Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 512.541

АЛГЕБРЫ КВАЗИЭНДОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРЫХ КВАЗИРАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 4

А. В. Чередникова

Аннотация. Получена классификация алгебр квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения ранга 4, квазиразложимых в прямую сумму сильно неразложимых групп ранга 2.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.616

Ключевые слова: алгебра квазиэндоморфизмов, абелева группа, группа без кручения, квазиразложимая группа.

1. Введение

Всюду в статье под словом «группа» будет подразумеваться абелева группа без кручения конечного ранга, записанная аддитивно.

Понятие алгебры квазиэндоморфизмов группы было введено Бьюмонтом и Пирсом в 1961 г. в их совместной работе [1]. Эта работа послужила возникновению задачи классификации алгебр квазиэндоморфизмов групп малых рангов. В частности, в ней были перечислены с точностью до изоморфизма все рациональные алгебры, реализующиеся в качестве алгебр квазиэндоморфизмов групп ранга 2. В конце 1990-х гг. автором была получена классификация алгебр квазиэндоморфизмов групп ранга 3 [2–4].

Классификационная задача для групп ранга 4 до настоящего времени не является полностью решенной. В монографии Фатикони (см. [5, теорема 4.4.9]) представлена классификация алгебр квазиэндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 4 с нулевым радикалом Джекобсона. На пути решения этой проблемы для сильно неразложимых групп ранга 4 с ненулевым радикалом Джекобсона получен ряд результатов в [6, 7]. Классификационная задача для почти вполне разложимых групп ранга 4 решена автором в [8, 9].

В предлагаемой статье дается классификация алгебр квазиэндоморфизмов групп ранга 4, квазиразложимых в прямую сумму сильно неразложимых групп ранга 2. Доказано, что с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существует 25 алгебр и 9 бесконечных серий алгебр, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов таких групп.

2. Предварительные сведения

2.1. Основные определения и обозначения. Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел и G — группа конечного ранга. Делимую оболочку $\mathbb{Q}\otimes G$ можно рассматривать как $\mathbb{Q}$-пространство, аддитивная группа которого содержит G в качестве подгруппы.

© 2016 **Чередникова А. В.**

Пусть группа H содержится в делимой оболочке $\mathbb{Q}\otimes G$ группы G. Группы G и H называются *квазиравными* ($G \doteq H$), если существуют натуральные числа n и m такие, что $nG \subseteq H$ и $mH \subseteq G$.

Под *квазиразложением* группы G понимается семейство ненулевых подгрупп G_i $(i \in I)$ делимой оболочки $\mathbb{Q}\otimes G$ группы G таких, что $G \doteq \bigoplus\limits_{i\in I} G_i$. При этом каждая из групп G_i называется *квазислагаемым* группы G.

Группа G называется *квазиразложимой*, если она обладает нетривиальными квазиразложениями.

Алгеброй квазиэндоморфизмов или *кольцом квазиэндоморфизмов* $\mathscr{E}(G)$ группы G называется $\mathbb{Q}$-алгебра $\mathbb{Q}\otimes E(G)$, где $E(G)$ — кольцо эндоморфизмов G. Элементы из $\mathscr{E}(G)$ называются *квазиэндоморфизмами* группы G.

Понятие квазиэндоморфизма группы является частным случаем понятия квазигомоморфизма групп.

Если A и B — группы, то $\mathbb{Q}$-пространство $\mathbb{Q}\otimes \operatorname{Hom}(A,B)$ называется *группой квазигомоморфизмов*, а его элементы — *квазигомоморфизмами*. В частности, если $A=B$, то $\mathbb{Q}\otimes\operatorname{Hom}(A,A)=\mathscr{E}(A)$. Для групп A и B группу квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\otimes\operatorname{Hom}(A,B)$ условимся обозначать через $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B)$.

В настоящей статье используются также следующие обозначения: $IT(G)$ и $OT(G)$ — внутренний и внешний типы группы G соответственно (см. [10]); $\langle S\rangle_*$ — сервантная подгруппа группы G, порожденная подмножеством S в G; M^t — матрица, транспонированная к матрице M; м.л.н.с. — максимальная линейно независимая система.

Тип элемента a группы A обозначается через $t(a)$, тип группы R ранга 1 — через $t(R)$. Для групп R_i и R_j ранга 1 запись $t(R_i)\xi t(R_j)$ означает, что $t(R_i)$ несравним с $t(R_j)$.

Отсутствующие в тексте определения, факты и обозначения можно найти в [11].

2.2. Техника вычисления алгебр квазиэндоморфизмов квазиразложимой группы.

Соглашение 1. Всюду далее G будет обозначать группу ранга 4, для которой имеет место следующее квазиразложение:

$$G \doteq A\oplus B, \tag{1}$$

где A и B — сильно неразложимые группы ранга 2.

Лемма 1 (Бьюмонт — Пирс [1]). *Пусть G и H — группы. Если $G \doteq H$, то $\mathscr{E}(G)=\mathscr{E}(H)$.*

Соглашение 2. В силу леммы 1 доказательство нижеследующих теорем 1–7 для группы G сводится к вычислению алгебр квазиэндоморфизмов квазиравной ей прямой суммы $A\oplus B$.

Замечание 1. В работе используется представление алгебр квазиэндоморфизмов прямых сумм групп определенными ниже матрицами.

Пусть дана прямая сумма групп $A=A_1\oplus A_2$. Обозначим через $i_k : A_k \to A$ и $\pi_l : A\to \mathbb{Q}\otimes A_l$, $k,l=1,2$, возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции соответственно.

Пусть произвольный элемент $a\in A$ равен сумме $\sum\limits_{k=1}^{2} i_k(a_k)$, где $a_k\in A_k$.

Для $\varphi \in \mathscr{E}(A)$ имеем

$$\varphi(a) = \sum_{k=1}^{2} \varphi i_k(a_k) = \sum_{k,l=1}^{2} \pi_l \varphi i_k(a_k).$$

Тогда отображение

$$f : \varphi \mapsto [\pi_l \varphi i_k]_{k,l=1,2},$$

при котором каждый элемент $\varphi \in \mathscr{E}(A)$ ассоциируется с матрицей $[\pi_l \varphi i_k]$, является изоморфизмом кольца $\mathscr{E}(A)$ и кольца матриц $[\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_k, A_l)]_{k,l=1,2}$ (см. [12, предложение, с. 67]).

Таким образом, если $A = A_1 \oplus A_2$, то алгебра квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(A)$ представляется кольцом матриц $\begin{pmatrix} \mathscr{E}(A_1) & \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, A_1) \\ \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, A_2) & \mathscr{E}(A_2) \end{pmatrix}$. При этом для групп A_1 и A_2 будем отождествлять естественным образом $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, A_2)$ с подгруппой $\pi_{A_2}\mathscr{E}(A)i_{A_1}$ из $\mathscr{E}(A)$, где $i_{A_1} : A_1 \to A$ и $\pi_{A_2} : A \to \mathbb{Q} \otimes A_2$ являются соответственно гомоморфизмом вложения и квазигомоморфизмом проекции.

Замечание 2. Пусть A — произвольная группа ранга n с м.л.н.с. $x_1, \ldots, x_n$ и $X_i = \langle x_i \rangle_*$. Положим $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$. Тогда $\mathbb{Q} \otimes X \cong \mathbb{Q} \otimes A$ как $\mathbb{Q}$-пространства размерности n. Следовательно, алгебра квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(A)$ группы A является подалгеброй матричной алгебры $[\alpha_{ji}]_{i,j=1,\ldots,n}$, где $\alpha_{ji} \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Q} \otimes X_i, \mathbb{Q} \otimes X_j)$.

Лемма 2. *Пусть A и B — сильно неразложимые группы ранга 2. Группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ имеет ранг 4 тогда и только тогда, когда $OT(A) \leq IT(B)$* [10].

Лемма 3. *Пусть A и B — сильно неразложимые группы ранга 2. Если $OT(A) \leq IT(B)$, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = 0$.*

Доказательство. Очевидно, что если $OT(A) < IT(B)$, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = 0$. Предположим, что $OT(A) = IT(B)$ и существует ненулевой квазигомоморфизм $f \in \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$. Пусть b — произвольный элемент группы B, не принадлежащий $\operatorname{Ker} f$. Легко видеть, что $IT(B) = t(b) = t(f(b)) = OT(A)$. Тогда существует квазиэндоморфизм $g \in \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ такой, что $g(f(b)) = b$. Следовательно, короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$$

расщепляется (см. [13, предложение 4.3]). Это означает, что группа B разложима в прямую сумму групп; противоречие. Лемма доказана.

Псевдоцоколем $\operatorname{Soc} G$ группы G называется сервантная подгруппа, порожденная всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами.

Группа называется *неприводимой*, если она не имеет собственных сервантных вполне характеристических подгрупп. Очевидно, что неприводимая группа совпадает со своим псевдоцоколем.

Предложение 1 (Рейд [14]). *Пусть G — сильно неразложимая группа ранга 2. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется в качестве алгебры квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathscr{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:*

$$\mathbb{Q}, \quad \mathbf{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \mathbf{k}b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ \mathbf{k} \text{ — свободное от квадратов целое число} \right\}.$$

При этом справедливы следующие утверждения:

1) $\mathbf{K} \cong \mathbb{Q} \Leftrightarrow G = \operatorname{Soc} G$ *и* G *содержит вполне характеристическую подгруппу ранга* 1*;*

2) $\mathbf{K} \cong \mathbf{P} \Leftrightarrow G$ *неприводима;*

3) $\mathbf{K} \cong \mathbf{T} \Leftrightarrow G \neq \operatorname{Soc} G$.

3. Основные результаты

Соглашение 3. В нижеследующих теоремах 1–7 нижний индекс $\mathbf{i}$ алгебры $\mathbf{A}_\mathbf{i}^{(\mathbf{j})}$ обозначает ее размерность над $\mathbb{Q}$, а верхний индекс $\mathbf{j}$ — порядковый номер алгебры, не имеющий содержательной интерпретации. Кроме того, $\mathbf{k}$ в обозначении алгебры $\mathbf{A}_\mathbf{i}^{(\mathbf{j})}(\mathbf{k})$ и в записи представляющей ее матрицы — свободное от квадратов целое число.

Теорема 1. *Пусть G — группа ранга 4 такая, что имеет место квазиразложение (1). Пусть группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B)$ имеет ранг 1 и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,A) = 0$. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(G)$ группы G изоморфна или антиизоморфна одной из следующих алгебр:*

$$\mathbf{A}_\mathbf{3}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_\mathbf{4}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_\mathbf{5}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Доказательство. Пусть квазиразложимая группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A \oplus B$. Легко видеть, что в рассматриваемом случае оба квазислагаемых A и B группы G не могут являться однородными группами.

Согласно замечанию 1 кольцо $\mathscr{E}(H)$ изоморфно кольцу матриц

$$\begin{pmatrix} \mathscr{E}(A) & 0 \\ \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B) & \mathscr{E}(B) \end{pmatrix}.$$

Вычислим кольца квазиэндоморфизмов группы H на основании предложения 1. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — м.л.н.с. группы H, где $x_1, x_2 \in A$ и $x_3, x_4 \in B$. Обозначим $X_i = \langle x_i \rangle_*$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Предположим, что

$$\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

В этом случае мощности множеств типов групп A и B равны 2 (см. [15, теорема 3.3]). Пусть $\{\tau_1, \tau_2\}$ и $\{\tau_3, \tau_4\}$ — множества типов групп A и B соответственно, где $\tau_1 < \tau_2$ и $\tau_3 < \tau_4$. Существует м.л.н.с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы H такая, что $t(x_i) = \tau_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ввиду замечания 2

$$\mathscr{E}(H) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ji} {\in} \operatorname{Hom}(\mathbb{Q} \otimes X_i, \mathbb{Q} \otimes X_j),\ i, j{=}1, 2, 3, 4 \right\}.$$

В рассматриваемом случае $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, X_4)$, так как в противном случае ранг $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ будет больше 1. Следовательно, если $f \in \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$, то $f(x_1) = rx_4$, где $r \in \mathbb{Q}$, и $\operatorname{Ker} f = X_2$. Отсюда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_5^{(1)}}$.

Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathbb{Q}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T}$. Тогда существует м.л.н.с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы H такая, что $\tau_3 < \tau_4$. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$. Стало быть, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, X_4)$, иначе $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ будет иметь ранг 2. Таким образом, если $g \in \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$, то $g(x_1) = sx_4$, где $s \in \mathbb{Q}$, и $\operatorname{Ker} f = X_2$. Отсюда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_4^{(1)}}$.

Если $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{T}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q}$, то

$$\mathscr{E}(H) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{K_4^{(1)}}.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathbf{K_4^{(1)}}$ антиизоморфно $\mathbf{A_4^{(1)}}$. Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. В этом случае $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_3^{(1)}}$.

Теорема 2. *Пусть G — группа ранга 4, обладающая квазиразложением (1). Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$ имеют ранг 1. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(G)$ группы G изоморфна или антиизоморфна одной из следующих алгебр:*

$$\mathbf{A_4^{(2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_5^{(2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_5^{(3)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_6^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Доказательство. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию теоремы. Обозначим $H = A \oplus B$. Очевидно, что квазислагаемые A и B группы G не могут быть однородными группами.

Вычислим кольца квазиэндоморфизмов группы H, основываясь на замечании 1 и предложении 1.

Пусть элементы $x_1, x_2 \in A$ и $x_3, x_4 \in B$ образуют м.л.н.с. группы H. Положим $X_i = \langle x_i \rangle_*$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Предположим, что $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. В этом случае согласно теореме 1 $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, X_3)$. Следовательно,

$$\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_4, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_4, X_2).$$

Действительно, пусть $g \in \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$ и $g(x_3) = rx_1$, где $r \in \mathbb{Q}$, а $\operatorname{Ker} g = X_4$. Тогда группа A разложима в прямую сумму групп (см. [13, предложение 4.3]); противоречие. Допустим, что $g(x_3) = sx_2$, где $s \in \mathbb{Q}$, и $\operatorname{Ker} g = X_4$. Тогда существует ненулевой квазигомоморфизм, отображающий X_1 в X_2, что невозможно. Аналогичные рассуждения приводят к противоречию, если $g(x_4) = kx_1$, где $k \in \mathbb{Q}$, и $\operatorname{Ker} g = X_3$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_4^{(2)}}$.

Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathbb{Q}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$. Существует м.л.н.с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы H такая, что $\tau_3 < \tau_4$. Ввиду теоремы 1 в рассматриваемом случае $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, X_4)$. Тогда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, A)$, иначе получим противоречие. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, X_1)$, то $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_5^{(2)}}$. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, X_2)$, то $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_5^{(3)}}$. Заметим, что $\mathbf{A_5^{(2)}}$ и $\mathbf{A_5^{(3)}}$ не изоморфны, так как $\mathbf{A_5^{(2)}}$ имеет единственный двусторонний нильпотентный идеал размерности 3 над $\mathbb{Q}$, индекс нильпотентности которого равен 3, а $\mathbf{A_5^{(3)}}$ имеет единственный двусторонний нильпотентный идеал размерности 3 над $\mathbb{Q}$ индекса нильпотентности 2.

Нетрудно убедиться, что если $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{T}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q}$, то $\mathscr{E}(H)$ антиизоморфно $\mathbf{A_5^{(2)}}$ или $\mathbf{A_5^{(3)}}$.

Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T}$. Легко видеть, что в этом случае $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, X_4)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, X_2)$. Следовательно, $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_6^{(1)}}$.

Теорема 3. *Пусть G — группа ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (1). *Пусть группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ имеет ранг 2 и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = 0$. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(G)$ группы G изоморфна или антиизоморфна одной из следующих алгебр:*

$$\mathbf{A_4^{(3)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_5^{(4)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_5^{(5)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_5^{(6)}(k)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_6^{(2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_6^{(3)}}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы. Положим $H = A \oplus B$. Пусть элементы x_1, x_2, x_3, x_4 образуют м.л.н.с. группы H, где $x_1, x_2 \in A$ и $x_3, x_4 \in B$. Пусть $X_i = \langle x_i \rangle_*$, $i = 1, 2, 3, 4$. В силу замечания 1 кольцо $\mathscr{E}(H)$ изоморфно кольцу матриц $\begin{pmatrix} \mathscr{E}(A) & 0 \\ \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) & \mathscr{E}(B) \end{pmatrix}$.

Допустим, что $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. Тогда возможны следующие три случая:

1) $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$;

2) $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_3)$;

3) $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) \cong \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, X_3) \oplus \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, X_4)$.

В первом случае получаем, что $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_4^{(3)}}$. Во втором случае $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{K_4^{(2)}}$, где

$$\mathbf{K_4^{(2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

В третьем случае $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{K_4^{(3)}}$, где

$$\mathbf{K_4^{(3)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Нетрудно показать, что кольцо $\mathbf{K_4^{(2)}}$ изоморфно кольцу $\mathbf{K_4^{(3)}}$ и антиизоморфно алгебре $\mathbf{A_4^{(3)}}$. Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathbb{Q}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$. В этом случае существует м.л.н.с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы H такая, что $\tau_3 < \tau_4$. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ имеет ранг 2, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$. Следовательно, $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_5^{(4)}}$. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ имеет ранг 1, то легко видеть, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_4)$. Тогда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_5^{(5)}}$.

Перейдем к случаю, когда $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{T}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_4)$, то $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{K_5^{(1)}}$, где

$$\mathbf{K_5^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$, то $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{K_5^{(2)}}$, где

$$\mathbf{K_5^{(2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Легко видеть, что кольца $\mathbf{K_5^{(1)}}$ и $\mathbf{K_5^{(2)}}$ антиизоморфны соответственно алгебрам $\mathbf{A_5^{(4)}}$ и $\mathbf{A_5^{(5)}}$.

Предположим, что $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T}$. Тогда существует м.л.н.с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы H такая, что $t(x_1) < t(x_2)$ и $t(x_3) < t(x_4)$. Пусть $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ имеет ранг 1. Тогда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, B)$ тоже должен иметь ранг 1. Отсюда следует, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, X_4)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, X_4)$, иначе получим противоречие. Следовательно, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_4)$. В этом случае находим, что $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_6^{(2)}}$. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ имеет ранг 2, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$. Тогда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{K_6^{(1)}}$, где

$$\mathbf{K_6^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что кольцо $\mathbf{K_6^{(1)}}$ антиизоморфно алгебре $\mathbf{A_6^{(2)}}$.

Допустим, что $\mathscr{E}(A) \cong \mathbb{Q}$ и

$$\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{P} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \mathbf{k}b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ \mathbf{k} \text{ — свободное от квадратов целое число} \right\}.$$

В этом случае B — неприводимая группа. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$. Отсюда следует, что $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_5^{(6)}}(\mathbf{k})$. Очевидно, что если $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{P}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q}$, то $\mathscr{E}(H)$ антиизоморфно $\mathbf{A_5^{(6)}}(\mathbf{k})$.

Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{T}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{P}$. Тогда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$, так как в противном случае получим противоречие. Стало быть, $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_6^{(3)}}(\mathbf{k})$.

Если $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{P}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T}$, то $\mathscr{E}(H)$ антиизоморфно $\mathbf{A_6^{(3)}}(\mathbf{k})$.

Ясно, что случай $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbf{P}$ невозможен.

Теорема 4. *Пусть G — группа ранга 4 такая, что имеет место квазиразложение* (1). *Пусть группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ имеет ранг 2, а группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$ — ранг 1 или 2. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(G)$ группы G изоморфна или антиизоморфна одной из следующих алгебр:*

$$\mathbf{A_7^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_8^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_6^{(4)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_7^{(2)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Доказательство. Пусть G — квазиразложимая группа, удовлетворяющая условию теоремы, и $H = A \oplus B$.

Вычислим кольца квазиэндоморфизмов группы H на основании замечания 1 и предложения 1.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — м.л.н.с. группы H, где $x_1, x_2 \in A$ и $x_3, x_4 \in B$. Обозначим $X_i = \langle x_i \rangle_*$, $i = 1, 2, 3, 4$.

I. Предположим, что

$$\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Существует м.л.н.с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы H такая, что $t(x_1) < t(x_2)$ и $t(x_3) < t(x_4)$. В этом случае в силу теоремы 3 группа квазиэндоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда либо $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$, либо $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_4)$. Заметим, что если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ имеет ранг 2, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, X_1) = 0$.

Пусть $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$ имеет ранг 1. Тогда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, X_2)$. При этом $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, X_2) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, X_2)$, иначе $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$ будет иметь ранг 2. Отсюда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{1})}$.

В случае, если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$ имеет ранг 2, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, X_2)$. Тогда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{1})}$.

Далее, пусть $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_4)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$ имеет ранг 1. Так как $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_4)$ имеет ранг 2, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_4, A) = 0$. Тогда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, A)$. При этом $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, X_2)$, поскольку в противном случае $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, A)$ будет иметь ранг 2. Отсюда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{K}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{1})}$, где

$$\mathbf{K}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Нетрудно показать, что кольцо $\mathbf{K}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{1})}$ антиизоморфно алгебре $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{1})}$.

Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_4)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$ имеет ранг 2, то

$$\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, A).$$

В этом случае $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{1})}$.

II. Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathbb{Q}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T}$. В этом случае по теореме 3 группа квазиэндоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда либо $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$, либо $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_4)$.

Легко видеть, что случай $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) \neq 0$ невозможен.

Допустим, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_4)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$ имеет ранг 1. В этом случае $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_4, A) = 0$. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, X_1)$. Получаем $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{4})}$.

Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B)=\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,X_4)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,A)$ имеет ранг 2, то, очевидно, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,A)=\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3,A)$. Отсюда следует, что $\mathscr{E}(H)\cong\mathbf{A}_7^{(2)}$.

III. Пусть $\mathscr{E}(A)\cong\mathbf{T}$ и $\mathscr{E}(B)\cong\mathbb{Q}$. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B)=\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1,B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,A)$ имеет ранг 1, то легко видеть, что кольцо $\mathscr{E}(H)$ антиизоморфно алгебре $\mathbf{A}_6^{(4)}$. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B)=\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1,B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,A)$ имеет ранг 2, то $\mathscr{E}(H)\cong\mathbf{A}_7^{(2)}$.

Очевидно, что случай, когда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B)=\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,X_4)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,A)\neq 0$, невозможен.

IV. Допустим, что $\mathscr{E}(A)\cong\mathbf{T}$ и $\mathscr{E}(B)\cong\mathbf{P}$, где

$$\mathbf{P}=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ \mathbf{k}b & a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{Q},\ \mathbf{k}\text{ — свободное от квадратов целое число}\right\}.$$

Существует м.л.н.с. x_1,x_2,x_3,x_4 группы H такая, что $t(x_1)<t(x_2)$. В этом случае (см. доказательство теоремы 3) $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B)=\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1,B)$. Тогда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,X_1)=0$. Следовательно, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,X_2)\neq 0$. При этом очевидно, что группа квазиэндоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,A)$ имеет ранг 2. Получаем, что $\mathscr{E}(H)\cong\mathbf{A}_8^{(2)}(\mathbf{k})$.

V. Допустим $\mathscr{E}(A)\cong\mathbf{P}$ и $\mathscr{E}(B)\cong\mathbf{T}$. Ясно, что в этом случае $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B)=\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,X_4)$. Тогда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_4,A)=0$. Следовательно, если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,A)\neq 0$, то группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,A)$ имеет ранг 2 и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B,A)=\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3,A)$. Можно показать, что в этом случае $\mathscr{E}(H)\cong\mathbf{A}_8^{(2)}(\mathbf{k})$.

VI. Легко видеть, что для слагаемых A и B группы H следующие случаи невозможны:

а) $\mathscr{E}(A)\cong\mathscr{E}(B)\cong\mathbb{Q}$;
б) $\mathscr{E}(A)\cong\mathbb{Q}$ и $\mathscr{E}(B)\cong\mathbf{P}$;
в) $\mathscr{E}(A)\cong\mathbf{P}$ и $\mathscr{E}(B)\cong\mathbb{Q}$;
г) $\mathscr{E}(A)\cong\mathscr{E}(B)\cong\mathbf{P}$.

Теорема 5. *Пусть G — группа ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (1). *Пусть группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A,B)$ имеет ранг 3. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(G)$ группы G изоморфна или антиизоморфна одной из следующих алгебр:*

$$\mathbf{A}_5^{(6)}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_{11}&0&0&0\\0&\alpha_{11}&0&0\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&0\\\alpha_{41}&0&0&\alpha_{33}\end{pmatrix}\mid \alpha_{ij}\in\mathbb{Q}\right\},$$

$$\mathbf{A}_6^{(5)}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_{11}&0&0&0\\0&\alpha_{11}&0&0\\\alpha_{31}&0&\alpha_{33}&0\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\mid \alpha_{ij}\in\mathbb{Q}\right\},$$

$$\mathbf{A}_7^{(3)}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_{11}&0&0&0\\\alpha_{21}&\alpha_{11}&0&0\\\alpha_{31}&0&\alpha_{33}&0\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\mid \alpha_{ij}\in\mathbb{Q}\right\},$$

$$\mathbf{A}_8^{(3)}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_{11}&0&0&0\\\alpha_{21}&\alpha_{11}&\alpha_{23}&0\\\alpha_{31}&0&\alpha_{33}&0\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\mid \alpha_{ij}\in\mathbb{Q}\right\}.$$

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы. Обозначим прямую сумму $A \oplus B$ через H. Ясно, что в рассматриваем случае ни одно из квазислагаемых A или B не может быть однородной группой.

Вычислим кольца квазиэндоморфизмов группы H, используя замечание 1 и предложение 1.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 образуют м.л.н.с. группы H, где $x_1, x_2 \in A$ и $x_3, x_4 \in B$. Пусть $X_i = \langle x_i \rangle_*$, $i = 1, 2, 3, 4$.

I. Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$. Существует м.л.н.с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы H такая, что $t(x_1) < t(x_2)$ и $t(x_3) < t(x_4)$. Ясно, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ имеет ранг 3, если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ имеет ранг 2 и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, X_4)$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) \cong \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B) \oplus \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, X_4).$$

Предположим, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = 0$. Тогда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_7^{(3)}}$.

Пусть $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) \neq 0$. Так как $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, X_4)$ имеет ранг 2, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_4, A) = 0$. Следовательно,

$$\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, A) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_3, X_2),$$

иначе группа A будет разложима в прямую сумму групп. Отсюда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_8^{(3)}}$.

II. Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. Не теряя общности, можно считать, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) \cong \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B) \oplus \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, X_3)$.

Допустим, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = 0$. Тогда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_5^{(6)}}$. Ясно, что случай $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) \neq 0$ невозможен.

III. Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathbb{Q}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$. В этом случае существует м.л.н.с. x_1, x_2, x_3, x_4 группы H такая, что $t(x_3) < t(x_4)$. Не нарушим общность рассуждений, если предположим, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ имеет ранг 2. Тогда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ будет иметь ранг 3, если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) \cong \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B) \oplus \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, X_4)$.

Допустим, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = 0$. Тогда $\mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_6^{(5)}}$.

Легко видеть, что случай, когда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) \neq 0$, невозможен.

IV. Пусть $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{T}$ и $\mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. Тогда группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ имеет ранг 3, если ранги $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, B)$ равны 2 и 1 соответственно. Не теряя общности, можно считать, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, X_3)$. Следовательно,

$$\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) \cong \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_1, B) \oplus \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(X_2, X_3).$$

Нетрудно убедиться, что если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = 0$, то $\mathscr{E}(H)$ антиизоморфно $\mathbf{A_6^{(5)}}$. Очевидно, что случай $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) \neq 0$ невозможен.

Теорема 6. *Пусть G — группа ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (1). *Пусть группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ имеет ранг 4. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется в качестве алгебры квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathscr{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно или антиизоморфно одной из следующих алгебр:*

$$\mathbf{A_6^{(6)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_7^{(4)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_7^{(5)}(k)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_8^{(4)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_8^{(5)}(k)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \mathbf{k}\alpha_{12} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_8^{(6)}(n,k)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \mathbf{n}\alpha_{12} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом справедливы следующие утверждения:

1) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_6^{(6)}} \Leftrightarrow OT(A) \le IT(B)$, $A = \operatorname{Soc} A$ *и* A *содержит вполне характеристическую подгруппу ранга* 1, $B = \operatorname{Soc} B$ *и* B *содержит вполне характеристическую подгруппу ранга* 1*;*

2) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_7^{(4)}} \Leftrightarrow OT(A) \le IT(B)$, $A = \operatorname{Soc} A$ *и* A *содержит вполне характеристическую подгруппу ранга* 1, $B \neq \operatorname{Soc} B$*;*

3) $\mathbf{K}$ *антиизоморфно* $\mathbf{A_7^{(4)}} \Leftrightarrow OT(A) \le IT(B)$, $A \neq \operatorname{Soc} A$, $B = \operatorname{Soc} B$ *и* B *содержит вполне характеристическую подгруппу ранга* 1*;*

4) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_7^{(5)}(k)} \Leftrightarrow OT(A) \le IT(B)$, $A = \operatorname{Soc} A$ *и* A *содержит вполне характеристическую подгруппу ранга* 1, B *неприводима;*

5) $\mathbf{K}$ *антиизоморфно* $\mathbf{A_7^{(5)}(k)} \Leftrightarrow OT(A) \le IT(B)$, A *неприводима*, $B = \operatorname{Soc} B$ *и* B *содержит вполне характеристическую подгруппу ранга* 1*;*

6) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_8^{(4)}} \Leftrightarrow OT(A) \le IT(B)$, $A \neq \operatorname{Soc} A$ *и* $B \neq \operatorname{Soc} B$*;*

7) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_8^{(5)}(k)} \Leftrightarrow OT(A) \le IT(B)$, A *неприводима и* $B \neq \operatorname{Soc} B$*;*

8) $\mathbf{K}$ *антиизоморфно* $\mathbf{A_8^{(5)}(k)} \Leftrightarrow OT(A) \le IT(B)$, $A \neq \operatorname{Soc} A$ *и* B *неприводима;*

9) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A_8^{(6)}(n,k)} \Leftrightarrow OT(A) \le IT(B)$, A *и* B *неприводимы.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A \oplus B$.

Согласно лемме 2 группа $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ имеет ранг 4 тогда и только тогда, когда $OT(A) \le IT(B)$. В этом случае по лемме 3 $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = 0$.

Из вышеизложенного, замечания 1 и предложения 1 непосредственно вытекают следующие утверждения:

1) $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\} \Rightarrow \mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_8^{(4)}}$;

2) $\mathscr{E}(A) \cong \mathbb{Q}$, $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T} \Rightarrow \mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_7^{(1)}}$;

3) $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{T}$, $\mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q} \Rightarrow \mathscr{E}(H)$ антиизоморфно $\mathbf{A_7^{(1)}}$;

4) $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{P} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \mathbf{k}b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, \mathbf{k} \text{ — свободное от квадратов целое число} \right\}$, $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{T} \Rightarrow \mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_8^{(2)}}(\mathbf{k})$;

5) $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{T}$, $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{P} \Rightarrow \mathscr{E}(H)$ антиизоморфно $\mathbf{A_8^{(2)}}(\mathbf{k})$;

6) $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q} \Rightarrow \mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_6^{(1)}}$;

7) $\mathscr{E}(A) \cong \mathbb{Q}$, $\mathscr{E}(B) \cong \mathbf{P} \Rightarrow \mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_7^{(2)}}$;

8) $\mathscr{E}(A) \cong \mathbf{P}$, $\mathscr{E}(B) \cong \mathbb{Q} \Rightarrow \mathscr{E}(H)$ антиизоморфно $\mathbf{A_7^{(2)}}$;

9) $\mathscr{E}(A) \cong \mathscr{E}(B) \cong \mathbf{P} \Rightarrow \mathscr{E}(H) \cong \mathbf{A_8^{(3)}}(\mathbf{n}, \mathbf{k})$.

Справедливость необходимых и достаточных условий реализации полученных колец в качестве алгебр квазиэндоморфизмов рассматриваемых групп очевидна.

Теорема 7. *Пусть G — группа ранга 4, которая имеет квазиразложение* (1). *Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A)$ равны нулю. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(G)$ группы G изоморфна или антиизоморфна одной из следующих алгебр:*

$$\mathbf{A_2^{(1)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_3^{(2)}}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_3^{(3)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_4^{(4)}}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 9 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_4^{(5)}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_4^{(5)}}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \mathbf{n}\alpha_{12} & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы. Обозначим $H = A \oplus B$. Так как $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A, B) = \mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A) = 0$, на основании замечания 1 кольцо $\mathscr{E}(H)$ представляется кольцом матриц $\begin{pmatrix} \mathscr{E}(A) & 0 \\ 0 & \mathscr{E}(B) \end{pmatrix}$. Отсюда и из предложения 1 непосредственно вытекает справедливость теоремы.

Замечание 3. Нетрудно видеть, что все алгебры из формулировок теорем 1–7, имеющие одинаковые размерности над $\mathbb{Q}$, попарно не изоморфны.

Итак, пусть G — группа без кручения ранга 4, квазиразложимая в прямую сумму сильно неразложимых групп ранга 2. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathscr{E}(G)$ группы G изоморфна или антиизоморфна одной из алгебр, перечисленных в формулировках теорем 1–7.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Torsion free groups of rank two // Mem. Amer. Math. Soc. 1961. V. 38. P. 1–41.
2. *Чередникова А. В.* Кольца квазиэндоморфизмов абелевых почти вполне разложимых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1996. № 13–14. С. 237–242.
3. *Чередникова А. В.* Кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1996. № 13–14. С. 224–236.
4. *Чередникова А. В.* Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 5. С. 763–773.
5. *Faticoni T. G.* Direct sum decompositions of torsion-free finite rank groups. Boca Raton; New York: Chapman and Hall/CRC, 2007.
6. *Чередникова А. В.* Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с псевдоцоколями ранга 3 // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16, № 3. С. 245–250.
7. *Чередникова А. В.* О кольцах квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с псевдоцоколями ранга 1 // Фунд. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 8. С. 177–182.
8. *Чередникова А. В.* Кольца квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с нулевым радикалом Джекобсона // Фунд. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 8. С. 169–175.
9. *Чередникова А. В.* Кольца квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4, не совпадающих со своими псевдоцоколями // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 4. С. 609–619.
10. *Warfield R.* Homomorphisms and duality for torsion free groups // Math. Z. 1968. Bd 107. S. 189–200.
11. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.
12. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
13. *Маклейн С.* Гомология. М.: Мир, 1966.
14. *Reid J. D.* On the ring of quasi-endomorphism of a torsion-free group // Topics in abelian groups. Chicago; Ill.: Scott, Foresman and Co., 1963. P. 51–68.
15. *Arnold D. M.* Finite rank torsion free abelian groups and rings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1982. (Lect. Notes Math.; V. 931).

Статья поступила 3 ноября 2015 г., окончательный вариант — 20 июня 2016 г.

Чередникова Алла Викторовна
Костромской гос. технологический университет,
кафедра высшей математики,
ул. Дзержинского, 17, Кострома 156005
`av-cherednikova@list.ru`