Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 512.542

О СИЛОВСКИХ 2–ПОДГРУППАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП, НАСЫЩЕННЫХ КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ ГРУППАМИ

Б. Ли, Д. В. Лыткина

Аннотация. Доказано, что любая 2-подгруппа периодической группы, насыщенной группами лиева типа ограниченных лиевых рангов над полями нечетных характеристик, является черниковской группой. В частности, любая такая группа локально конечна.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.609

Ключевые слова: группа, насыщенная множеством групп; периодическая группа; силовская подгруппа.

Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество групп. По определению *группа G насыщена группами из $\mathfrak{M}$*, если любая ее конечная подгруппа содержится в подгруппе, изоморфной некоторому элементу множества $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Пусть n — натуральное число, $\mathfrak{A}$ — множество, состоящее из всех конечных простых групп лиева типа над полями нечетных характеристик, лиевы ранги которых не превосходят числа n. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — произвольное конечное множество конечных групп. Если G — периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{M}$, то любая ее 2-подгруппа является черниковской группой, т. е. конечным расширением полной абелевой группы конечного ранга, и, в частности, локально конечна.*

Доказательство теоремы 1 использует следующий результат.

Теорема 2. (1) *2-Группа, в которой централизатор некоторой инволюции черниковский, сама является черниковской группой.*

(2) *2-Группа, содержащая конечную максимальную элементарную абелеву подгруппу, является черниковской группой.*

Теорема 2 является частным случаем утверждений из работы В. П. Шункова [1, теоремы 1, 2]. Позднее обобщение этих утверждений опубликовал А. М. Попов в [2].

Учитывая то, что доказательства в [1] не вполне корректны, а сборник [2] труднодоступен, авторы решили привести здесь полные доказательства той части результатов из [1], которые необходимы для доказательства теоремы 1, при этом, в основном, следовали линии рассуждений из [1].

The work of the first author was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11471055).

1. Доказательство теоремы 2

Группа G называется *локально конечной*, если любое конечное множество ее элементов порождает конечную подгруппу. Понятно, что локально конечная группа является периодической группой, т. е. порядок любого ее элемента конечен. Для краткости в этой статье периодическую не локально конечную группу будем называть *дикой*.

Группа G называется *черниковской*, если она представляет собой конечное расширение прямого произведения A конечного числа r квазициклических групп. Очевидно, подгруппа A содержит любую полную абелеву подгруппу из G и является характеристической подгруппой в G. Она называется *полной частью группы* G. Число r называется *рангом* A.

Лемма 1. (1) *Подгруппа черниковской группы и расширение черниковской группы посредством черниковской группы — черниковские группы.*

В черниковской группе выполняется условие минимальности для подгрупп: в ней нет бесконечных строго убывающих цепей подгрупп.

(2) *В примарной черниковской группе любая собственная подгруппа отлична от своего нормализатора.*

(3) *Если в локально конечной p-группе G найдется максимальная элементарная абелева подгруппа конечного порядка, то G — черниковская группа.*

(4) *Если локально конечная p-группа G содержит элемент порядка p, централизатор которого является черниковской группой, то сама группа G черниковская.*

Доказательство. Доказательство пп. (1) и (2) см. в [3] или [4]. П. (3) — часть теоремы 4.1 из [5].

Если $C_G(t)$ — черниковская подгруппа в локально конечной группе G, то в $C_G(t)$ нет бесконечных элементарных абелевых p-подгрупп, поэтому по п. (3) G — черниковская подгруппа, что доказывает п. (4).

Лемма 2. (1) *Группа внешних автоморфизмов черниковской группы содержит нормальную подгруппу без кручения конечного индекса.*

(2) *Если G — черниковская p-группа для некоторого простого числа p и r — ранг ее полной части A, то $|G/C_G(A)| \leq m$, где m — натуральное число, зависящее только от r и p.*

(3) *Если периодическая группа H является расширением полной абелевой группы A конечного ранга r посредством полной абелевой группы конечного ранга s, то H — полная абелева группа ранга $r + s$.*

Доказательство. П. (1) — часть теоремы 2 из [6].

(2) Фактор-группа $\overline{G} = G/C_G(A)$ вкладывается в группу B внешних автоморфизмов A, в которой по п. (1) существует нормальная подгруппа N без кручения конечного индекса. Ясно, что $\overline{G} \cap N = 1$, поэтому $\overline{G}$ изоморфна подгруппе конечной группы $\mathrm{Out}(A)/N$, зависящей только от A, т. е. от p и r.

(3) Так как A и H/A — черниковские группы, по лемме 1(1) H — черниковская группа. Если C — ее полная часть, то $A \leq C$ и H/C — конечная группа по п. (2). Поскольку $H/C \simeq (H/A)/(C/A)$, то C/A — подгруппа конечного индекса в полной абелевой группе H/A, т. е. $C/A = H/A$ и $C = H$. Понятно, что ранг C конечен (он не превосходит $r + s$). Так как A — полная подгруппа абелевой группы $C = H$ конечного ранга, то $H \simeq A \times H/A$, откуда вытекает оставшаяся часть п. (3). Лемма доказана.

Лемма 3. *В неабелевой 2-группе G существует конечная неабелева подгруппа.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Среди всех контрпримеров выберем G так, чтобы в ней существовала пара x, y некоммутирующих элементов, для которой сумма $|x|+|y|$ наименьшая. Очевидно, что $G=\langle x,y\rangle$ и $|x|+|y|>4$. Это означает, что все инволюции из G перестановочны и, следовательно, порождают нормальную абелеву подгруппу A. Пусть $\bar{x}=xA$, $\bar{y}=yA$. Так как $|\bar{x}|+|\bar{y}|<|x|+|y|$, по предположению $G/A=\langle\bar{x},\bar{y}\rangle$ коммутативна и поэтому конечна. Но тогда и $G=\langle x,y\rangle$ конечна. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть t — инволюция периодической группы G и $C_G(t)$ — черниковская группа.*

(1) *Если N — нормальная черниковская подгруппа в G, то централизатор tN в G/N — черниковская подгруппа.*

(2) *Ранги полных t-инвариантных абелевых 2-подгрупп группы G ограничены в совокупности.*

Доказательство. (1) Пусть $T=\langle t,N\rangle$. По лемме 1(1) T и $TC_G(t)$ — черниковские группы. По лемме 2(1) индекс $TC_G(T)$ в $R=N_G(T)$ конечен. Поскольку $TC_G(T)\leq TC_G(t)$, то $TC_G(T)$ — черниковская группа, но тогда и R — черниковская группа. Так как $C_{G/N}(tN)\leq R/N$, то $C_{G/N}(tN)$ тоже черниковская группа.

(2) Пусть A — инвариантная относительно t полная абелева 2-подгруппа G. Тогда $A\langle t\rangle$ — локально конечная группа и $C_A(t)$ — черниковская группа.

По лемме 1(4) $A\langle t\rangle$ — черниковская группа, поэтому ранг A конечен. Это означает, что подгруппа B из A, порожденная инволюциями из A, конечна. Более того, $|B|\leq|C_B(t)|^2$. Если r — максимум рангов абелевых 2-подгрупп из $C_G(t)$ (а он конечен по определению черниковской группы и лемме 1(1)), то $|C_B(t)|\leq 2^r$, откуда $|B|\leq 2^{2r}$. Это означает, что ранг A не превосходит $2r$.

Лемма 5 [7]. *Если t — инволюция в периодической группе G и порядок $C_G(t)$ конечен, то G локально конечна.*

Предположим, что теорема 2(1) неверна. Пусть $\mathfrak{W}$ — множество диких 2-групп, содержащих некоторую инволюцию t с черниковским централизатором. По условию $\mathfrak{W}$ непусто.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{V}$ — множество групп $G\in\mathfrak{W}$, обладающих следующим свойством: для некоторой инволюции $t\in G$ с черниковским централизатором нормализатор любой нетривиальной t-инвариантной полной абелевой подгруппы из G — черниковская группа.*

Тогда $\mathfrak{V}$ непусто.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $G\in\mathfrak{W}$ и t — инволюция из G с черниковским централизатором. Тогда найдется нетривиальная полная абелева t-инвариантная подгруппа A из G, для которой $N_G(A)$ — не черниковская группа. Так как $N_G(A)\cap C_G(t)$ — черниковская группа, $N=N_G(A)$ — дикая группа по лемме 1(4). По лемме 4(2) A можно выбрать так, чтобы она не содержалась ни в какой большей t-инвариантной полной абелевой подгруппе, нормализатор которой в G — дикая группа.

По лемме 4(1) централизатор инволюции $\overline{t}=tA$ в $\overline{G}=N/A$ — черниковская группа. Кроме того, если $\overline{B}$ — нетривиальная полная $\overline{t}$-инвариантная абелева подгруппа в $\overline{G}$, нормализатор которой в $\overline{G}$ не является черниковской подгруппой, то по лемме 2(3) ее полный прообраз в N — полная абелева t-инвариантная подгруппа, нормализатор которой в N — дикая группа. Это противоречит выбору A. Таким образом, $\overline{G} \in \mathfrak{V}$. Лемма доказана.

Пусть $G \in \mathfrak{V}$ и t — инволюция из G с черниковским централизатором. Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество локально конечных подгрупп из G, содержащих t, а через $\mathfrak{M}$ — множество максимальных по включению элементов из $\mathfrak{L}$.

Лемма 7. *Если $L \in \mathfrak{L}$, то L — черниковская группа.*

Доказательство. Условие теоремы переносится на подгруппы, содержащие t, поэтому по лемме 1(1) L черниковская.

Лемма 8. *Пусть $M \in \mathfrak{M}$.*

(1) *Существуют сопряженная с t инволюция $a \in G\backslash M$ и подгруппа $M_1 \in \mathfrak{M}$, отличная от M.*

(2) *Если L — бесконечная подгруппа из M, содержащая t, то $N_G(L) \leq M$.*

Доказательство. Предположим, что все сопряженные с t инволюции из G содержатся в M. Порожденная ими подгруппа T нормальна в G и является черниковской. По лемме 2(2) $G/TC_G(T)$ — конечная группа, а $TC_G(T) \leq TC_G(t)$ — черниковская группа, поэтому G — черниковская группа вопреки выбору G. Если a — инволюция из $G \setminus M$, то $\langle t, a\rangle$ — конечная группа, которая содержится в $M_1 \in \mathfrak{M}$. Очевидно, что $M \neq M_1$.

(2) Пусть A — полная часть L. Тогда $A \neq 1$. Так как $G \in \mathfrak{V}$, то $N_G(A)$ — бесконечная черниковская группа. Если B и C — полные части групп M и $N_G(A)$ соответственно, то $A \leq B$, откуда $B \leq N_G(A)$, поэтому $B \leq C$. Кроме того, $N_G(B) \geq M$, тем самым $N_G(B) = M$, поскольку $N_G(B)$ — черниковская группа по определению $\mathfrak{V}$ и $M \in \mathfrak{M}$. Отсюда $C \leq M$ и, следовательно, $B = C$. Теперь $N_G(L) \leq N_G(A) \leq N_G(C) = N_G(B) = M$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если D — конечная подгруппа из G, содержащая t, то $N_G(D)$ — черниковская группа.*

Доказательство. Так как $N_G(D)/C_G(D)$ изоморфна группе автоморфизмов D, а $C_G(D)$ содержится в черниковской подгруппе $C_G(t)$, по лемме 1(1) $N_G(D)$ — конечное расширение черниковской группы, т. е. черниковская группа. Лемма доказана.

Лемма 10. *Существует натуральное число $s = 2^{s_0}$, обладающее следующим свойством: для любой подгруппы $M \in \mathfrak{M}$ и любого элемента $x \in M$ элемент x^s централизует полную часть M.*

Доказательство. По лемме 4(2) ранги полных абелевых подгрупп из G, которые нормализуются элементом t, ограничены, поэтому существование искомого числа s вытекает из леммы 2(2). Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $M \in \mathfrak{M}$.*

(1) *Существуют подгруппы M_1, M_2, ... , принадлежащие $\mathfrak{M}$, для которых при любом $n = 1, 2, \dots$*

(a) *$D_n = M \cap M_n$ — конечная группа;*

(b) *$N_M(D_n) \leq D_{n+1}$ и $D_{n+1} \neq D_n$.*

В частности, все элементы из $\mathfrak{M}$ — бесконечные группы.

(2) *Если A — полная часть M, то $A \leq D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$.*

(3) *Если A_0 — конечная подгруппа из A, то $C_G(A_0)$ — дикая группа.*

(4) $C_G(t) \leq M$.

Доказательство. (1) По лемме 8(1) в $G \setminus M$ существует инволюция a. Пусть M_1 — подгруппа из $\mathfrak{M}$, содержащая конечную подгруппу $\langle t, a\rangle$, и $D_1 = M \cap M_1$. Если $D_1 = M$, то $M \leq M_1$ вопреки предположению, что $M \in \mathfrak{M}$. Значит, $D_1 \neq M$. Аналогично $M_1 \neq D_1$. По лемме 1(2) $N_{M_1}(D_1) \neq D_1 \neq N_M(D_1)$. Поэтому $N_G(D_1) \not\leq M$, и по лемме 8(2) D_1 — конечная подгруппа. По лемме 9 $N_G(D_1)$ — черниковская подгруппа, тем самым найдется $M_2 \in \mathfrak{M}$, для которой $N_G(D_1) \leq M_2$.

Для группы $D_2 = M \cap M_2$ справедливо все, что было доказано выше про D_1. Кроме того, $D_2 \geq D_1$ и $D_2 \neq D_1$. Это дает возможность построить бесконечную строго возрастающую цепь подгрупп $D_1 < D_2 < D_3 < \dots$ с требуемыми условиями. В частности, M, а значит, все элементы $\mathfrak{M}$ — бесконечные группы.

(2) Предположим противное. Пусть $a \in A$, $a \notin D$. Если $|a| = 2^p$, то $a \in B = \{x \in A \mid x^{2^p} = 1\}$. Очевидно, что B — конечная характеристическая подгруппа M, не лежащая в D. Пусть $B_i = D_i \cap B$. Тогда $B_1 \leq B_2 \leq B_3 \leq \dots$. Поскольку B конечна, найдется i, для которого $B_i = B_{i+1}$. Так как $B \trianglelefteq M$, то $B_i \trianglelefteq D_i$. Кроме того, ввиду абелевости B имеем $B_i \trianglelefteq BD_i$. Положим $\overline{B} = B/B_i$, $\overline{D}_i = D_i/B_i$. Тогда $\overline{B} \triangleleft \overline{BD}_i$ и $\overline{B} \cap \overline{D}_i = 1$. Группа $\overline{BD}_i$ — конечная 2-группа. В силу нильпотентности $\overline{BD}_i$ подгруппа $\overline{B}$ содержит нетривиальный элемент $\bar{z}$ из центра $\overline{BD}_i$. Он не принадлежит $\overline{D}_i$, а его прообраз z не принадлежит B_i и нормализует D_i. По п. (1) $z \in D_{i+1} \cap B = B_{i+1} = B_i$. Полученное противоречие доказывает (2).

(3) Для каждого натурального i обозначим через A_i подгруппу $\{a \in A \mid a^{2^i} = 1\}$. По определению черниковской группы A_i конечна и характеристична в M. Кроме того, существует $m \geq 1$, для которого $A_0 \leq A_m$. Пусть $j = m + s_0$, где s_0 — число из леммы 10. По п. (2) $A_j \leq D_n = M \cap M_n$ для некоторого n.

Пусть R — полная часть M_n. Из выбора s_0 следует, что $A_0 \leq A_m \leq C_G(R)$. Очевидно, $t \in N_G(A_m)$ и $\langle A, R\rangle \leq N_G(A_i)$.

Если $N_G(A_m)$ — локально конечная группа, то по лемме 1(4) она черниковская, откуда вытекает, что R и A централизуют друг друга, и по лемме 8(2) следует, что $RA \leq M \cap M_n$, $R = A$, $M = M_n$. Это противоречит выбору M_n. Таким образом, $N_G(A_m)$ — дикая подгруппа. Поскольку A_m конечна, $C_G(A_m)$ также дикая подгруппа. Но тогда $C_G(A_0)$ тоже дикая группа.

(4) Предположим противное. Для подгрупп A_i из доказательства п. (3) положим $G_i = C_G(A_i)$, $C_i = C_{G_i}(t) = C_G(\langle A_i, t\rangle)$. Если для некоторого i подгруппа C_i конечна, то по лемме 5 G_i — локально конечная группа, что противоречит п. (3). Поэтому подгруппы C_i бесконечны для всех i и как подгруппы $C_G(t)$ черниковские. Пусть B_i — полная часть C_i и B — полная часть $C_G(t)$. Очевидно, что $B \geq B_1 \geq B_2 \geq \dots$, и эта убывающая цепь подгрупп полной абелевой 2-группы B конечного ранга стабилизируется на конечном номере, т. е. найдется натуральное число m, для которого $B_m = B_{m+1} = \dots$. Поскольку C_m бесконечна, B_m тоже бесконечна и централизует все A_i, т. е. централизует A. Таким образом, в $C_G(t)$ найдется квазициклическая подгруппа $Q \leq B_m$, централизующая A. Так как по лемме 8(2) $C_G(A) \leq M$, то $Q \leq M$ и по той же лемме 8(2) $B \leq C_G(Q) \leq M$. Далее, $C_G(t) \leq N_G(B) \leq M$ по лемме 8(2). Лемма доказана.

Закончим доказательство п. (1) теоремы 2. Пусть $M \in \mathfrak{M}$. По леммам 5 и 1(4) $C_G(t)$ — бесконечная группа, которая по лемме 11(4) содержится в M. По лемме 8(1) существует $M_1 \in \mathfrak{M}$, отличная от M, и $C_G(t) \leq M_1$. Так как полные части A и A_1 групп M и M_1 соответственно нормализуют полную часть B подгруппы $C_G(t)$, то $\langle A, A_1\rangle \leq N_G(B) \leq M \cap M_1$ по лемме 8(2). Отсюда вытекают равенство $A = A_1$ и затем равенство $M = M_1$ вопреки выбору M_1. Полученное противоречие доказывает п. (1) теоремы 2.

Докажем теперь п. (2) теоремы 2. Пусть G — 2-группа и A — ее конечная максимальная элементарная абелева подгруппа, порожденная элементами $a_1, \dots, a_r$. Предположим, что G не черниковская. По п. (1) теоремы $C_G(a_i)$ — дикая группа. Точно так же $C_G(\langle a_1, a_2\rangle)$ — дикая группа, и окончательно $C = C_G(A)$ — дикая группа. Не нарушая общности, можно считать, что $G = C$.

Лемма 12. *Если H — конечная подгруппа из G, то $N_G(H)$ — дикая группа.*

Доказательство проводится индукцией по $|H|$. Если $|H| = 2$ и t — порождающий элемент H, то $C_G(t) = N_G(H)$ — дикая группа, иначе по п. (1) теоремы G — черниковская группа; противоречие.

Пусть заключение леммы верно для групп порядка 2^n и $|H| = 2^{n+1}$. Если P — максимальная подгруппа в H, то по индукции $G_1 = N_G(P)$ — дикая группа и G_1/P — дикая группа. По п. (1) теоремы $N_{G_1/P}(H/P)$ — дикая группа, поэтому $N_{G_1}(H)$ — дикая группа, откуда $N_G(H)$ — дикая группа. Лемма доказана.

Продолжим доказательство п. (2) теоремы. По лемме 4 в G найдется конечная неабелева подгруппа H_1. По лемме 12 $C_G(H_1)$ — дикая группа. В ней снова найдется конечная неабелева подгруппа H_2, и по лемме 12 $C_G(H_1H_2)$ — дикая группа. Продолжая этот процесс, найдем бесконечно много взаимно коммутирующих неабелевых конечных подгрупп $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$. Пусть $L_n = AH_1 \cdots H_n$, $n = 1, 2, \dots$, и $L = \bigcup\limits_{n}^{\infty} L_n$. Тогда L — локально конечная группа и по лемме 1(4) она черниковская. Если $M_i = \langle H_i, H_{i+1}, \dots\rangle$ для некоторого i, то $M_i \geq M_{i+1}$ и $M_i \neq M_{i+1}$, поскольку иначе M_i централизует H_i, что противоречит некоммутативности H_i. Таким образом, $M_1 \geq M_2 \geq \dots$ — строго убывающая бесконечная цепь подгрупп из L, что противоречит лемме 1(4). Это противоречие заканчивает доказательство теоремы 2(2).

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 13. *Если S — конечная простая группа лиева типа лиева ранга не выше r над полем F нечетного порядка, то ранги ее абелевых 2-подгрупп ограничены некоторым числом, зависящим только от r.*

Доказательство. Группа S является подгруппой группы автоморфизмов некоторой алгебры Ли над полем F, размерность которой ограничена числом n, зависящим только от r [8]. Поэтому S вкладывается в $GL_n(F)$. Если A — абелева 2-подгруппа из $GL_n(F)$, то она вкладывается в группу D диагональных матриц группы $GL_n(L)$, где L — некоторое конечное расширение поля F. Так как D — прямое произведение n циклических групп, изоморфных мультипликативной группе L, ранг A не превосходит n. Лемма доказана.

Пусть G — периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{M}$, и m — максимум рангов абелевых подгрупп групп $M \in \mathfrak{M}$. По лемме 13 m — конечное число. Если A — элементарная абелева 2-подгруппа из произвольной 2-подгруппы T группы G, то $|A| \leq 2^m$. По теореме 2(2) G — черниковская группа. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–496.
2. *Попов А. М.* Об одном классе p-групп с (a, a)-условием конечности // Вопросы теории алгебраических систем. Караганда, 1981. С. 93–107.
3. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
4. *Черников С. Н.* Бесконечные специальные группы // Мат. сб. 1939. Т. 6. С. 199–214.
5. *Blackburn N.* Some remarks on Černikov p-groups // Ill. J. Math. 1962. V. 6, N 3. P. 421–433.
6. *Мерзляков Ю. И.* Матричное представление групп внешних автоморфизмов черниковских групп // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 4. С. 478–482.
7. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.
8. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley & Sons, 1972.

Статья поступила 11 июня 2016 г.

Li Baojun (Ли Бaоджун)
School of Applied Mathematics,
Chengdu University of Information Technology,
610225, Chengdu, P. R. China
libj0618@outlook.com

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com