} <_{\mathscr{L}} z_{2^{e+1}} <_{\mathscr{L}} n_{2^{e+1}}\}.$$

Элементы z_i и n_i $(i=1,\dots,2^{e+1})$ объявляем z- и η-элементами соответственно и переходим к следующему шагу.

Если имеем случаи 1–3, то ко всем соответствующим интервалам применяем процедуры расширения Z-интервалов и уплотнения η-интервалов. Далее выполняем одну из следующих процедур.

Обозначим $t=2^{e+2}-3$.

Случай 1. Интервал $I_s(e)$ имеет вид 1, т. е. $(Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$.

Если существует индекс $i\le s+1$ такой, что $p_{t-1}^{s+1}<q_i<p_t^{s+1}$ и $\psi_e(q_i,s)+1+\varphi_e(q_i,s)=2$, то ничего не делаем и переходим к следующему шагу.

В противном случае преобразовываем интервал $I_s(e)$ к виду 2 и переходим к следующему шагу.

Случай 2. Интервал $I_s(e)$ имеет вид 2, т. е. $(Z+\eta+2+\eta)\cdot 2^{e+1}$.

Если существует ровно один индекс $i\le s+1$ такой, что $p_{t-1}^{s+1}<q_i<p_t^{s+1}$ и $\psi_e(q_i,s)+1+\varphi_e(q_i,s)=2$, то преобразовываем интервал $I_s(e)$ к виду 3 и переходим к следующему шагу.

В противном случае переходим к следующему шагу.

Случай 3. Интервал $I_s(e)$ имеет вид 3, т. е. $(Z+\eta+Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$.

Если $p_t^s \neq p_t^{s+1}$, то преобразовываем интервал $I_s(e)$ к виду 1 и переходим к следующему шагу.

В противном случае переходим к следующему шагу.

Конец конструкции.

Легко видеть, что для каждого e либо существует шаг s_0, после которого $I_s(e)$ всегда имеет один и тот же из видов 1–3, либо вид $I_s(e)$ циклически преобразовывается из 1 в 2 из 2 в 3 и из 3 в 1. При этом в первом случае $I(e)$ имеет тип $(\zeta+\eta)\cdot 2^{e+1}$, $(\zeta+\eta+2+\eta)\cdot 2^{e+1}$ или $(\zeta+\eta+\zeta+\eta)\cdot 2^{e+1}$ соответственно.

Лемма 1. *Если существует бесконечно много s таких, что вид $I_s(e)$ не совпадает с видом $I_{s+1}(e)$, то $I(e)\cong(\zeta+\eta)\cdot 2^{e+1}$.*

Доказательство. В силу условий леммы существует последовательность шагов $s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{3k} < s_{3k+1} < s_{3k+2} < \dots$ такая, что на шагах s_{3k} применяется преобразование 1, на шагах s_{3k+1} — преобразование 2 и на шагах s_{3k+2} — преобразование 3, $k=0,1,\dots$, к $I_s(e)$ и между этими шагами не происходит преобразования вида указанного интервала.

Рассмотрим шаг s_{3k}. Так как на этом шаге применяется процедура 1, то $I_{s_{3k}-1}(e)$ имеет вид $(Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$. Назовем η-элементы на этом шаге *истинными η-элементами.* Кроме того, в дальнейшем будем называть *истинными η-элементами* все новые η-элементы, между которыми и истинными η-элементами лежат только η-элементы. Аналогично для Z-элементов все z-элементы на этом шаге назовем *истинными z-элементами.* Кроме того, в дальнейшем будем называть *истинными z-элементами* все z-элементы, лежащие на некотором шаге в одном блоке с истинными z-элементами (имеется в виду блок, индуцированный отношением соседства $S_{\mathscr{L}}$, которое определяется в процессе конструкции).

После применения процедуры преобразования вида интервала получаем, что $I_{s_{3k}}(e)$ имеет вид $(Z+\eta+2+\eta)\cdot 2^{e+1}$, где все истинные z-элементы остались истинными z-элементами, истинные η-элементы остались истинными η-элементами (второй интервал типа η в каждом подынтервале $Z+\eta+2+\eta$) и появились новые η-элементы, которые не являются истинными, и новые 2-элементы.

Рассмотрим шаг s_{3k+1}. Интервал $I_{s_{3k+1}-1}(e)$ также имеет вид $(Z+\eta+2+\eta)\cdot 2^{e+1}$, но содержит новые z-, η-элементы и истинные z-, η-элементы. При этом все элементы шага s_{3k} сохранили свой тип к этому шагу. После применения процедуры преобразования на шаге s_{3k+1} получим, что $I_{s_{3k+1}}(e)$ имеет вид $(Z+\eta+Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$ и 2-элементы стали z-элементами (но не истинными z-элементами), остальные элементы при этом сохранили свой тип.

Рассмотрим шаг s_{3k+2}. Интервал $I_{s_{3k+2}-1}(e)$ также имеет вид $(Z+\eta+Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$, содержит новые z-, η-элементы и истинные z-, η-элементы. При этом все элементы шага s_{3k+1} сохранили свой тип к этому шагу. После применения процедуры преобразования на шаге s_{3k+1} получим, что $I_{s_{3k+2}}(e)$ снова имеет вид $(Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$ и η-элементы (но не истинные η-элементы) и z-элементы предыдущего шага стали истинными z-элементами. Кроме того, все истинные z- и η-элементы шага $s_{3k}-1$ ни разу не меняли свой тип. Таким образом, получаем, что истинные η-элементы всегда остаются истинными η-элементами и, таким образом, образуют подынтервалы типа η в $I(e)$. Остальные элементы на некотором шаге станут истинными z-элементами и больше не будут менять свой тип. Нетрудно видеть, что в $I(e)$ истинные z-элементы образуют подынтервалы типа ζ. Таким образом, в $I(e)$ каждый из 2^{e+1} соответствующих подынтервалов имеет тип $\zeta + \eta$. Лемма доказана.

Мы установили, что построенный линейный порядок является $\mathbf{0}'$-вычислимым с $\mathbf{0}'$-вычислимым отношением соседства, слабо η-схожим и 2-квазидискретным. Следующая лемма завершает доказательство.

Лемма 2. *Не существует пары* $\mathbf{0}'$*-предельно монотонных функций* F *и* G *такой, что* $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q) + 1 + F(q)$.

Доказательство. Рассмотрим подынтервалы в порядке $\mathscr{L}$, изоморфные ζ. По построению такие интервалы расположены в порядке ω и, следовательно, их можно пронумеровать натуральными числами так, что интервал с меньшим номером будет располагаться в порядке $\mathscr{L}$ левее, чем интервал с большим номером (т. е. все элементы интервала с меньшим номером будут меньше в порядке $\mathscr{L}$ любого элемента из интервала с большим номером). Пусть $\{Z_n\}_{n\in\omega}$ такая нумерация (не обязательно эффективная) всех интервалов типа ζ.

Напомним, что $t = 2^{e+2} - 3$, и отметим, что Z_{t-1}, Z_t лежат в $I(e)$ и, следовательно, весь интервал содержится между ними. Это следует из того, что для любого n интервал $I(n)$ содержит либо 2^{n+1}, либо 2^{n+2} подынтервалов типа ζ. Таким образом, левее $I(e)$ расположено от $\sum\limits_{i=0}^{e-1} 2^{i+1}$ до $\sum\limits_{i=0}^{e-1} 2^{i+2}$ интервалов типа ζ. Таким образом, подынтервал $I(e)$ типа ζ с наименьшим номером может иметь номер от $2^{e+1} - 2$ до $2^{e+2} - 4$, а подынтервал $I(e)$ типа ζ с наибольшим номером может иметь номер от $2^{e+2} - 3$ до $2^{e+3} - 5$.

Рассмотрим пару функций ψ_e, φ_e. Пусть они являются аппроксимациями $\mathbf{0}'$-предельно монотонных функций F и G. Покажем, что

$$\mathscr{L} \not\cong \sum_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q) + 1 + F(q).$$

Отметим, что в порядке $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q) + 1 + F(q)$ интервалы типа ζ должны быть расположены по типу ω и также могут быть пронумерованы натуральными числами, иначе утверждение леммы доказано.

1. Существует шаг s_0, после которого $I_s(e)$ всегда имеет вид 1, т. е. $(Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$. Следовательно, на каждом шаге $s > s_0$ существует индекс $p^{s+1}_{t-1} < q_i < p^{s+1}_t$ и $\psi_e(q_i, s) + 1 + \varphi_e(q_i, s) = 2$. Пусть i_s — наименьший такой индекс на шаге s. Возможны два случая.

Случай 1: существует шаг $s' > s_0$ такой, что для любого $s > s'$ выполняется $i_s = i_{s'}$. Тогда в порядке $\mathscr{L}$ между Z_{t-1} и Z_t нет двухэлементных блоков, а в порядке $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q) + 1 + F(q)$ между ζ-интервалами с теми же номерами есть по крайней мере один двухэлементный блок и, следовательно, порядки не являются изоморфными.

Случай 2: существует бесконечная последовательность шагов $s_0 < s_1 < \ldots$ таких, что $i_{s_j} \neq i_{s_{j+1}}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $i_{s_j} < i_{s_{j+1}}$. Тогда нетрудно видеть, что $q_{i_{s_{j+1}}} <_{\mathbb{Q}} q_{i_{s_j}}$. В силу выбора $q_{i_{s_{j+1}}}$ полуинтервал $(q_{i_{s_{j+1}}} q_{i_{s_j}}]$ содержит элемент из $Zsp_{s_{j+1}}(e)$ и, следовательно, из

$Zsp(e)$. Таким образом, $Zsp(e)$ содержит бесконечную убывающую последовательность, что противоречит тому, что в порядке $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q)+1+F(q)$ интервалы типа ζ упорядочены по типу ω.

2. Существует шаг s_0, после которого $I_s(e)$ всегда имеет вид 2, т. е. $(Z+\eta+2+\eta)\cdot 2^{e+1}$. Тогда на каждом шаге $s>s_0$ неверно, что существует ровно один индекс такой, что $p_{t-1}^{s+1}<q_i<p_t^{s+1}$ и $\psi_e(q_i,s)+1+\varphi_e(q_i,s)=2$. Возможны несколько случаев.

Случай 1: существует бесконечно много шагов таких, что нет ни одного индекса такого, что $p_{t-1}^{s+1}<q_i<p_t^{s+1}$ и $\psi_e(q_i,s)+1+\varphi_e(q_i,s)=2$. Тогда в порядке $\mathscr{L}$ между Z_{t-1} и Z_t ровно один двухэлементный блок, а в порядке $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q)+1+F(q)$ между ζ-интервалами с теми же номерами нет двухэлементных блоков.

Случай 2: существуют шаг s_0 и индексы i,j такие, что $p_{t-1}^{s+1}<q_i,q_j<p_t^{s+1}$ и $\psi_e(q_i,s)+1+\varphi_e(q_i,s)=2$, $\psi_e(q_j,s)+1+\varphi_e(q_j,s)=2$ на каждом шаге $s>s_0$. Тогда в порядке $\mathscr{L}$ между Z_{t-1} и Z_t ровно один двухэлементный блок, а в порядке $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q)+1+F(q)$ между ζ-интервалами с теми же номерами по крайней мере два двухэлементных блока.

Случай 3: на любом шаге $s>s_0$ существуют по крайней мере два индекса i_s,j_s таких, что $p_{t-1}^{s+1}<q_{i_s},q_{j_s}<p_t^{s+1}$ и $\psi_e(q_{i_s},s)+1+\varphi_e(q_{i_s},s)=2$, $\psi_e(q_{j_s},s)+1+\varphi_e(q_{j_s},s)=2$. При этом по крайней мере для одного из индексов (не ограничивая общности, можно считать, что для i_s) существует бесконечная последовательность шагов $s_0<s_1<\ldots$ таких, что $i_{s_l}\neq i_{s_{l+1}}$, $l=0,1,\ldots$. Далее доказательство аналогично доказательству для случая 2 в п. 1.

3. Существует шаг, после которого $I_s(e)$ всегда имеет вид 3, т. е. $(Z+\eta+Z+\eta)\cdot 2^{e+1}$. Пусть s_0 — наименьший такой шаг, следовательно, на шаге s_0 было применено преобразование из интервала вида 2 в интервал вида 3. Такое преобразование могло быть применено, только если на шаге s_0 существует ровно один индекс $i\le s_0$ такой, что $p_{t-1}^{s_0}<q_i<p_t^{s_0}$ и $\psi_e(q_i,s_0)+1+\varphi_e(q_i,s_0)=2$. Так как после шага s_0 интервал $I_s(e)$ всегда имеет вид 3, то $p_t^s=p_t^{s+1}$ для любого $s\ge s_0$, следовательно, $q_i\notin Zsp$. Тем самым $\psi_e(q_i,s)+1+\varphi_e(q_i,s)=2$ для любого $s>s_0$, так что $G^*(q_i)+1+F(q_i)\cong 2$. Тогда в порядке $\mathscr{L}$ между Z_{t-1} и Z_t нет двухэлементных блоков, а в порядке $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q)+1+F(q)$ между ζ-интервалами с теми же номерами по крайней мере один двухэлементный блок.

4. Оставшийся случай означает, что существует бесконечная последовательность шагов $s_0,s_1,\ldots$, на которых происходит преобразование из типа 3 в 1, и по построению $p_t^{s_i}\neq p_t^{s_i+1}$. По определению $Zsp_s(e)\subseteq Zsp_{s+1}(e)$, следовательно, $p_t^{s_i}\neq p_t^{s_i+1}$ влечет, что $p_{t'}^{s_i}\neq p_{t'}^{s_i+1}$ для всех $t'>t$, для которых элемент $p_{t'}^{s_i}$ определен. Пусть $q=p_t^{s_0}$ и так как $Zsp_s(e)\subseteq Zsp_{s+1}(e)$, то $q\in Zsp_{s+1}(e)$, значит, существует t_0 такой, что $q=p_{t_0}^{s_0+1}$, причем $t_0>t$. Более того, на шагах s_i+1 будем иметь $q=p_{t_i}^{s_i+1}$, где $t<t_0<t_1<t_2<\ldots$. Это означает, что множество $Zsp(e)=\bigcup\limits_{s\in\omega} Zsp_s(e)$ имеет бесконечно много элементов, расположенных в $\mathbb{Q}$ левее, чем q, следовательно, линейный порядок $\langle Zsp(e),<_{\mathbb{Q}}\rangle$ не изоморфен ω.

Так как каждый элемент $Zsp(e)$ соответствует одному интервалу типа ζ в порядке $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q)+1+F(q)$, интервалы, изоморфные ζ в порядке $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q)+1+F(q)$, не расположены по типу ω, следовательно, порядки $\mathscr{L}$ и $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G^*(q)+1+F(q)$

не могут быть изоморфны. Лемма и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frolov A. N., Zubkov M. V.* Increasing η-representable degrees // Math. Log. Quart. 2009. V. 55. P. 633–636.

2. *Downey R. G., Kach A. M., Turetsky D.* Limitwise monotonic functions and their applications // Proc. 11th Asian logic conf. Singapore: World Sci., 2012. P. 59–85.

3. *Downey R. G., Jockusch C. G.* Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122, N 3. P. 871–880.

4. *Jockusch C. G., Soare R. I.* Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings // Ann. Pure Appl. Logic. 1991. V. 52. P. 39–61.

5. *Downey R. G., Moses M. F.* On choice sets and strongly non-trivial self-embeddings of recursive linear orders // Math. Log. Quart. 1989. V. 35. P. 237–246.

6. *Фролов А. Н.* Δ^0_2 копии линейных порядков // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 3. С. 354–370.

7. *Frolov A. N.* Low linear orderings // J. Log. Comp. 2012. V. 22, N 4. P. 745–754.

8. *Фролов А. Н.* Линейные порядки низкой степени // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1147–1162.

9. *Соар Р. И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казан. мат. о-во, 2000.

10. *Rosenstein J.* Linear orderings. New York: Acad. Press, 1982.

11. *Downey R. G.* Computability theory and linear orderings // Handbook of Computable Algebra. Amsterdam: Elsevier, 1998. V. 2. P. 823–976.

Статья поступила 19 февраля 2016 г.

Зубков Максим Витальевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ИММ им. Н. И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
maxim.zubkov@kpfu.ru