Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 517.545

О КЛАССАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ РОДА ТРИ НА РИМАНОВУ ПОВЕРХНОСТЬ РОДА ДВА

А. Д. Медных, И. А. Медных

Аннотация. Обозначим через $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ множество всех голоморфных отображений римановой поверхности S_3 рода три на риманову поверхность S_2 рода два. Два отображения f и g из $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ будем называть *эквивалентными*, если существуют конформные автоморфизмы α и β римановых поверхностей S_3 и S_2 соответственно такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ g$. Известно, что $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ всегда состоит не более чем из двух классов эквивалентности. Получены следующие результаты. Предположим, что множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ образовано двумя классами эквивалентности. Тогда обе римановы поверхности S_3 и S_2 задаются вещественными алгебраическими уравнениями. При этом для любой пары неэквивалентных отображений f и g из $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ существуют антиконформные автоморфизмы α^- и β^- такие, что $f \circ \alpha^- = \beta^- \circ g$. С точностью до конформной эквивалентности существует ровно три пары римановых поверхностей (S_3, S_2), для которых множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.612

Ключевые слова: риманова поверхность, голоморфное отображение, антиконформная инволюция, вещественная кривая, конформный автоморфизм.

1. Введение

Обозначим через $\mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$ множество всех голоморфных отображений римановой поверхности S_g рода g на риманову поверхность $S_{g'}$ рода g', где $g \geq g' > 1$.

Классическая теорема де Франкиса [1] утверждает, что число элементов $\mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$ конечно и ограничено константой, зависящей только от g. Первая верхняя оценка на число $\mathrm{Hol}(S_g, S_{g'})$ получена в работе Ховарда и Соммезе [2]. В дальнейшем оценка была улучшена в работах Альзатти и Пирола [3], Танабе [4, 5] и Ито и Ямамото [6]. Однако полученные здесь оценки не являются точными. Первая точная оценка такого рода была найдена в [7]. В ней установлено, что число голоморфных отображений произвольной римановой поверхности рода три на произвольную риманову поверхность рода два не превосходит 48. Там же указан явный вид римановых поверхностей, для которых она достигается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15–01–07906, 16–31–00138) и гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006).

© 2016 Медных А. Д., Медных И. А.

Два отображения f и g из $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ будем называть *эквивалентными*, если существуют конформный автоморфизм α римановой поверхности S_3 и конформный автоморфизм β римановой поверхности S_2 такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ g$. Известно [8], что для любых S_3 и S_2 в множестве $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ существует не более двух классов эквивалентности. Цель настоящей статьи — определить, в каких случаях множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит ровно из двух классов эквивалентности.

В данной работе получены следующие результаты. Предположим, что множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности. Тогда

(1) обе римановы поверхности S_3 и S_2 вещественны, т. е. обладают антиконформными инволюциями;

(2) если отображения f и g из $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ неэквивалентны, то существуют антиконформный автоморфизм α^- римановой поверхности S_3 и антиконформный автоморфизм β^- римановой поверхности S_2 такие, что $f \circ \alpha^- = \beta^- \circ g$;

(3) с точностью до конформной эквивалентности существует ровно три пары римановых поверхностей (S_3, S_2), для которых множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности.

2. Предварительные сведения

В данной работе *римановой поверхностью* называется одномерное компактное связное комплексное многообразие без края.

Хорошо известно, что существует взаимно однозначное соответствие между объектами категории римановых поверхностей и категории алгебраических кривых. При этом классу конформно эквивалентных поверхностей соответствует класс бирациональных эквивалентных кривых, а голоморфным отображениям — рациональные. В настоящей работе будем широко использовать указанные взаимно однозначные соответствия. В дальнейшем, следуя [9], будем отождествлять классы конформно эквивалентных римановых поверхностей с классами бирационально эквивалентных кривых. В этом случае будем говорить, что риманова поверхность *определяется соответствующим алгебраическим уравнением*, полагая, что указанное алгебраическое уравнение задает поле мероморфных функций на данной римановой поверхности. При этом [9, с. 5] две римановы поверхности S и S' конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда между полями $\mathscr{M}(S)$ и $\mathscr{M}(S')$ определенных на них мероморфных функций существует изоморфизм, сохраняющий константы.

Пусть риманова поверхность S определяется уравнением $P(w, z) = 0$, где P — неприводимый над $\mathbb{C}$ полином от двух переменных. Тогда S может быть рассмотрена как риманова поверхность алгебраической функции $w = w(z)$. В этом случае величины w и z удобно трактовать как определенные на S мероморфные функции, которые связаны соотношением $P(w, z) = 0$ и порождают поле всех мероморфных функций $\mathscr{M}(S)$. Это, в частности, означает, что любая мероморфная функция $\varphi \in \mathscr{M}(S)$ представима в виде $\varphi = R(w, z)$, где R — подходящая рациональная функция двух переменных.

Гиперэллиптическая поверхность — это поверхность, допускающая двулистное накрытие над сферой Римана. Накрывающая инволюция такого накрытия называется *гиперэллиптической инволюцией*. Каждая гиперэллиптическая поверхность рода g представляется уравнением

$$w^2 = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_{2g+2}),$$

где $z_1, z_2, \dots, z_{2g+2}$ — различные комплексные числа, при этом действие гиперэллиптической инволюции на поверхности осуществляется по правилу τ :

$(w, z) \to (-w, z)$. Известно, что любая риманова поверхность рода 2 гиперэллиптическая. В [10, 11] показано, что риманова поверхность рода 3, двулистно накрывающая поверхность рода 2, также будет гиперэллиптической римановой поверхностью.

Двумерным орбифолдом O будем называть риманову поверхность S с выделенным на ней дискретным подмножеством точек Σ, каждой из которых приписано некоторое натуральное число ≥ 2; Σ называется *сингулярным множеством* или множеством *особых точек* орбифолда O, а поверхность S — его носителем. Основные факты из теории орбифолдов изложены в [12, § 2; 13, гл. 13].

В настоящей работе в качестве S всюду будет использована замкнутая риманова поверхность рода 0, т. е. риманова сфера $\overline{\mathbb{C}}$, а в качестве $\Sigma = \{z_1, z_2, \dots, z_{2g+2}\}$ — подмножество $\overline{\mathbb{C}}$, состоящее из четного числа точек, каждой из которой приписано число 2. В этом случае для краткости будем писать $O = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_{2g+2})$. *Изоморфизмом* орбифолдов $O_g = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_{2g+2})$ и $O'_g = \overline{\mathbb{C}}(z'_1, z'_2, \dots, z'_{2g+2})$ называется конформное (дробно-линейное) отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, отображающее множество особых точек $z_1, z_2, \dots, z_{2g+2}$ на множество особых точек $z'_1, z'_2, \dots, z'_{2g+2}$.

Пусть S_g — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g и τ — гиперэллиптическая инволюция. Будем рассматривать фактор-пространство $O_g = S_g/\langle\tau\rangle$ как двумерный орбифолд, носителем которого является сфера Римана, а особыми точками — проекции $2g + 2$ точек Вейерштрасса при каноническом отображении $S_g \to O_g = S_g/\langle\tau\rangle$.

Приведем некоторые общие факты из теории римановых поверхностей [14, 5]. Пусть S_g и $S_{g'}$ — гиперэллиптические римановы поверхности, а τ и τ' — их гиперэллиптические инволюции. Тогда произвольное сюръективное голоморфное отображение $f : S_g \to S_{g'}$ эквиинвариантно относительно действия инволюций, т. е. $f \circ \tau = \tau' \circ f$. Это означает, что f опускается до голоморфного отображения орбифолдов $\hat{f} : O_g = S_g/\langle\tau\rangle \to O_{g'} = S_{g'}/\langle\tau'\rangle$. При этом $\hat{f}$ имеет ровно два поднятия до отображения S_g на $S_{g'}$, а именно f и $f \circ \tau$. Кроме того, в случае $g = g'$ любой изоморфизм орбифолдов $\hat{f} : O_g \to O_{g'}$ поднимается до изоморфизма римановых поверхностей $f : S_g \to S_{g'}$.

Пусть S_g — компактная риманова поверхность рода g. *Симметрией* поверхности S_g называется антиконформная инволюция $\sigma : S_g \to S_g$. Риманова поверхность, допускающая симметрию, называется *симметричной.* При этом, пара (S_g, σ) называется *вещественной формой* поверхности S_g, а фактор-пространство $S_g/\langle\sigma\rangle$ — соответствующей этой форме *клейновой поверхностью.* Согласно теории, изложенной в [15], категория клейновых поверхностей эквивалентна категории полных гладких неприводимых (над $\mathbb{C}$) вещественных алгебраических кривых. Заметим,что риманова поверхность может иметь более чем одну симметрию. С. М. Натанзон [16] показал, что при $g \geq 2$ с точностью до сопряжения на римановой поверхности S_g существует не более чем $2(\sqrt{g} + 1)$ симметрий. Полученная оценка точная и достигается для бесконечного числа значений g вида $(2^n - 1)^2$.

Пусть S_g — гиперэллиптическая риманова поверхность. Предположим, что S_g допускает симметрию σ. Тогда так же, как и в случае конформных отображений, симметрия $\sigma : S_g \to S_g$ индуцирует антиконформное отображение $\hat{\sigma} : O_g \to O_g$, которое тоже является инволюцией. Важно отметить, что $\hat{\sigma}$ представляется как мёбиусово отображение второго рода $\hat{\sigma} : z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$. При этом [17, теорема 4.1.2] в случае, когда $\hat{\sigma}$ имеет неподвижные точки, оно сопряжено отображению $z \to \bar{z}$; иначе оно сопряжено антиподальной инволюции $z \to -\frac{1}{\bar{z}}$.

3. Инварианты групп автоморфизмов и голоморфных отображений

Напомним, что всякая риманова поверхность S_2 рода 2, имеющая по крайней мере одну негиперэллиптическую конформную инволюцию, представляется в виде $y^2 = x^6 + a_1x^4 + a_2x^2 + 1$. При этом диэдральные инварианты определяются как $u_1 = a_1^3 + a_2^3$ и $u_2 = 2a_1a_2$. Известно [18], что строение группы автоморфизмов римановой поверхности S_2 полностью определяется парой (u_1, u_2). В частности, $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 48$ тогда и только тогда, когда $(u_1, u_2) = (-250, 50)$, и $|\operatorname{Aut}(S_2)| = 24$ тогда и только тогда, когда $(u_1, u_2) = (0, 0)$ или $(u_1, u_2) = (6750, 450)$. В случаях $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_6$ и $\operatorname{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_4$ диэдральные инварианты удовлетворяют соотношениям $u_2^2 - 220u_2 - 16u_1 + 4500 = 0$ и $2u_1^2 - u_2^3 = 0$ соответственно. В случае, когда группа $\operatorname{Aut}(S_2)$ содержит только одну инволюцию, ее строение однозначно определяется набором инвариантов Больца [19] или их современной модификацией, данной в [20].

Голоморфные отображения $f : S_3 \to S_2$ и $f' : S_3' \to S_2'$ называются *эквивалентными*, если существуют изоморфизмы римановых поверхностей $\alpha : S_3 \to S_3'$ и $\beta : S_2 \to S_2'$ такие, что $\beta \circ f = f' \circ \alpha$.

Следующее предложение, доказанное в [7], дает простой критерий эквивалентности голоморфных отображений.

Предложение 1. *Пусть $f : S_3 \to S_2$ и $f' : S_3' \to S_2'$ — голоморфные отображения римановых поверхностей рода 3 на римановы поверхности рода 2. Обозначим через $\hat{f} : O_3 \to O_2$ и $\hat{f}' : O_3' \to O_2'$ соответствующие им проекции на орбифолды. Отображения f и f' эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм орбифолдов O_2 и O_2', переводящий критические значения функции $\hat{f}$ в критические значения функции $\hat{f}'$.*

4. Основной результат

Основным результатом данной статьи является

Теорема 4.1. *Предположим, что множество $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности. Тогда*

(1) *обе римановы поверхности S_3 и S_2 вещественны, т. е. обладают антиконформными инволюциями;*

(2) *если отображения f и g из $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ неэквивалентны, то существуют антиконформный автоморфизм α^- римановой поверхности S_3 и антиконформный автоморфизм β^- римановой поверхности S_2 такие, что $f \circ \alpha^- = \beta^- \circ g$;*

(3) *с точностью до конформной эквивалентности существует ровно три пары римановых поверхностей (S_3, S_2), для которых множество $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности*[1]*.*

5. Доказательство основного результата

5.1. Схема доказательства. Доказательство основной теоремы проводится по следующей схеме. Прежде всего (лемма 1) отметим, что необходимым

[1] Уравнения соответствующих поверхностей и представителей классов неэквивалентных отображений приведены в приложении.

(но не достаточным) условием существования двух классов эквивалентности в множестве $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ служит равенство $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. В этом случае S_3 обладает тремя конформными инволюциями, действующими без неподвижных точек. Фактор отображения по действию этих инволюций задают три голоморфных отображения f, g и h римановой поверхности S_3 на римановы поверхности рода два $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$. В общем случае указанные поверхности попарно различны и множество голоморфных отображений на каждую из них состоит из одного класса эквивалентности. В случае равенства (конформной эквивалентности) всех трех названных поверхностей исходная поверхность S_3 обладает более богатой группой автоморфизмов (леммы 2–5) и, следовательно, для нее множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности. Таким образом, для нахождения $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ с двумя классами эквивалентности необходимо рассмотреть одну из ситуаций $f(S_3) \cong g(S_3) \neq h(S_3)$, $f(S_3) \cong h(S_3) \neq g(S_3)$ или $f(S_3) \cong g(S_3) \neq h(S_3)$. Они описаны соответственно в леммах 2–4. Эти леммы дадут достаточно большой, но конечный список параметров, при которых указанные возможности реализуются. Более детальный анализ этого списка, проведенный в п. 5.4, позволит сделать следующий вывод: если множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности, то диэдральные инварианты (u_1, u_2) поверхности S_2 принимают одно из трех возможных значений: $\left(\frac{99}{2}, 17\right)$, $\left(\frac{59}{2}, 12\right)$ или $\left(\frac{136}{3}, 16\right)$. Полученные инварианты задаются вещественными числами. Это обстоятельство позволяет в п. 5.5 найти вещественное уравнение для кривой S_2. Более того, в том же разделе покажем, что во всех указанных случаях кривая S_3 с точностью до бирациональной эквивалентности однозначно определяется по кривой S_2 и также записывается вещественным уравнением. Необходимые технические леммы для нахождения соответствующих уравнений будут предварительно установлены в п. 5.3.

Для удобства читателя вещественные уравнения кривых S_3 и S_2, а также представители классов неэквивалентных отображений в $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ приведены в приложении.

5.2. Голоморфные отображения кривых S_3 с группой автоморфизмов $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Нам потребуется утверждение, которое является непосредственным следствием теоремы 1 из [8].

Лемма 1. *Пусть S_3 и S_2 — римановы поверхности родов 3 и 2 соответственно. Предположим, что число классов эквивалентности множества $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ равно двум. Тогда группа $\mathrm{Aut}(S_3)$ конформных автоморфизмов поверхности S_3 изоморфна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, а риманова поверхность задается уравнением*

$$w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1), \quad a \neq \pm b,\ a, b \neq \pm 2. \tag{1}$$

Замечание 1. Отметим, что условия (1) задают общее уравнение кривой S_3 с группой автоморфизмов $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Это означает, что при некоторых исключительных значениях параметров a и b, например, при $(a+2)(b+2) = 16$, поверхность S_3 может иметь более богатую группу автоморфизмов.

Важным свойством кривой S_3, заданной уравнением (1), является наличие трех (в общем случае неэквивалентных) голоморфных отображений f, g и h на римановы поверхности рода два. Согласно [8, случаи 8a, 8b, 8c] они имеют вид

(a) $f(w, z) : (u, v) = \left(\frac{8}{k(z^2-1)^3} w, \frac{z^2+1}{z^2-1}\right)$, где $k = \sqrt{(a+2)(b+2)}$,

(b) $g(w, z) : (u, v) = \left(\frac{z^2-1}{8z^3} w, \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$,

(c) $h(w,z):(u,v)=\left(\frac{i(z^2+1)}{8z^3}w,\frac{i}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$,
а соответствующие им голоморфные образы задаются уравнениями
(f) $f(S_3): u^2=(v^2-1)\left(v^2-\frac{a-2}{a+2}\right)\left(v^2-\frac{b-2}{b+2}\right)$,
(g) $g(S_3): u^2=(v^2-1)\left(v^2-\frac{2-a}{4}\right)\left(v^2-\frac{2-b}{4}\right)$,
(h) $h(S_3): u^2=(v^2-1)\left(v^2-\frac{a+2}{4}\right)\left(v^2-\frac{b+2}{4}\right)$.

Отметим, что образы могут попарно совпадать (т. е. быть конформно эквивалентными). При этом случай $f(S_3)\cong g(S_3)\cong h(S_3)$ для поверхности S_3 с группой автоморфизмов $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ невозможен, а ситуации, когда $f(S_3)\cong g(S_3)\neq h(S_3), f(S_3)\cong h(S_3)\neq g(S_3)$ и $f(S_3)\neq g(S_3)\cong h(S_3)$, описаны в [8, леммы 2–4]. Для удобства читателя приведем их формулировки.

Лемма 2. *Пусть* $a\neq\pm b$ *и* $a,b\neq 0,\pm 2$. *Предположим, что римановы поверхности* $f(S_3)$ *и* $g(S_3)$ *конформно эквивалентны. Тогда либо* $(a+2)(b+2)=16$, *либо множество* $\{a,b\}$ *совпадает с одним из следующих:* $\{-6,-2\pm 4i\},\{\pm 2i,2\pm 4i\}$ *и* $\{\pm 2\sqrt{3}i,2(-2\pm i\sqrt{3})\}$.

Лемма 3. *Пусть* $a\neq\pm b$ *и* $a,b\neq 0,\pm 2$. *Предположим, что римановы поверхности* $f(S_3)$ *и* $h(S_3)$ *конформно эквивалентны. Тогда либо* $(a-2)(b-2)=16$, *либо множество* $\{a,b\}$ *совпадает с одним из следующих:* $\{6,2\pm 4i\},\{\pm 2i,-2\pm 4i\}$ *и* $\{\pm 2\sqrt{3}i,2(2\pm i\sqrt{3})\}$.

Лемма 4. *Пусть* $a\neq\pm b$ *и* $a,b\neq 0,\pm 2$. *Предположим, что римановы поверхности* $g(S_3)$ *и* $h(S_3)$ *конформно эквивалентны. Тогда множество* $\{a,b\}$ *совпадает с одним из следующих:* $\{2\pm 4i,-2\pm 4i\}$ *или* $\left\{\pm 2\sqrt{3}i,\pm\frac{2i}{\sqrt{3}}\right\}$.

Покажем, что при $(a+2)(b+2)=16$ и при $(a-2)(b-2)=16$ кривая $w^2=(z^4+az^2+1)(z^4+bz^2+1)$ имеет группу автоморфизмов, не изоморфную $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$. В силу [8, теорема 1] и предложения 1 последнее означает, что множество $\mathrm{Hol}(S_3,S_2)$ состоит не более чем из одного класса эквивалентности. Следовательно, при доказательстве основного результата настоящей статьи можем считать, что $(a+2)(b+2)\neq 16$ и $(a-2)(b-2)\neq 16$.

Лемма 5. *Пусть выполнено одно из условий* $(a+2)(b+2)=16$ *или* $(a-2)(b-2)=16$. *Тогда кривая* S_3, *заданная уравнением* (1), *имеет автоморфизм четвертого порядка. Отсюда непосредственно следует, что* $\mathrm{Aut}(S_3)$ *не изоморфна* $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Найдем рациональную параметризацию корней уравнения $(z^4+az^2+1)(z^4+bz^2+1)=0$. Без ограничения общности можем считать, что $(a+2)(b+2)=16$. Случай $(a-2)(b-2)=16$ сводится к предыдущему заменой z на iz.

Положим $\frac{a-2}{a+2}=s^2$, где s — подходящий комплексный параметр. Поскольку $s\neq\pm 1$, существует число $\xi\in\mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\}$ такое, что $s=\frac{1}{2}(\xi+\xi^{-1})$. В результате имеем $a=\frac{2(1+s^2)}{1-s^2}$, $b=2-4s^2$. Отсюда $a=-\frac{2(1+6\xi^2+\xi^4)}{(-1+\xi^2)^2}$, $b=-\frac{1+\xi^4}{\xi^2}$. Подставляя полученные значения в исходное уравнение, получим

$$(z^2-\xi^2)\left(z^2-\frac{1}{\xi^2}\right)\left(z^2-\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^2\right)\left(z^2-\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^2\right)=0.$$

Таким образом, корнями исходного уравнения являются величины

$$\xi,-\xi,\frac{1}{\xi},-\frac{1}{\xi},\frac{\xi-1}{\xi+1},\frac{1-\xi}{\xi+1},\frac{\xi+1}{\xi-1},\frac{\xi+1}{1-\xi}.$$

Из приведенных в начале статьи предварительных сведений указанные точки являются сингулярными точками орбифолда $O_3 = S_3/\langle\tau\rangle$, полученного факторизацией римановой поверхности S_3 по действию гиперэллиптической инволюции τ. Группа автоморфизмов орбифолда O_3 содержит группу диэдра $\mathbb{D}_4$, порожденную дробно-линейными преобразованиями $\alpha : z \to -z$, $\beta : z \to \frac{z-1}{z+1}$. В частности, β является автоморфизмом O_3, который поднимается до автоморфизма четвертого порядка $(w, z) \to \left(w\frac{4}{(1+z)^4}, \frac{z-1}{z+1}\right)$ поверхности

$$S_3 : w^2 = (z^2 - \xi^2)\left(z^2 - \frac{1}{\xi^2}\right)\left(z^2 - \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right)^2\right)\left(z^2 - \left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1}\right)^2\right). \quad \square$$

Отметим, что при $(a+2)(b+2) = 16$ общая кривая S_3 бирационально эквивалентна кривой $u^2 = v^8 - \frac{2(a^2+28a+68)}{(a-2)^2}v^4 + 1$, имеющей группу автоморфизмов $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{D}_4$.

5.3. Приведение кривой $w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$ к вещественному виду. В этом пункте найдем достаточные условия, при которых кривые $S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$ и $\overline{S}_3 : w^2 = (z^4 + \bar{a}z^2 + 1)(z^4 + \bar{b}z^2 + 1)$ бирационально эквивалентны, и найдем их вещественную форму. Перепишем уравнение кривой S_3 в виде $w^2 = 1+\alpha z^2+\beta z^4+\alpha z^6+z^8$, где $\alpha = a+b$, $\beta = 2+ab$.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 6. *Пусть p, q, s и t — вещественные параметры, связанные соотношениями*

$$s = \frac{2(112 + 40p - p^2 - p^3 - 9q^2 - pq^2)}{16 + 8p + p^2 + q^2}, \quad t = \frac{2q(48 + 8p - p^2 - q^2)}{16 + 8p + p^2 + q^2}.$$

Тогда кривые, задаваемые уравнениями

$$w^2 = 1 + (p + iq)z^2 + (s + it)z^4 + (p + iq)z^6 + z^8, \tag{2}$$

$$\widehat{w}^2 = 1 + (p - iq)\tilde{z}^2 + (s - it)\tilde{z}^4 + (p - iq)\tilde{z}^6 + \tilde{z}^8, \tag{3}$$

бирационально эквивалентны.

Доказательство. Положим $\alpha = p + iq$ и $\beta = s + it$. Найдем условия, при которых дробно-линейное преобразование $z = \frac{\zeta+1}{\zeta-1}$ переводит корни уравнения

$$1 + \alpha z^2 + \beta z^4 + \alpha z^6 + z^8 = 0 \tag{4}$$

в корни уравнения

$$1 + \bar{\alpha}\zeta^2 + \bar{\beta}\zeta^4 + \bar{\alpha}\zeta^6 + \zeta^8 = 0. \tag{5}$$

Подставляя выражение для z в первое уравнение, имеем

$$1 + \frac{4(14 + 2\alpha - \beta)\zeta^2}{2 + 2\alpha + \beta} - \frac{2(-70 + 10\alpha - 3\beta)\zeta^4}{2 + 2\alpha + \beta} + \frac{4(14 + 2\alpha - \beta)\zeta^6}{2 + 2\alpha + \beta} + \zeta^8 = 0,$$

откуда получаем систему уравнений

$$\frac{4(14 + 2\alpha - \beta)}{2 + 2\alpha + \beta} = \bar{\alpha}, \quad \frac{2(70 - 10\alpha + 3\beta)}{2 + 2\alpha + \beta} = \bar{\beta}. \tag{6}$$

Выражая из первого уравнения β, а из второго α, получим

$$\beta = \frac{2(28 + 4\alpha - \bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha})}{4 + \bar{\alpha}}, \quad \alpha = \frac{140 + 6\beta - 2\bar{\beta} - \beta\bar{\beta}}{2(10 + \bar{\beta})}. \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что полученные уравнения эквивалентны. Действительно, комплексно сопрягая первое из них, имеем

$$\bar{\beta} = \frac{2(28 + 4\bar{\alpha} - \alpha - \alpha\bar{\alpha})}{4 + \alpha}.$$

Решая полученное уравнение совместно с первым относительно переменных α и $\bar{\alpha}$, находим, что

$$\alpha = \frac{140 + 6\beta - 2\bar{\beta} - \beta\bar{\beta}}{2(10 + \bar{\beta})}, \quad \bar{\alpha} = \frac{140 + 6\bar{\beta} - 2\beta - \beta\bar{\beta}}{2(10 + \beta)}.$$

Приведенные уравнения эквивалентны второму уравнению системы (7). Аналогичным образом выводим первое уравнение из второго. Учитывая, что $\alpha = p + iq$ и $\beta = s + it$, из первого уравнения системы (7) имеем

$$s = \operatorname{Re} \frac{2(28 + 4\alpha - \bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha})}{4 + \bar{\alpha}} = \frac{2(112 + 40p - p^2 - p^3 - 9q^2 - pq^2)}{16 + 8p + p^2 + q^2},$$

$$t = \operatorname{Im} \frac{2(28 + 4\alpha - \bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha})}{4 + \bar{\alpha}} = \frac{2q(48 + 8p - p^2 - q^2)}{16 + 8p + p^2 + q^2}.$$

В силу приведенных рассуждений полученные соотношения достаточны для бирациональной эквивалентности кривых (2) и (3). □

Лемма 7. *В условиях леммы* 6 *бирациональное преобразование*

$$(w, z) = \left(\frac{2i\xi}{((\sqrt{i})^3 - \zeta)^4} \sqrt{\frac{-16 + p^2 + q^2}{4 + p - iq}}, i\frac{(\sqrt{i})^3 + \zeta}{(\sqrt{i})^3 - \zeta} \right)$$

приводит кривую (2) *к следующему вещественному виду:*

$$\xi^2 = 1 - \frac{32q\zeta^2}{-16 + p^2 + q^2} + \frac{2(112 + 32p + p^2 + q^2)\zeta^4}{-16 + p^2 + q^2} + \frac{32q\zeta^2}{-16 + p^2 + q^2} + \zeta^8.$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой. □

5.4. Диэдральные инварианты кривой S_2 в случае, когда $\operatorname{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности. В интересующем нас случае (леммы 2–4) кривая S_2 совпадет с одной из кривых $f(S_3)$, $g(S_3)$ или $f(S_3)$. Из явного вида уравнений этих кривых, приведенных в п. 5.2, следует, что каждая из них обладает негиперэллиптической инволюцией и, следовательно, однозначно определяется набором своих диэдральных инвариантов. Найдем численные значения диэдральных инварианты кривой S_2 во всех ситуациях, описанных в леммах, при условии, что $(a \pm 2)(b \pm 2) \neq 16$.

5.4(a). Рассмотрим случай, когда $f(S_3) = g(S_3)$. Предполагая, что $(a + 2)(b + 2) \neq 16$, по лемме 2 найдем, что множество $\{a, b\}$ равно $\{-6, -2 \pm 4i\}$, $\{\pm 2i, 2 \pm 4i\}$ или $\{\pm 2\sqrt{3}i, 2(-2 \pm i\sqrt{3})\}$. Вычисляя диэдральные инварианты для поверхностей $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$ по формулам, приведенным в [8] в указанных случаях, получим следующие наборы пар: $(99/2, 17)$, $(99/2, 17)$, $(2, 2)$; $(59/2, 12)$, $(59/2, 12)$, $(99/2, 17)$ и $(136/3, 16)$, $(136/3, 16)$, $(16, 8)$. Таким образом, лемма 2 с точностью до конформной инвариантности дает только три возможности для римановой поверхности $S_2 = f(S_3) = g(S_3)$: риманова поверхность с диэдральными инвариантами $(99/2, 17)$, $(59/2, 12)$ или $(136/3, 16)$. Ниже убедимся, что во всех трех перечисленных случаях множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности.

5.4(b). Аналогично анализируя случай $f(S_3) = h(S_3)$ в предположении $(a-2)(b-2) \neq 16$, по лемме 3 найдем, что множество $\{a, b\}$ равно $\{6, 2 \pm 4i\}$, $\{\pm 2i, -2 \pm 4i\}$ или $\{\pm 2\sqrt{3}i, 2(2 \pm i\sqrt{3})\}$. В этом случае соответственно получаются следующие наборы диэдральных инвариантов для поверхностей $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$: $(99/2, 17)$, $(2, 2)$, $(99/2, 17)$; $(59/2, 12)$, $(99/2, 17)$, $(59/2, 12)$ и $(136/3, 16)$, $(16, 8)$, $(136/3, 16)$. В результате имеем следующие три возможности для диэдральных инвариантов поверхности $S_2 = f(S_3) = h(S_3)$. Это пары $(99/2, 17)$, $(59/2, 12)$ или $(136/3, 16)$. По-прежнему во всех указанных случаях множество $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности.

5.4(c). В третьем случае, когда конформно совпадают $g(S_3)$ и $h(S_3)$, а параметры a, b удовлетворяют неравенствам $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0, \pm 2$, множество $\{a, b\}$ равно $\{2 \pm 4i, -2 \pm 4i\}$ или $\left\{\pm 2\sqrt{3}i, \pm \frac{2i}{\sqrt{3}}\right\}$. Соответствующая тройка диэдральных инвариантов для поверхностей $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$ равна $(99/2, 17)$, $(59/2, 12)$, $(59/2, 12)$ или $(16, 8)$, $(136/3, 16)$, $(136/3, 16)$. При этом совпадающие поверхности $S_2 = g(S_3) = h(S_3)$ имеют диэдральные инварианты $(59/2, 12)$ или $(136/3, 16)$.

5.5. Вещественные формы кривых S_2 и S_3.

5.5(a). Прежде всего рассмотрим случай, когда кривая S_2 имеет диэдральные инварианты $(u_1, u_2) = \left(\frac{99}{2}, 17\right)$. Соответствующие этому параметры $\{a, b\}$ задаются наборами $\{-6, -2 \pm 4i\}$ и $\{6, 2 \pm 4i\}$. Найдем вещественную форму кривой S_2 по ее диэдральным инвариантам.

Представим кривую в виде $s^2 = 1 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + t^6$, удобном для вычисления диэдральных инвариантов. В результате получим систему уравнений $a_1^3 + a_2^3 = \frac{99}{2}$, $2a_1 a_2 = 17$. В качестве решения этой системы возьмем $a_1 = -\frac{3-5i}{2}$ и $a_2 = -\frac{3+5i}{2}$. Для приведения кривой к вещественному виду воспользуемся дробно-линейным преобразованием, переводящим корни $t_1 = \sqrt{i}$ и $t_2 = -\sqrt{i}$ полинома $1 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + t^6$ в 0 и ∞. Полагая $(s, t) = \left(y \frac{\sqrt{-2+2i}}{(i-x)^3}, \sqrt{i}\frac{i+x}{i-x}\right)$, приведем уравнение кривой S_2 к виду $y^2 = x - 8x^2 + 18x^3 + 8x^4 + x^5$. Следующее предложение дает вещественную форму кривой S_3.

Предложение 2. *Пусть множество $\{a, b\}$ совпадает с одним из множеств $\{-6, -2 \pm 4i\}$ или $\{6, 2 \pm 4i\}$. Тогда кривая $S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$ бирационально эквивалентна кривой $\zeta^2 = 1 - 2\xi^2 - 2\xi^4 + 2\xi^6 + \xi^8$.*

Доказательство. Здесь достаточно ограничиться рассмотрением случаев $\{a, b\} = \{6, 2 + 4i\}$ и $\{a, b\} = \{6, 2 - 4i\}$. В первом из них бирациональное преобразование $(w, z) = \left(\zeta \frac{4\sqrt{2+2i}}{(\sqrt{i}-\xi)^4}, \frac{\sqrt{i}+\xi}{\sqrt{i}-\xi}\right)$ приводит кривую S_3 к виду $\zeta^2 = 1 - 2\xi^2 - 2\xi^4 + 2\xi^6 + \xi^8$. Во втором случае для приведения кривой к вещественному виду воспользуемся тем же бирациональным преобразованием, заменяя всюду i на $-i$. $\square$

5.5(b). Пусть кривая S_2 задается диэдральными инвариантами $(u_1, u_2) = \left(\frac{59}{2}, 12\right)$. Это имеет место при следующих наборах параметров $\{a, b\} : \{\pm 2i, 2 \pm 4i\}, \{\pm 2i, -2 \pm 4i\}$ или $\{2 \pm 4i, -2 \pm 4i\}$.

Найдем вещественную форму кривой S_2 вида $s^2 = 1 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + t^6$. Для этого, как и выше, решим систему $a_1^3 + a_2^3 = \frac{59}{2}$, $2a_1 a_2 = 12$. В качестве вещественного решения получим $a_1 = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$, $a_2 = 2\sqrt[3]{2}$.

После бирациональной замены $(y,x) = (2s, \sqrt[3]{2}t)$ уравнение кривой S_2 перепишется в виде $y^2 = 4 + 6x^2 + 4x^4 + x^6$.

Для нахождения вещественной формы кривой S_3 воспользуемся следующим предложением.

Предложение 3. *Пусть множество $\{a,b\}$ совпадает с одним из следующих: $\{\pm 2i, 2\pm 4i\}, \{\pm 2i, -2\pm 4i\}$ или $\{2\pm 4i, -2\pm 4i\}$. Тогда кривая $S_3 : w^2 = (z^4+az^2+1)(z^4+bz^2+1)$ бирационально эквивалентна кривой $\zeta^2 = 1 - 8\xi^2 + 18\xi^4 + 8\xi^6 + \xi^8$.*

Доказательство. Как в предыдущем случае, пары параметров $\{a,b\}$ и $\{-a,-b\}$ задают бирационально эквивалентные кривые.

Рассмотрим случай $\{a,b\} = \{2+4i, -2+4i\}$. Тогда кривая S_3 имеет вид $w^2 = 1 + 8iz^2 - 18z^4 + 8iz^6 + z^8$. Бирациональное преобразование $(w,z) = (\zeta, \xi\sqrt{i})$ приводит кривую к вещественному виду $\zeta^2 = 1 - 8\xi^2 + 18\xi^4 + 8\xi^6 + \xi^8$.

Пусть $\{a,b\} = \{2i, 2+4i\}$. Применяя лемму 6 для случая $p + iq = 2 + 6i$ и $s + it = -6 + 4i$, убеждаемся, что кривая $w^2 = (z^4+az^2+1)(z^4+bz^2+1)$ бирационально эквивалентна $w^2 = (z^4+\bar{a}z^2+1)(z^4+\bar{b}z^2+1)$. По лемме 7 бирациональное преобразование $(w,z) = \left(\frac{2i\sqrt{2+2i}\zeta}{((\sqrt{i})^3-\xi)^4}, i\frac{(\sqrt{i})^3+\xi}{(\sqrt{i})^3-\xi}\right)$ приводит кривую S_3 к виду $\zeta^2 = 1 - 8\xi^2 + 18\xi^4 + 8\xi^6 + \xi^8$. $\square$

5.5(c). Наконец рассмотрим случай, когда кривая S_2 имеет диэдральные инварианты $(u_1, u_2) = (136/3, 16)$. Согласно предыдущему разделу это возможно лишь в случае, когда множество $\{a,b\}$ совпадает с одним из следующих: $\{\pm 2\sqrt{3}i, 2(-2\pm i\sqrt{3})\}, \{\pm 2\sqrt{3}i, 2(2\pm i\sqrt{3})\}$ или $\left\{\pm 2\sqrt{3}i, \pm\frac{2i}{\sqrt{3}}\right\}$.

Найдем вещественную форму кривой S_2 по ее диэдральным инвариантам. Представив ее в виде $s^2 = 1 + a_1t^2 + a_2t^4 + t^6$, получим систему уравнений $a_1^3 + a_2^3 = \frac{136}{3}$, $2a_1a_2 = 16$. В качестве вещественного решения этой системы выберем $a_1 = 2\sqrt[3]{3}$, $a_2 = \frac{4}{\sqrt[3]{3}}$. Выполняя дополнительное преобразование $(s,t) = (y, \sqrt[3]{3}x)$, перепишем уравнение кривой S_2 в виде $y^2 = 1 + 6x^2 + 12x^4 + 9x^6$.

Следующее утверждение позволяет найти вещественную форму кривой S_3 при тех же значениях параметров $\{a,b\}$.

Предложение 4. *Пусть множество $\{a,b\}$ совпадает с одним из следующих: $\{\pm 2\sqrt{3}i, 2(-2\pm i\sqrt{3})\}$, $\{\pm 2\sqrt{3}i, 2(2\pm i\sqrt{3})\}$ или $\left\{\pm 2\sqrt{3}i, \pm\frac{2i}{\sqrt{3}}\right\}$. Тогда кривая $S_3 : w^2 = (z^4+az^2+1)(z^4+bz^2+1)$ бирационально эквивалентна кривой $\zeta^2 = 1 + 8\xi^2 + 6\xi^4 - 24\xi^6 + 9\xi^8$.*

Доказательство. Прежде всего убедимся, что пары $\{a,b\}$ и $\{-a,-b\}$ задают бирационально эквивалентные кривые. Для этого в уравнении кривой S_3 достаточно сделать замену $z \to iz$.

Рассмотрим случай $\{a,b\} = \left\{2\sqrt{3}i, \frac{2i}{\sqrt{3}}\right\}$. Тогда кривая S_3 имеет вид $w^2 = 1 + \frac{8i}{\sqrt{3}}z^2 - 2z^4 + \frac{8i}{\sqrt{3}}z^6 + z^8$. Бирациональное преобразование $(w,z) = \left(\zeta, \xi\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{i}}\right)$ приводит кривую к искомому виду $\zeta^2 = 1 + 8\xi^2 + 6\xi^4 - 24\xi^6 + 9\xi^8$.

Пусть $a = 2\sqrt{3}i$, $b = 2(-2+i\sqrt{3})$. Покажем, что кривая с параметрами $\{-2\sqrt{3}i, 2(-2-i\sqrt{3})\}$ бирационально эквивалентна $w^2 = (z^4+az^2+1)(z^4+bz^2+1)$. Воспользуемся леммой 6. Действительно, поскольку $S_3 : (z^4+az^2+1)(z^4+bz^2+1) = z^8 + (-4+4\sqrt{3}i)z^6 + (-10-8\sqrt{3}i)z^4 + (-4+4\sqrt{3}i)z^2 + 1$, можно считать, что $p+iq=-4+4\sqrt{3}i$ и $s+it=-10-8\sqrt{3}i$. Тогда по лемме 6 кривая S_3 бирационально эквивалентна $w^2=(z^4+\bar{a}z^2+1)(z^4+\bar{b}z^2+1)$. Для завершения доказательства бирациональным преобразованием $(w,z)=\left(\frac{4i\sqrt[4]{-3}\zeta}{(i\sqrt[4]{-3}\xi+1)^4}, i\frac{i\sqrt[4]{-3}\xi-1}{i\sqrt[4]{-3}\xi+1}\right)$ приведем кривую S_3 к виду $\zeta^2=1+8\xi^2+6\xi^4-24\xi^6+9\xi^8$. $\square$

6. Неэквивалентные голоморфные отображения S_3 на S_2

6(a). Укажем в явном виде пару неэквивалентных голоморфных отображений S_3 на S_2 в случае, когда $S_2=f(S_3)\cong g(S_3)$, а кривые S_3 и S_2 приведены к вещественному виду, указанному в п. 5.5(a). Напомним, что пара кривых S_3 и S_2 с точностью до бирациональной эквивалентности определяется диэдральным инвариантом $(u_1,u_2)=(99/2,17)$. Для удобства записи вещественные формы кривых будем обозначать через $\mathrm{Real}(S_3)$ и $\mathrm{Real}(S_2)$ соответственно. Пользуясь результатами предыдущего раздела, найдем отображения φ и ψ, переводящие кривые S_3 и S_2 в их вещественные формы $\mathrm{Real}(S_3):\zeta^2=1-2\xi^2-2\xi^4+2\xi^6+\xi^8$ и $\mathrm{Real}(S_2):y^2=x-8x^2+18x^3+8x^4+x^5$. В силу предложения 2 без ограничения общности можно считать, что параметры a и b, определяющие кривую S_3, выбраны так, что $a=-6, b=-2+4i$. Тогда уравнение кривой $f(S_3)$ запишется в виде $u^2=(-2-2i)+(5+3i)v^2-(4+i)v^4+v^6$. В результате вычислений получим, что суперпозиция $F=\psi\circ g\circ\varphi^{-1}$ задает отображение между вещественными кривыми $\mathrm{Real}(S_3)$ и $\mathrm{Real}(S_2)$. В координатной записи оно имеет вид

$$F:(\zeta,\xi)\to(y,x)=\left(\frac{4\sqrt{1+i}(i+\xi^2)}{(i-i\sqrt{2+2i}\xi-\xi^2)^3}\zeta, \frac{1+\sqrt{2+2i}\xi+i\xi^2}{i-i\sqrt{2+2i}\xi-\xi^2}\right).$$

При сделанном нами выборе параметров a и b кривая $g(S_3)$ имеет вид $u^2=(-2+2i)+(5-3i)v^2-(4-i)v^4+v^6$. Следовательно, кривые $f(S_3)$ и $g(S_3)$ комплексно сопряжены, и преобразование $\bar{\psi}:(u,v)\to\psi(\bar{u},\bar{v})$ приводит $g(S_3)$ к вещественному виду $\mathrm{Real}(S_2)$. Как и выше, суперпозиция $G=\bar{\psi}\circ g\circ\varphi^{-1}$ осуществляет отображение $\mathrm{Real}(S_3)$ на $\mathrm{Real}(S_2)$. Оно задается следующей формулой:

$$G:(\zeta,\xi)\to(y,x)=\left(\frac{4\sqrt{1-i}(-i+\xi^2)}{(-i+i\sqrt{2-2i}\xi-\xi^2)^3}\zeta, \frac{1+\sqrt{2-2i}\xi-i\xi^2}{-i+i\sqrt{2-2i}\xi-\xi^2}\right).$$

Рассмотрим орбифолды O_3 и O_2, получаемые факторизацией римановых поверхностей $\mathrm{Real}(S_3)$ и $\mathrm{Real}(S_2)$ по действию гиперэллиптических инволюций. Проекции $\widehat{F}:O_3\to O_2$ и $\widehat{G}:O_3\to O_2$ отображений F и G на орбифолды задаются соответственно равенствами

$$\widehat{F}(\xi)=\frac{1+\sqrt{2+2i}\xi+i\xi^2}{i-i\sqrt{2+2i}\xi-\xi^2}, \quad \widehat{G}(\xi)=\frac{1+\sqrt{2-2i}\xi-i\xi^2}{-i+i\sqrt{2-2i}\xi-\xi^2}.$$

Опишем структуру автоморфизмов орбифолда O_2. Для этого заметим, что диэдральные инварианты $(u_1,u_2)=(99/2,17)$ соответствующей ему римановой поверхности $\mathrm{Real}(S_2)$ не удовлетворяют соотношениям $u_2^2-220u_2-16u_1+4500=0$ и $2u_1^2-u_2^3=0$. Следовательно, группа конформных автоморфизмов $\mathrm{Real}(S_2)$ не совпадает с $\mathbb{D}_6$ и $\mathbb{D}_4$ и изоморфна $\mathbb{D}_2=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$. В свою очередь, это означает, что группа конформных автоморфизмов орбифолда O_2 изоморфна $\mathbb{Z}_2$ и порождается преобразованием $x\to-1/x$. Кроме того, очевидно, O_2 имеет две антиконформные инволюции $x\to\bar{x}$ и $x\to-1/\bar{x}$.

Покажем, что отображения F и G представляют различные классы эквивалентности. Действительно, множества критических значений их проекций $\mathrm{Crit}(\widehat{F}) = \{(-2-i) - 2\sqrt{1+i}, (-2-i) + 2\sqrt{1+i}\}$ и $\mathrm{Crit}(\widehat{G}) = \{(-2+i) - 2\sqrt{1-i}, (-2+i) + 2\sqrt{1-i}\}$ остаются инвариантными при всех конформных автоморфизмах орбифолда O_2 и, следовательно, не переводятся такими автоморфизмами друг в друга. По предложению 1 отображения F и G неэквивалентны.

Далее, антиконформный автоморфизм $x \to \bar{x}$ переводит множество $\mathrm{Crit}(\widehat{F})$ в множество $\mathrm{Crit}(\widehat{G})$. Это приводит к равенству $\overline{\widehat{F}(\xi)} = \widehat{G}(\bar{\xi})$, что на уровне римановых поверхностей влечет $\overline{G(\zeta,\xi)} = F(\bar{\zeta},\bar{\xi})$. Тем самым справедливо соотношение $F \circ \alpha^- = \beta^- \circ G$, где $\alpha^- : (\zeta,\xi) \to (\bar{\zeta},\bar{\xi})$ и $\beta^- : (y,x) \to (\bar{y},\bar{x})$ — антиконформные автоморфизмы поверхностей $\mathrm{Real}(S_3)$ и $\mathrm{Real}(S_2)$ соответственно.

Возвращаясь к исходным обозначениям S_3 и S_2 вместо $\mathrm{Real}(S_3)$ и $\mathrm{Real}(S_2)$, w и z вместо ζ и ξ, а также f и g вместо F и G, перепишем полученный результат в виде приложения A.

6(b). Найдем пару неэквивалентных голоморфных отображений S_3 на S_2 в случае, когда $S_2 = f(S_3) \cong h(S_3)$. При этом кривые S_3 и S_2 с точностью до бирациональной эквивалентности определяются диэдральным инвариантом $(u_1, u_2) = (59/2, 12)$. В силу предложения 3 без ограничения общности можно считать, что $a = 2i$, $b = -2+4i$. Согласно п. 5.5(b) вещественные формы кривых S_3 и S_2 в этом случае имеют вид $\mathrm{Real}(S_3) : \zeta^2 = 1 - 8\xi^2 + 18\xi^4 + 8\xi^6 + \xi^8$ и $\mathrm{Real}(S_2) : y^2 = 4 + 6x^2 + 4x^4 + x^6$. По схеме, детально изложенной в предыдущем разделе, находим, что комплексно сопряженные отображения

$$F(w,z) = \left(w\frac{(-i+z^2)\sqrt{-1+i}}{4\sqrt{2}z^3}, \frac{(i+z^2)\sqrt{1+i}}{2z}\right),$$

$$H(w,z) = \left(w\frac{(i+z^2)\sqrt{-1-i}}{4\sqrt{2}z^3}, \frac{(-i+z^2)\sqrt{1-i}}{2z}\right)$$

голоморфно отображают $\mathrm{Real}(S_3)$ на $\mathrm{Real}(S_2)$. Как и выше, убеждаемся, что группа конформных автоморфизмов орбифолда O_2 порождается преобразованием $x \to -x$. Проверим, что отображения F и H представляют различные классы эквивалентности.

Действительно, множества критических значений их проекций имеют вид $\mathrm{Crit}(\widehat{F}) = \{\sqrt{-1+i}, -\sqrt{-1+i}\}$ и $\mathrm{Crit}(\widehat{H}) = \{\sqrt{-1-i}, -\sqrt{-1-i}\}$. Единственный нетривиальный конформный автоморфизм $x \to -x$ орбифолда O_2 оставляет эти множества инвариантными. Следовательно, по предложению 1 отображения F и H неэквивалентны.

При этом справедливо равенство $F \circ \alpha^- = \beta^- \circ H$, где $\alpha^- : (\zeta,\xi) \to (\bar{\zeta},\bar{\xi})$ и $\beta^- : (y,x) \to (\bar{y},\bar{x})$ — антиконформные автоморфизмы поверхностей $\mathrm{Real}(S_3)$ и $\mathrm{Real}(S_2)$ соответственно. Упрощая обозначения, получим утверждение, сформулированное в приложении B.

6(c). Найдем неэквивалентные голоморфные отображения S_3 на S_2 в случае, когда $S_2 = g(S_3) \cong h(S_3)$, а кривые S_3 и S_2 приведены к вещественному виду, указанному в п. 5.5(c). В данном случае обе кривые с точностью до бирациональной эквивалентности определяются диэдральным инвариантом $(u_1, u_2) = (136/3, 16)$. В силу предложения 4 без ограничения общности можно считать, что параметры a и b, определяющие кривую S_3, выбраны так, что $a = 2i\sqrt{3}$, $b = \frac{2i}{\sqrt{3}}$.

Напомним, что вещественные формы рассматриваемых кривых имеют вид $\mathrm{Real}(S_3): \zeta^2 = 1 + 8\xi^2 + 6\xi^4 - 24\xi^6 + 9\xi^8$ и $\mathrm{Real}(S_2): y^2 = 1 + 6x^2 + 12x^4 + 9x^6$. Несложной непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$G : (\zeta, \xi) \to (y, x) = \left(\frac{\xi^2 - \frac{i}{\sqrt{3}}}{8\xi^3}\zeta, \frac{-i}{\sqrt{3}+i}\left(\xi + \frac{i}{\xi\sqrt{3}}\right)\right),$$

$$H : (\zeta, \xi) \to (y, x) = \left(\frac{\xi^2 + \frac{i}{\sqrt{3}}}{8\xi^3}\zeta, \frac{i}{\sqrt{3}-i}\left(\xi - \frac{i}{\xi\sqrt{3}}\right)\right)$$

голоморфно отображают $\mathrm{Real}(S_3)$ на $\mathrm{Real}(S_2)$. Покажем, что отображения G и H неэквивалентны.

Найдем критические значения функций $\widehat{G}$ и $\widehat{H}$. Они задаются соответственно множествами

$$\mathrm{Crit}(\widehat{G}) = \left\{ \frac{(-1)^{\frac{7}{12}}}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{(-1)^{\frac{7}{12}}}{\sqrt[4]{3}} \right\}, \quad \mathrm{Crit}(\widehat{H}) = \left\{ \frac{(-1)^{\frac{5}{12}}}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{(-1)^{\frac{5}{12}}}{\sqrt[4]{3}} \right\}.$$

Как и в п. 6(b), единственный нетривиальный конформный автоморфизм $x \to -x$ орбифолда O_2 оставляет эти множества инвариантными. Следовательно, по предложению 1 отображения G и H неэквивалентны. В то же время антиконформный автоморфизм $z \to \bar{z}$ переводит множество $\mathrm{Crit}(\widehat{G})$ в множество $\mathrm{Crit}(\widehat{H})$. Это приводит к соотношению $G \circ \alpha^- = \beta^- \circ H$, где $\alpha^- : (\zeta, \xi) \to (\bar{\zeta}, \bar{\xi})$ и $\beta^- : (y, x) \to (\bar{y}, \bar{x})$ — антиконформные автоморфизмы поверхностей $\mathrm{Real}(S_3)$ и $\mathrm{Real}(S_2)$ соответственно.

Возвращаясь к исходным обозначениям S_3 и S_2 вместо $\mathrm{Real}(S_3)$ и $\mathrm{Real}(S_2)$, w и z вместо ζ и ξ, а также g и h вместо G и H, перепишем полученный результат в виде приложения С.

7. Приложение

Во всех приведенных ниже примерах $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ состоит из двух классов эквивалентности.

А. Случай $S_2 = f(S_3) \cong g(S_3)$. Диэдральные инварианты S_2 равны $(u_1, u_2) = (99/2, 17)$.

В этом случае поверхности S_3 и S_2 представлены следующими уравнениями:

$$S_3 : w^2 = 1 - 2z^2 - 2z^4 + 2z^6 + z^8, \quad S_2 : y^2 = x - 8x^2 + 18x^3 + 8x^4 + x^5.$$

Представители неэквивалентных классов $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ задаются формулами

$$f(w, z) = \left(\frac{4\sqrt{1+i}(i + z^2)}{(i - i\sqrt{2+2i}z - z^2)^3} w, \frac{1 + \sqrt{2+2i}z + iz^2}{i - i\sqrt{2+2i}z - z^2} \right),$$

$$g(w, z) = \left(\frac{4\sqrt{1-i}(-i + z^2)}{(-i + i\sqrt{2-2i}z - z^2)^3} w, \frac{1 + \sqrt{2-2i}z - iz^2}{-i + i\sqrt{2-2i}z - z^2} \right).$$

Имеет место равенство $\overline{g(w, z)} = f(\bar{w}, \bar{z})$. Отсюда $f \circ \alpha^- = \beta^- \circ g$, где $\alpha^- : (w, z) \to (\bar{w}, \bar{z})$ и $\beta^- : (y, x) \to (\bar{y}, \bar{x})$ — антиконформные автоморфизмы поверхностей S_3 и S_2 соответственно.

B. Случай $S_2 = f(S_3) \cong h(S_3)$. Диэдральные инварианты S_2 равны $(u_1, u_2) = (59/2, 12)$. В этом случае поверхности S_3 и S_2 представлены следующими уравнениями:

$$S_3 : w^2 = 1 - 8z^2 + 18z^4 + 8z^6 + z^8, \quad S_2 : y^2 = 4 + 6x^2 + 4x^4 + x^6.$$

Представители неэквивалентных классов $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ задаются формулами

$$g(w,z) = \left(w\frac{(-i+z^2)\sqrt{-1+i}}{4\sqrt{2}z^3}, \frac{(i+z^2)\sqrt{1+i}}{2z} \right),$$

$$h(w,z) = \left(w\frac{(i+z^2)\sqrt{-1-i}}{4\sqrt{2}z^3}, \frac{(-i+z^2)\sqrt{1-i}}{2z} \right).$$

Справедливо равенство $f \circ \alpha^- = \beta^- \circ h$, где $\alpha^- : (w,z) \to (\bar{w}, \bar{z})$ и $\beta^- : (y,x) \to (\bar{y}, \bar{x})$ — антиконформные автоморфизмы поверхностей S_3 и S_2 соответственно.

C. Случай $S_2 = g(S_3) \cong h(S_3)$. Диэдральные инварианты S_2 равны $(u_1, u_2) = (136/3, 16)$.

В этом случае поверхности S_3 и S_2 представлены следующими уравнениями:

$$S_3 : w^2 = 1 + 8z^2 + 6z^4 - 24z^6 + 9z^8, \quad S_2 : y^2 = 1 + 6x^2 + 12x^4 + 9x^6.$$

Представители неэквивалентных классов $\mathrm{Hol}(S_3, S_2)$ задаются формулами

$$g(w,z) = \left(w\frac{z^2 - \frac{i}{\sqrt{3}}}{8z^3}, \frac{-i}{\sqrt{3}+i}\left(z + \frac{i}{\sqrt{3}z} \right) \right),$$

$$h(w,z) = \left(w\frac{z^2 + \frac{i}{\sqrt{3}}}{8z^3}, \frac{i}{\sqrt{3}-i}\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}z} \right) \right).$$

Имеет место равенство $g \circ \alpha^- = \beta^- \circ h$, где $\alpha^- : (w,z) \to (\bar{w}, \bar{z})$ и $\beta^- : (y,x) \to (\bar{y}, \bar{x})$ — антиконформные автоморфизмы поверхностей S_3 и S_2 соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Franchis M.* Un teorema sulle involuzioni irrazionali // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1913. V. 36. P. 368.
2. *Howard A., Sommese A. J.* On the theorem of de Franchis // Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., IV Ser. 1983. V. 10. P. 429–436.
3. *Alzati A., Pirola G. P.* Some remarks on the de Franchis theorem // Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N. S.) 1990. V. 36. P. 45–52.
4. *Tanabe M.* A bound for the theorem of de Franchis // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 2289–2295.
5. *Tanabe M.* Holomorphic maps of Riemann surfaces and Weierstrass points // Kodai Math. J. 2005. V. 28, N 2. P. 423–429.
6. *Ito M., Yamamoto H.* Holomorphic mappings between compact Riemann surfaces // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2009. V. 52. P. 109–126.
7. *Медных И. А.* Классификация голоморфных отображений римановых поверхностей малых родов с точностью до эквивалентности // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1379–1375.
8. *Медных И. А.* О точной верхней оценке на число голоморфных отображений римановых поверхностей малого рода // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 325–344.
9. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York; Berlin: Springer-Verl., 1980. (Grad. Texts Math.; V. 71).
10. *Farkas H. M.* Unramified double coverings of hyperelliptic surfaces // J. Anal. Math. 1976. V. 30. P. 150–155.

11. *Accola R. D. M.* On lifting the hyperelliptic involution // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122, N 2. P. 341–347.
12. *Скотт П.* Геометрия на трехмерных многообразиях. М.: Мир, 1986.
13. *Thurston W. P.* The geometry and topology of three-manifolds. Princeton: Princeton Univ. Math. Dept., 1978.
14. *Martens H.* A remark on Abel's Theorem and the mapping of linear series // Comment. Math. Helvetici. 1977. V. 52. P. 557–559.
15. *Greenleaf N., May C. L.* Bordered Klein surfaces with maximal symmetry // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 274, N 1. P. 265–283.
16. *Натанзон С. М.* Клейновы поверхности // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 6. С. 47–90.
17. *Bujalance E., Cirre F. J., Gamboa J. M., Gromadzki G.* Symmetries of compact Riemann surfaces. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2010.
18. *Shaska T.* Determining the automorphism group of a hyperelliptic curve // Proc. 2003 Intern. symp. symbolic and algebraic computation (Philadelphia, PA). New York: ACM, 2003. P. 248–254.
19. *Bolza O.* On binary sextics with linear transformations into themselves // Amer. J. Math. 1888. V. 10. P. 47–60.
20. *Igusa J.* Arithmetic variety of moduli for genus two // Ann. Math. 1960. V. 72, N 3. P. 612–649.

Статья поступила 9 декабря 2015 г.

Медных Александр Дмитриевич, Медных Илья Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090;
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
smedn@mail.ru, ilyamednykh@mail.ru