Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЯХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин

Аннотация. Рассматривается краевая задача, возникающая при анализе стационарных баротропных движений вязкой сжимаемой многожидкостной среды в ограниченной области трехмерного евклидова пространства. Доказано существование сильных решений регуляризованной краевой задачи.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.611

Ключевые слова: теорема существования, стационарная краевая задача, вязкая сжимаемая жидкость, гомогенная многоскоростная смесь.

Введение

Моделирование движения многожидкостных сред, или (жидких) смесей, или многокомпонентных жидкостей, является достаточно обширной областью механики и математики, которая слабо изучена (во всяком случае по сравнению с соответствующими одножидкостными моделями) как в плане формулировки моделей, так и в плане строгих математических результатов о существовании и единственности решений соответствующих задач или свойствах этих решений. Прежде всего следует отметить, что указанная область содержит несколько разделов, отличающихся друг от друга способами моделирования смеси. В настоящей работе речь пойдет об одном из вариантов модели — многоскоростной модели гомогенной смеси вязких сжимаемых жидкостей. Это значит, что в каждой точке пространства присутствуют все компоненты (составляющие) смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение (а также посредством теплообмена — в теплопроводных моделях). С математических позиций как эта, так и многочисленные другие модели смесей исследованы весьма мало, в том числе по сравнению с аналогичной теорией для однокомпонентных сред (некоторые подробности можно найти в обзоре из [1]).

В период расцвета одномерной теории вязкого газа моделям смесей также было уделено определенное внимание (см., например, [2, 3]), но при этом

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 15–11–20019).

не рассматривались недиагональные матрицы вязкостей, отвечающие за вязкое трение между компонентами (т. е. взаимодействие компонент сводилось к обмену импульсом). После прорыва в многомерной теории вязкого газа, произошедшего в последние 20 лет, возник естественный стимул распространить полученные результаты однокомпонентной теории на случай смесей. Ключевой проблемой при этом оказалась работоспособность метода эффективных вязких потоков (являющегося сердцевиной современной теории Навье — Стокса сжимаемых жидкостей) на матричный случай. В полученных к настоящему времени результатах (см., например, [1, 4, 5]; мы не упоминаем предшествующие результаты по приближенным моделям) рассмотрены треугольные матрицы вязкостей, т. е. упомянутая проблема решена лишь частично. Авторам впервые удалось рассмотреть полные матрицы вязкостей. При этом ключевой находкой является предположение о совпадении фазовых давлений и их зависимости от суммарной плотности смеси, а также о том, что оператор материальной производной определяется средней скоростью движения. Однако в остальных слагаемых удержаны отдельные скорости компонент, в связи с чем сохраняется все богатство многоскоростной модели со всеми сопутствующими сложностями при работе с вязкими членами. В результате, с одной стороны, удалось впервые проанализировать задачу о движении смесей без каких-либо искусственных ограничений на коэффициенты вязкости, а с другой стороны, проделанная работа не является прямым обобщением соответствующих результатов теории однокомпонентной жидкости. В завершение обзора отметим, что нестационарный аналог рассматриваемой задачи можно найти в [6], а в модельном случае аналогичная проблема рассмотрена в [7].

Статья состоит из двух параграфов. В § 1 приведена постановка основной задачи (задача A), на доказательство разрешимости которой в конечном итоге направлена работа, а также постановка приближенной (регуляризованной) задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ и формулировка основного результата (теорема 1.6) о разрешимости последней. В § 2 проведено доказательство основного результата.

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Стационарное баротропное движение смеси $N \geq 2$ вязких сжимаемых жидкостей описывается в случае трех пространственных переменных следующей системой уравнений [1, 8, 9]:

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где ρ_i — плотность i-й составляющей смеси, $\boldsymbol{u}_i$ — поле скоростей, p_i — давление, $\mathbb{S}_i$ — тензор вязких напряжений, векторы $\boldsymbol{J}_i$ отвечают за интенсивность обмена импульсом между компонентами смеси, а векторы $\boldsymbol{f}_i$ являются известными полями внешних массовых сил. Тензоры вязких напряжений $\mathbb{S}_i$ определяются равенствами

$$\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{N} \widehat{\mathbb{S}}_{ij}, \ i = 1, \ldots, N, \quad \widehat{\mathbb{S}}_{ij} = (2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) + \lambda_{ij}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}), \ i, j = 1, \ldots, N, \tag{1.1}$$

$\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) = ((\nabla \otimes \boldsymbol{v}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{v})^*)/2$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{v}$, $\mathbb{I}$ — единичный тензор, а коэффициенты вязкостей образуют матрицы

$$\boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{N}, \quad \mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{N} > 0, \quad \mathbf{N} := \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0. \tag{1.2}$$

С математических позиций смысл условий (1.2), в частности, следующий. Ввиду равенства (справедливого для любых достаточно гладких векторных полей $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \dots, N$, в случае однородного краевого условия (1.10) на границе $\partial\Omega$ области течения Ω)

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \mu_{ij} (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i) \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j)\, d\boldsymbol{x} + \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \nu_{ij} (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_i)(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\, d\boldsymbol{x} \tag{1.3}$$

условия (1.2) обеспечивают важное соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x} \geq C_0 \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} \tag{1.4}$$

с некоторой положительной постоянной $C_0 = C_0(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Lambda})$.

Прокомментируем вывод равенства (1.3). Справедливо представление

$$\operatorname{div} \widehat{\mathbb{S}}_{ij} = \mu_{ij}(\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j + \Delta \boldsymbol{u}_j) + \lambda_{ij} \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j = \nu_{ij} \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j - \mu_{ij} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j,$$

с учетом которого имеем

$$\operatorname{div}(\widehat{\mathbb{S}}_{ij} \boldsymbol{u}_i) = \nu_{ij} (\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) \cdot \boldsymbol{u}_i - \mu_{ij} (\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j) \cdot \boldsymbol{u}_i + \widehat{\mathbb{S}}_{ij} : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i),$$

и, привлекая элементарные равенства

$$\operatorname{div}((\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) \boldsymbol{u}_i) = (\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) \cdot \boldsymbol{u}_i + (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_i)(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j),$$
$$\operatorname{div}((\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j) \times \boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{u}_i \cdot \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j + (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i) \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j),$$

получаем тождество

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(\widehat{\mathbb{S}}_{ij} \boldsymbol{u}_i - \nu_{ij} (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) \boldsymbol{u}_i + \mu_{ij} (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j) \times \boldsymbol{u}_i) \\ &\qquad = \widehat{\mathbb{S}}_{ij} : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i) - \nu_{ij} (\operatorname{div} \boldsymbol{u}_i)(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) - \mu_{ij} (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i) \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j), \end{aligned}$$

которое после суммирования по i, j от 1 до N и интегрирования по Ω дает (1.3).

Векторы $\boldsymbol{J}_i$ выражаются посредством формул

$$\boldsymbol{J}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} (\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i),\ i = 1, \dots, N, \quad a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1, \dots, N,$$

$\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ и $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ считаются заданными постоянными матрицами.

Обозначим через

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{u}_i, \quad \rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \tag{1.5}$$

среднюю скорость и суммарную плотность смеси соответственно. Заметим, что

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) = \operatorname{div}(\rho_i (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_i)), \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \underline{\operatorname{div}(\rho_i (\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{J}_i} + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.7}$$

Подчеркнутые слагаемые в уравнениях импульсов (1.7), а также правые части в уравнениях неразрывности (1.6) малы, если предположить, что фазовые скорости компонент смеси $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N$ мало отличаются друг от друга. Это предположение оправдано физически благодаря выравниванию скоростей, происходящему в результате столкновений молекул различных компонент гомогенных смесей [10, 11]. Предположим также, что во всех компонентах давления

$p_1 = \dots = p_N = p$ одинаковы и определяются суммарной плотностью ρ [8, 12]. Таким образом, получаем следующие уравнения:

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.8}$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p(\rho) = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.9}$$

для N скалярных и N векторных (всего $4N$ скалярных) неизвестных функций, в которых связь p и ρ (т. е. функция $p(\cdot)$) предполагается заданной. Отметим, что уравнения импульсов (1.9) допускают эквивалентную запись $\rho_i(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{v} + \nabla p(\rho) = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i$, $i = 1, \dots, N$, причем $(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_i$.

Конечной целью нашего исследования является доказательство разрешимости следующей задачи.

Задача А. *В замыкании $\overline{\Omega}$ области течения $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ требуется найти скалярные поля $\rho_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, и векторные поля $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяющие системе уравнений* (1.8), (1.9) (*см.* (1.1) *и* (1.5)), *а также следующим краевым условиям* (*прилипания*) *для полей скоростей и интегральным условиям для плотностей:*

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.10}$$

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i \, d\boldsymbol{x} = m_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.11}$$

где m_i, $i = 1, \dots, N$, — известные положительные постоянные.

На функцию $p \in C^1[0, +\infty)$ будем налагать условия [13, 14]

$$p(0) = 0, \quad \frac{1}{a} s^{\gamma-1} - b \leq p'(s) \leq a s^{\gamma-1} + b, \ s \geq 0, \tag{1.12}$$

с некоторыми постоянными $a \geq 1$, $b > 0$ и $\gamma > \frac{3}{2}$. Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\frac{1}{a\gamma} s^\gamma - bs \leq p(s) \leq \frac{a}{\gamma} s^\gamma + bs \tag{1.13}$$

при всех $s \geq 0$. Обозначим

$$g(s) = \int\limits_1^s \frac{p(\eta)}{\eta^2} \, d\eta.$$

Из (1.13) следует, что

$$C_1 s^\gamma - C_2 \leq s g(s) \leq C_3 s^\gamma + C_4, \tag{1.14}$$

где $C_i = C_i(a, b, \gamma)$, $i = 1, \dots, 4$, — положительные постоянные (условимся и в дальнейшем через $C_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, обозначать величины, принимающие конечные положительные значения и зависящие от объектов, указанных в скобках или перечисленных в комментариях). Кроме того, наложим дополнительное к (1.12) условие монотонности давления

$$p'(s) \geq 0, \quad s \geq 0. \tag{1.15}$$

Ввиду (1.13) и (1.15) имеем

$$g(s) \leq \left(\frac{a}{\gamma(\gamma-1)} s^{\gamma-1} + b \ln s \right) \theta(s-1), \tag{1.16}$$

где θ — функция Хевисайда. Наконец, предположим, что

$$p(s) = ds^{\omega} + \hat{p}(s), \quad \hat{p}'(s) \geq 0, \quad \omega \in (1, \gamma], \ d > 0. \tag{1.17}$$

Замечание 1.1. Вместо условий (1.12), (1.15) и (1.17) можно рассматривать эквивалентные условия

$$p(0) = 0, \quad \frac{1}{a_1} s^{\gamma-1} \leq p'(s) \leq a s^{\gamma-1} + b, \ s \geq 0, \tag{1.18}$$

с некоторой постоянной $a_1 \geq 1$ (и теми же b и γ). В самом деле, из (1.18) очевидно вытекают соотношения (1.12), (1.15) и (1.17) с $a = a_1$, $d = \frac{1}{a_1 \gamma}$, $\omega = \gamma$. Наоборот, из (1.12), (1.15) и (1.17) следует (1.18) при достаточно большом $a_1 > a$. При построении решения задачи А удобнее пользоваться условиями (1.12), (1.15) и (1.17), поскольку это подчеркивает использование разных свойств давления на разных этапах этого построения. При формулировке результата удобнее компактная форма (1.18). Отметим, что в литературе (см., например, [15]) обычно выписываются условия (1.17) сразу с $\omega = \gamma$, хотя на соответствующем этапе доказательства (а именно в процессе предельного перехода по $\delta \to 0$ в задаче $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$, сформулированной ниже) достаточно $\omega > 1$.

Простейшим примером ситуации, когда наложенные требования на давление выполнены, является политропный закон $p(\rho) = K\rho^{\gamma}$ с $\gamma > 3/2$ и $K > 0$. Отметим, что ограничение $\gamma > 3/2$ совпадает с таким же, возникающим из математической теории однокомпонентных вязких газов (см. [16, замечание 4.5]). В недавних работах [17, 18] по стационарной теории однокомпонентных газов удалось достичь $\gamma > 4/3$, а в работе [19] достигнуто даже $\gamma > 1$, но связанные с этим усложнения техники мы не будем рассматривать в настоящей работе, ограничившись методами, изложенными, например, в [16, 20]. Расширение результатов, связанное со снижением критических показателей γ, планируется произвести в следующих работах.

Наконец, на внешние силы наложим требования:

$$\boldsymbol{f}_i \in L_{\infty}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{f}_i = 0, \quad \text{если } \frac{3}{2} < \gamma \leq \frac{5}{3}, \ i = 1, \ldots, N. \tag{1.20}$$

Ограничение (1.20) потребуется только при исследовании задачи А, а для доказательства разрешимости задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ (см. ее постановку ниже), проведенного в настоящей работе, условие (1.20) не нужно.

Введем следующее обозначение:

$$\zeta(\gamma) = \begin{cases} 3(\gamma - 1), & \text{если } \frac{3}{2} < \gamma < 3, \\ 2\gamma, & \text{если } \gamma \geq 3. \end{cases} \tag{1.21}$$

Определение 1.2. Пусть в уравнениях (1.9) коэффициенты вязкости удовлетворяют ограничениям (1.2), давление — условиям (1.18) (другими словами, условиям (1.12), (1.15) и (1.17), см. замечание 1.1), а входные данные задачи А — условиям (1.19), (1.20). *Слабым решением задачи* А называется набор функций

$$\rho_i \in L_{\zeta(\gamma)}(\Omega), \ \rho_i \geq 0, \quad \boldsymbol{u}_i \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяющих (1.11) (см. также обозначения (1.5)) и следующим условиям.

(1) Плотности ρ_i удовлетворяют уравнениям неразрывности (1.8) в том смысле, что для любых $\psi_i \in W^1_{\frac{6\varsigma(\gamma)}{5\varsigma(\gamma)-6}}(\Omega)$ выполняются интегральные тождества

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla \psi_i \, d\boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

(2) Скорости $\boldsymbol{u}_i$ удовлетворяют уравнениям импульсов (1.9) (с определяющими уравнениями (1.1)) в том смысле, что для любых векторных полей $\boldsymbol{\varphi}_i \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\frac{\varsigma(\gamma)}{\varsigma(\gamma)-\gamma}}(\Omega)$ выполнены интегральные тождества

$$\int\limits_{\Omega} ((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + p(\rho) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i - \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i) \, d\boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

(краевые условия (1.10) выполнены автоматически в смысле функционального класса $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$).

Замечание 1.3. Как известно из теории уравнений переноса и Навье — Стокса (см., например, [16, разд. 3.1.3]), все решения уравнений неразрывности (1.8) рассматриваемого класса автоматически являются так называемыми ренормализованными решениями, т. е. удовлетворяют ренормализованным уравнениям (1.8), формально получающимся из (1.8) умножением на $\widetilde{G}'(\rho_i)$ для всех функций $\widetilde{G}$ определенного класса (а именно обладающими достаточной гладкостью и свойствами роста в нуле и на бесконечности). В литературе обычно (см., например, [16, определение 4.1]) в определение слабого решения включаются требования его ренормализации и конечности энергии. Эти требования в самом деле существенны как для дальнейшей работы с этим решением, так и для доказательства самого факта его существования. Однако в процессе решения задачи А нет необходимости включать в определение 1.2 указанные дополнительные требования.

Будем искать слабое решение задачи А (см. определение 1.2) как предел приближенных решений, а именно решений следующей регуляризованной краевой задачи (индексы ε и δ у величин, от них зависящих, пока опускаем):

$$-\varepsilon \Delta \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) + \varepsilon \rho_i = \varepsilon \frac{m_i}{|\Omega|}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.22}$$

$$\sum_{j=1}^{N} L_{ij} \boldsymbol{u}_j + \frac{\varepsilon}{2} \rho_i \boldsymbol{u}_i + \frac{\varepsilon}{2} \frac{m_i}{|\Omega|} \boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2} \rho_i (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla \tilde{p}(\rho) = \rho_i \boldsymbol{f}_{i\varepsilon}, \tag{1.23}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla \rho_i \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.24}$$

которую условимся называть задачей $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$. Здесь приняты следующие обозначения: $L_{ij} = -(\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \nabla \operatorname{div} - \mu_{ij} \Delta$, $i, j = 1, \dots, N$ (отметим, что $\operatorname{div} \mathbb{S}_i = -\sum\limits_{j=1}^{N} L_{ij} \boldsymbol{u}_j$, $i = 1, \dots, N$); $\tilde{p}(s) = p(s) + \delta(s^\beta + s^2)$; $\varepsilon, \delta \in (0, 1]$ — малые параметры (которые впоследствии будут устремлены к нулю), а показатель

$$\beta > \max\{\gamma, 3\} \tag{1.25}$$

выбран произвольно и останется фиксированным; $|\Omega| = \operatorname{mes}(\Omega)$; $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$; наконец, регулярные векторные поля $\boldsymbol{f}_{i\varepsilon} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, \dots, N$, подобраны так, что

$$\|\boldsymbol{f}_{i\varepsilon}\|_{C(\overline{\Omega})} \le 2 \|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.26}$$

$$\boldsymbol{f}_{i\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \boldsymbol{f}_i \quad \text{в } L_2(\Omega), \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.27}$$

Замечание 1.4. Нередко в литературе (см, например, [13, разд. 6.5] или [16, разд. 4.3.3]) рассматривается более общий вариант регуляризации (с двумя малыми параметрами): $-\varepsilon\Delta\rho_i + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) + \alpha\rho_i = \alpha h$, $i = 1, \dots, N$, в котором предельный переход по $\varepsilon \to 0$ может осуществляться независимо от параметра α. Такой путь может быть полезен, например, в случае использования стационарной задачи как этапа для анализа соответствующей нестационарной, но в данной работе в этом нет необходимости и полагаем $\alpha = \varepsilon$.

Как видно, задача $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ представляет собой не что иное, как равномерно эллиптическую регуляризацию задачи A плюс дополнительные слагаемые и граничные условия, призванные сохранить полезные свойства исходной задачи, играющие важную роль в теории вязкого газа, например, интегральную ортогональность конвективных членов скоростям.

Решение задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ будем строить сильное, понимая под этим следующее.

Определение 1.5. *Сильным решением задачи* $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ называются неотрицательные функции $\rho_i \in W^2_{\sigma_1}(\Omega)$ (где $\sigma_1 > 3$), $i = 1, \dots, N$, и векторные поля $\boldsymbol{u}_i \in W^2_{\sigma_1}(\Omega)$, $i = 1, \dots, N$, такие, что уравнения (1.22), (1.23) выполнены п. в. в Ω и п. в. на $\partial\Omega$ верны краевые условия (1.24).

Основным результатом статьи является

Теорема 1.6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область класса C^2. Тогда для любых входных данных класса, описанного в определении* 1.2, *при оговоренных в нем условиях на параметры уравнений для любых $\varepsilon, \delta \in (0, 1]$ и β, удовлетворяющих* (1.25), *и любых $\boldsymbol{f}_{i\varepsilon} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяющих* (1.26), *краевая задача $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ имеет по крайней мере одно сильное решение.*

§ 2. Доказательство теоремы 1.6 о разрешимости задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$

Доказывать существование сильного решения краевой задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ будем, используя принцип неподвижной точки Лерэ — Шаудера (см. [21, теорема 11.3]), который примéним к оператору Ψ, построенному ниже. Сначала определим несколько «промежуточных» операторов, суперпозицией которых будет оператор Ψ.

Первыми определим N операторов $\mathscr{R}_i$, $i = 1, \dots, N$, действующих по закону $\mathscr{R}_i : \boldsymbol{w} \mapsto r_i$, $i = 1, \dots, N$, где для любых $\boldsymbol{w} \in B_{\sigma_1}(\Omega) := \{\boldsymbol{w} \in W^2_{\sigma_1}(\Omega) : \boldsymbol{w}|_{\partial\Omega} = 0\}$ функции r_i строятся как решения задач

$$-\varepsilon\Delta r_i + \operatorname{div}(r_i \boldsymbol{w}) + \varepsilon r_i = \varepsilon \frac{m_i}{|\Omega|}, \quad \nabla r_i \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда $r_i = \mathscr{R}_i(\boldsymbol{w}) \geq 0$, $i = 1, \dots, N$ (см. [16, предложение 4.29]), и $\int\limits_\Omega r_i\, d\boldsymbol{x} = m_i$, $i = 1, \dots, N$. Ввиду стандартных свойств эллиптических краевых задач (см., например, [22, 23]) операторы $\mathscr{R}_i : B_{\sigma_1}(\Omega) \to W^2_{\sigma_1}(\Omega)$, $i = 1, \dots, N$, непрерывны, поскольку при всех $\boldsymbol{w}^k \in W^2_{\sigma_1}(\Omega)$, $k = 1, 2$,

$$\begin{aligned} &\|\mathscr{R}_i(\boldsymbol{w}^1) - \mathscr{R}_i(\boldsymbol{w}^2)\|_{W^2_{\sigma_1}(\Omega)} \\ &\quad \leq C_5(\|\boldsymbol{w}^1\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|\boldsymbol{w}^2\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \{m_i\}, \varepsilon, \sigma_1, \Omega)\|\boldsymbol{w}^1 - \boldsymbol{w}^2\|_{W^2_{\sigma_1}(\Omega)}, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

(отметим, что в C_5 зависимость от первого и второго аргументов является локально ограниченной[1)]; здесь и далее зависимость оценок от геометрии области не конкретизируется).

Следующим вспомогательным оператором является $\mathscr{U} : \mathbf{g} \mapsto \mathbf{h}$, где по заданному вектору $\mathbf{g} = (\boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_N)$ с компонентами $\boldsymbol{g}_i \in L_{\sigma_1}(\Omega)$, $i = 1, \dots, N$, строится $\mathbf{h} = (\boldsymbol{h}_1, \dots, \boldsymbol{h}_N)$ как решение задачи

$$\sum_{j=1}^{N} L_{ij}\boldsymbol{h}_j = \boldsymbol{g}_i, \quad \boldsymbol{h}_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

которая равномерно эллиптическая в силу (1.2). Очевидно, что $\mathscr{U} : L_{\sigma_1}(\Omega) \to B_{\sigma_1}(\Omega)$ непрерывно, так как при любых $\mathbf{g}^k \in W^2_{\sigma_1}(\Omega)$, $k = 1, 2$, верно

$$\|\mathscr{U}(\mathbf{g}^1) - \mathscr{U}(\mathbf{g}^2)\|_{W^2_{\sigma_1}(\Omega)} \le C_6(\sigma_1, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \Omega)\|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}.$$

Наконец, третий набор операторов $\mathscr{G}_1, \dots, \mathscr{G}_N$ определим следующим образом:

$$\mathscr{G}_i(\mathbf{w}) = -\frac{\varepsilon}{2}r_i\boldsymbol{w}_i - \frac{\varepsilon}{2}\frac{m_i}{|\Omega|}\boldsymbol{w}_i - \frac{1}{2N}r_i\left(\left(\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{w}_j\right)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{w}_i$$
$$- \frac{1}{2N}\operatorname{div}\left(r_i\left(\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{w}_j\right)\otimes\boldsymbol{w}_i\right) - \nabla\tilde{p}(r) + r_i\boldsymbol{f}_{i\varepsilon}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где по заданному $\mathbf{w} = (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_N) \in B_{\sigma_1}(\Omega)$ строятся

$$r_i = \mathscr{R}_i\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{w}_j\right) \in W^2_{\sigma_1}(\Omega), \quad i = 1, \dots, N,\ r = \sum_{j=1}^{N} r_j.$$

Легко видеть, что $\mathscr{G}_i : B_{\sigma_1}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, $i = 1, \dots, N$. Более того, $\mathscr{G}_i$, $i = 1, \dots, N$, определены, ограничены и непрерывны как операторы из $C^1(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$, а потому компактны (вполне непрерывны) как операторы из $B_{\sigma_1}(\Omega)$ в $L_{\sigma_1}(\Omega)$, при этом соответствующие оценки зависят только от C_5, $\{\|\boldsymbol{f}_{i\varepsilon}\|_{C(\overline{\Omega})}\}$, $\|\mathbf{w}\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, N, a, b, $\{m_i\}$, β, γ, σ_1 и Ω (причем зависимость от $\|\mathbf{w}\|_{C^1(\overline{\Omega})}$ и $\|\boldsymbol{f}_{i\varepsilon}\|_{C(\overline{\Omega})}$, $i = 1, \dots, N$, локально ограниченная).

В итоге положим $\Psi = \mathscr{U} \circ (\mathscr{G}_1, \dots, \mathscr{G}_N)$, т. е. для любых $\mathbf{u} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N) \in B_{\sigma_1}(\Omega)$ полагаем

$$\Psi(\mathbf{u}) = \mathscr{U}(\mathscr{G}_1(\mathbf{u}), \dots, \mathscr{G}_N(\mathbf{u})).$$

По построению оператор $\Psi : B_{\sigma_1}(\Omega) \to B_{\sigma_1}(\Omega)$ корректно определен, вполне непрерывен и искомое сильное решение задачи (1.22)–(1.24) имеет вид $(\mathscr{R}_1(\boldsymbol{v}), \dots, \mathscr{R}_N(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N)$, где $\boldsymbol{v} = \frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\boldsymbol{u}_j$ (см. (1.5)), а $\mathbf{u}$ — неподвижная точка Ψ.

Теперь для применения принципа Лерэ — Шаудера необходимо получить равномерную по параметру $\lambda \in (0, 1]$ априорную оценку решений операторного уравнения $\lambda\Psi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ в пространстве $W^2_{\sigma_1}(\Omega)$, т. е. оценить в этом пространстве

[1)] Т. е. конечен $\sup C_5$ по любому множеству вида $\|\boldsymbol{w}^1\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \|\boldsymbol{w}^2\|_{C^1(\overline{\Omega})} \le \mathrm{const}$.

предполагаемое решение $(\rho_1,\dots,\rho_N,\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_N)$ краевой задачи $A^{(\lambda)}_{\varepsilon,\delta}$ равномерно по $\lambda\in(0,1]$, где задача $A^{(\lambda)}_{\varepsilon,\delta}$ состоит из соотношений (индекс λ у величин, зависящих от λ, опускаем)

$$\sum_{j=1}^N L_{ij}\boldsymbol{u}_j+\frac{\lambda\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i+\frac{\lambda\varepsilon}{2}\frac{m_i}{|\Omega|}\boldsymbol{u}_i+\frac{\lambda}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i \\ +\frac{\lambda}{2}\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i)+\lambda\nabla\tilde{p}(\rho)=\lambda\rho_i\boldsymbol{f}_{i\varepsilon},\quad i=1,\dots,N,\quad (2.1)$$

в совокупности с (1.22) и (1.24), где $\rho=\sum\limits_{j=1}^N\rho_j$.

Умножив (2.1) скалярно на $\boldsymbol{u}_i$, проинтегрировав по Ω (пользуясь граничными условиями (1.24)) и просуммировав по $i=1,\dots,N$, получим

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}+\frac{\varepsilon}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^N m_i\int\limits_\Omega|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} \\ -N\int\limits_\Omega\tilde{p}(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega\rho_i\boldsymbol{f}_{i\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}.\quad (2.2)$$

Сложив уравнения (1.22), придем к уравнению для суммарной плотности

$$-\varepsilon\Delta\rho+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})+\varepsilon\rho=\varepsilon\frac{m}{|\Omega|},\quad (2.3)$$

где $m=\sum\limits_{i=1}^N m_i$. Интегрируя уравнения (1.22) и (2.3) по области Ω и учитывая граничные условия (1.24), получаем равенства

$$\int\limits_\Omega\rho_i\,d\boldsymbol{x}=m_i,\ i=1,\dots,N,\quad\int\limits_\Omega\rho\,d\boldsymbol{x}=m.\quad (2.4)$$

Умножая уравнение (2.3) на функцию $G'(\rho)$ (где $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция), приходим к равенству

$$\varepsilon G''(\rho)|\nabla\rho|^2-\varepsilon\operatorname{div}(G'(\rho)\nabla\rho)+(\rho G'(\rho)-G(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{v} \\ +\operatorname{div}(G(\rho)\boldsymbol{v})+\varepsilon\rho G'(\rho)=\varepsilon\frac{m}{|\Omega|}G'(\rho).\quad (2.5)$$

Полагая в (2.5) $G(s)=\delta\big(\frac{1}{\beta-1}\rho^\beta+\rho^2\big)$, получим с учетом (1.24) и (2.4) равенство

$$-\delta\int\limits_\Omega(\rho^\beta+\rho^2)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=\frac{\varepsilon\delta\beta}{\beta-1}\int\limits_\Omega\rho^\beta\,d\boldsymbol{x}+2\varepsilon\delta\int\limits_\Omega\rho^2\,d\boldsymbol{x}-\frac{\varepsilon\delta m}{|\Omega|}\frac{\beta}{\beta-1}\int\limits_\Omega\rho^{\beta-1}\,d\boldsymbol{x} \\ -\frac{2\varepsilon\delta m^2}{|\Omega|}+\varepsilon\delta\beta\int\limits_\Omega\rho^{\beta-2}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x}+2\varepsilon\delta\int\limits_\Omega|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x},$$

из которого следует неравенство

$$-\delta\int\limits_\Omega(\rho^\beta+\rho^2)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}\ge\frac{\varepsilon\delta\beta}{2(\beta-1)}\int\limits_\Omega\rho^\beta\,d\boldsymbol{x}+2\varepsilon\delta\int\limits_\Omega\rho^2\,d\boldsymbol{x}+\varepsilon\delta\beta\int\limits_\Omega\rho^{\beta-2}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x} \\ +2\varepsilon\delta\int\limits_\Omega|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x}-C_7(m,\beta,|\Omega|).\quad (2.6)$$

Полагая в (2.5) $G(s) = (s+l)g(s+l)$ с произвольным $l \in (0,1]$, выводим равенство

$$-\int\limits_\Omega p(\rho+l)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + l\int\limits_\Omega \frac{p(\rho+l)}{\rho+l}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + l\int\limits_\Omega g(\rho+l)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}$$
$$= \varepsilon\int\limits_\Omega \rho g(\rho+l)\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\int\limits_\Omega \frac{\rho p(\rho+l)}{\rho+l}\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\int\limits_\Omega \frac{p'(\rho+l)}{\rho+l}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$-\varepsilon\frac{m}{|\Omega|}\int\limits_\Omega g(\rho+l)\,d\boldsymbol{x} - \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}\int\limits_\Omega \frac{p(\rho+l)}{\rho+l}\,d\boldsymbol{x},$$

из которого после элементарных оценок (с учетом (1.13)–(1.16)) и последующего предельного перехода по $l \to 0$ следует неравенство

$$-\int\limits_\Omega p(\rho)\,\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} \geq \frac{\varepsilon}{2}\left(C_1 + \frac{1}{a\gamma}\right)\int\limits_\Omega \rho^\gamma\,d\boldsymbol{x} - C_8(C_1, C_2, a, b, m, \gamma, |\Omega|). \tag{2.7}$$

Складывая (2.6) и (2.7), приходим к оценке

$$-\int\limits_\Omega \tilde{p}(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} \geq \frac{\varepsilon\delta\beta}{2(\beta-1)}\int\limits_\Omega \rho^\beta\,d\boldsymbol{x} + 2\varepsilon\delta\int\limits_\Omega \rho^2\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\delta\beta\int\limits_\Omega \rho^{\beta-2}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$+ 2\varepsilon\delta\int\limits_\Omega |\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\left(C_1 + \frac{1}{a\gamma}\right)\int\limits_\Omega \rho^\gamma\,d\boldsymbol{x} - C_9(C_7, C_8). \tag{2.8}$$

Из (2.2) в силу (1.4), (2.8) и того, что $\frac{1}{\lambda} \geq 1$, следует неравенство[2)]

$$C_0\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega |\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega \rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^N m_i\int\limits_\Omega |\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\frac{\varepsilon\delta\beta N}{2(\beta-1)}\int\limits_\Omega \rho^\beta\,d\boldsymbol{x} + 2\varepsilon\delta N\int\limits_\Omega \rho^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}N\left(C_1 + \frac{1}{a\gamma}\right)\int\limits_\Omega \rho^\gamma\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\delta N\beta\int\limits_\Omega \rho^{\beta-2}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$+ 2\varepsilon\delta N\int\limits_\Omega |\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x} \leq \sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega \rho_i\boldsymbol{f}_{i\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x} + NC_9, \tag{2.9}$$

откуда ввиду

$$C_0\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega |\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} \geq C_{10}(C_0,\Omega)\sum_{i=1}^N\|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

$$\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega \rho_i\boldsymbol{f}_{i\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_i\,dx \leq \frac{C_{10}}{2}\sum_{i=1}^N\|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \frac{\varepsilon\delta\beta N}{4(\beta-1)}\|\rho\|^\beta_{L_\beta(\Omega)}$$
$$+ C_{11}(C_{10}, \{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\}, N, \beta, \delta, \varepsilon, \Omega)$$

получаем равномерную по λ оценку

$$\sum_{i=1}^N\|\boldsymbol{u}_i\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\rho\|_{L_\beta(\Omega)} + \|\nabla(\rho^{\frac{\beta}{2}})\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{12}(C_9, C_{10}, C_{11}, N, \beta, \delta, \varepsilon).$$

[2)] Отметим, что, во-первых, в этом неравенстве константа C_9 не зависит от ε, а во-вторых, оно относится и к случаю $\lambda = 1$, т. е. рассмотрена исходная задача $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$.

Отсюда, в частности, следует

$$\|\rho_i\|_{L_{3\beta}(\Omega)} \le C_{13}(C_{12}, \beta, \Omega), \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.10}$$
$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_6(\Omega)} \le C_{14}(C_{12}, \Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

Из (1.22) и (1.24) в силу последних двух неравенств и априорных оценок решений эллиптических задач (см. [16, лемма 4.27] и [16, лемма 3.17]) получаем

$$\|\nabla\rho_i\|_{L_{\frac{6\beta}{\beta+2}}(\Omega)} \le C_{15}(C_{13}, C_{14}, N, \{m_i\}, \beta, \varepsilon, \Omega), \quad i = 1, \dots, N,$$

а ввиду ограниченности вложения $W^1_{\frac{6\beta}{\beta+2}}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ (отметим, что благодаря (2.10) функции ρ_i, $i = 1, \dots, N$, равномерно по λ ограничены в пространстве $L_{\frac{6\beta}{\beta+2}}(\Omega)$) приходим к оценке

$$\|\rho_i\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_{16}(C_{13}, C_{15}, \beta, \Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

Таким образом, $\|\rho_i\boldsymbol{u}_j\|_{L_6(\Omega)} \le C_{17}(C_{14}, C_{16})$, $i, j = 1, \dots, N$.

Введем обозначения

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \frac{1}{2|\Omega|}\int\limits_{\Omega} \rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\boldsymbol{H}_i = \lambda\Big(-\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i - \frac{\varepsilon m_i}{2|\Omega|}\boldsymbol{u}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_{i\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}_i\Big), \quad i = 1, \dots, N.$$

Обозначим через $\mathbb{V}_i$, $i = 1, \dots, N$, решения краевых задач

$$\operatorname{div}\mathbb{V}_i = \frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{\alpha}_i, \quad \mathbb{V}_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.11}$$

и положим $\mathbb{G}_i = \lambda\big(-\tilde{p}(\rho)\mathbb{I} - \frac{1}{2}\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i - \mathbb{V}_i\big)$, $i = 1, \dots, N$. В этих обозначениях уравнения (2.1) принимают вид

$$\sum_{j=1}^{N} L_{ij}\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{H}_i + \operatorname{div}\mathbb{G}_i, \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.12}$$

Так как правые части уравнений (2.11) равномерно ограничены по λ в пространстве $L_{\frac{3}{2}}(\Omega)$, для $\mathbb{V}_i$, $i = 1, \dots, N$, справедливы неравенства (см. [16, лемма 3.17]) $\|\mathbb{V}_i\|_{W^1_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \le C_{18}(C_{12}, C_{17}, N, \Omega)$, $i = 1, \dots, N$. В результате заключаем, что выполнены оценки

$$\|\boldsymbol{H}_i\|_{L_6(\Omega)} + \|\mathbb{G}_i\|_{L_3(\Omega)} \\ \le C_{19}(C_{12}, C_{14}, C_{16}, C_{17}, C_{18}, \{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\}, N, a, b, \{m_i\}, \beta, \gamma, \Omega),$$

$i = 1, \dots, N$. Следовательно, из уравнений (2.12) и граничных условий (1.24) в силу оценок для решений эллиптических задач (см., например, [22, 23]) вытекает, что $\|\boldsymbol{u}_i\|_{W^1_3(\Omega)} \le C_{20}(C_{19}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, \Omega)$, $i = 1, \dots, N$, и ввиду ограниченности вложения $W^1_3(\Omega)$ в $L_{2\sigma_1}(\Omega)$ приходим к соотношениям $\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_{2\sigma_1}(\Omega)} \le C_{21}(C_{20}, \sigma_1, \Omega)$, $i = 1, \dots, N$. Из (1.22), (1.24) благодаря результатам о регулярности решений эллиптических задач (см. [16, лемма 4.27]) получаем, что

$$\|\rho_i\|_{W^2_3(\Omega)} \le C_{22}(C_{15}, C_{16}, C_{20}, C_{21}, N, \{m_i\}, \beta, \varepsilon, \sigma_1, \Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

Отсюда в силу ограниченности вложения $W_3^2(\Omega)$ в $W^1_{2\sigma_1}(\Omega)$ следуют неравенства $\|\rho_i\|_{W^1_{2\sigma_1}(\Omega)} \le C_{23}(C_{22},\sigma_1,\Omega)$, $i=1,\dots,N$. Таким образом, для функций $\boldsymbol{H}_i$ и $\mathbb{G}_i$ получаем оценки

$$\|\boldsymbol{H}_i\|_{L_{2\sigma_1}(\Omega)} + \|\mathbb{G}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)} \\ \le C_{24}(C_{12},C_{16},C_{20},C_{21},\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\},N,a,b,\{m_i\},\beta,\gamma,\sigma_1,\Omega), \quad i=1,\dots,N, \tag{2.13}$$

благодаря которым приходим к соотношениям

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W^1_{\sigma_1}(\Omega)} \le C_{25}(C_{24},\boldsymbol{\Lambda},\mathbf{M},\sigma_1,\Omega), \quad i=1,\dots,N,$$

и (так как $\sigma_1>3$) $\|\boldsymbol{u}_i\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_{26}(C_{25},\sigma_1,\Omega)$, $i=1,\dots,N$. С помощью этих неравенств и стандартных оценок решений эллиптических задач из (1.22) и (1.24) выводим, что

$$\|\rho_i\|_{W^2_{\sigma_1}(\Omega)} \le C_{27}(C_{16},C_{23},C_{25},C_{26},N,\{m_i\},\varepsilon,\sigma_1,\Omega), \quad i=1,\dots,N,$$

откуда (ввиду $\sigma_1>3$) $\|\nabla\rho_i\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_{28}(C_{27},\sigma_1,\Omega)$, $i=1,\dots,N$. Для функций $\mathbb{G}_i$ при $i=1,\dots,N$ справедливы неравенства

$$\|\operatorname{div}\mathbb{G}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)} \le C_{29}(C_{16},C_{25},C_{26},C_{28},N,a,b,\beta,\gamma,\sigma_1,|\Omega|).$$

Отсюда, из (2.13) и оценок для решений эллиптических задач следует, наконец, что

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W^2_{\sigma_1}(\Omega)} \le C_{30}(C_{24},C_{29},\boldsymbol{\Lambda},\mathbf{M},\sigma_1,\Omega), \quad i=1,\dots,N.$$

Итак, выполнены все условия для применения принципа Лерэ — Шаудера, поэтому можно утверждать, что задача $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ имеет по крайней мере одно сильное решение. Теорема 1.6 доказана.

Для доказательства разрешимости задачи A (см. определение 1.2) остается совершить предельный переход по двум малым параметрам (ε и δ), отличающим приближенную задачу $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ от исходной задачи A, на основании оценок, равномерных по этим параметрам. Это предполагается проделать в следующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence // Methods Appl. Anal. 2013. V. 20, N 2. P. 179–195.
2. *Кажихов А. В., Петров А. Н.* Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси // Динамика сплошной среды. 1978. № 35. С. 61–73.
3. *Петров А. Н.* Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика сплошной среды. 1982. № 56. С. 105–121.
4. *Кучер Н. А., Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Стационарные решения уравнений динамики смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1338–1353.
5. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений движения однотемпературной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 135–160.
6. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей // Изв. РАН. Сер. мат. (в печати).

7. *Прокудин Д. А., Краюшкина М. В.* Разрешимость стационарной краевой задачи для модельной системы уравнений баротропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 3. С. 55–67.
8. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.
9. *Rajagopal K. L., Tao L.* Mechanics of mixtures. Singapore: World Sci., 1995.
10. *Жданов В. М.* Процессы переноса в многокомпонентной плазме. М.: Физматлит, 2009.
11. *Нагнибеда Е. А., Кустова Е. В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках наравновесных реагирующих газов. С-Пб.: Изд. С.-ПбГУ, 2003.
12. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.* Теория частичного плавления // Геология и геофизика. 1989. № 9. С. 56–64.
13. *Lions P.-L.* Mathematical topics in fluid mechanics. V. 2. Compressible models. New York: Oxford Univ. Press, 1998.
14. *Feireisl E.* Some recent results on the existence of global-in-time weak solutions to the Navier–Stokes equations of a general barotropic fluid // Math. Bohem. 2002. V. 127, N 2. P. 203–209.
15. *Jesslé D., Novotný A.* Existence of renormalized weak solutions to the steady equations describing compressible fluids in barotropic regime // J. Math. Pures Appl. 2013. V. 99, N 3. P. 280–296.
16. *Novotný A., Straškraba I.* Introduction to the mathematical theory of compressible flow. Oxford: Oxford Univ. Press, 2004.
17. *Плотников П. И., Соколовски Я.* Стационарные решения уравнений Навье — Стокса для двухатомных газов // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 3. С. 117–148.
18. *Frehse J., Steinhauer M., Weigant W.* The Dirichlet problem for steady viscous flow in 3-d // J. Math. Pures Appl. 2012. V. 97, N 2. P. 85–97.
19. *Plotnikov P. I., Weigant W.* Steady 3D viscous compressible flows with adiabatic exponent $\gamma \in (1, \infty)$ // J. Math. Pures Appl. 2012. V. 104, N 1. P. 58–82.
20. *Feireisl E., Novotný A.* Singular limits in thermodynamics of viscous fluids. Basel: Birkhäuser, 2009.
21. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
22. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I // Commun. Pure Appl. Math. 1959. V. 12, N 4. P. 623–727.
23. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Commun. Pure Appl. Math. 1964. V. 17, N 1. P. 35–92.

Статья поступила 27 февраля 2016 г.

Мамонтов Александр Евгеньевич, Прокудин Дмитрий Алексеевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
`aem75@mail.ru`, `prokudin@hydro.nsc.ru`