Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 517.925+517.5

ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА — ДИРАКА И МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ В МОДЕЛЯХ ЦИКЛИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

В. В. Иванов

Аннотация. Изучается предельное поведение последовательностей циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые были изобретены для математического описания многостадийного синтеза. Главная конструкция, предложенная в работе, — это функция распределения начальных значений. Она позволила указать необходимые и достаточные условия существования, а также полностью описать устройство и все характерные свойства пределов решений тех интегро-дифференциальных уравнений «сверточного» типа, к которым без труда приводятся системы циклического синтеза. Все обсуждаемые в статье понятия, методы и задачи по природе своей относятся к таким классическим темам, как вещественная теория функций, эйлеровы интегралы и асимптотический анализ.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.608

Ключевые слова: многостадийный циклический синтез, колокольчики Дирака, неполная гамма-функция Эйлера, асимптотика Лапласа, суммы Абеля, функция распределения начальных условий, интеграл Стилтьеса, принцип выбора Хелли, двумерная ступенька Хевисайда, точки Лебега, неравенство Чебышева.

В работе изучается система обыкновенных дифференциальных уравнений, привлекающая внимание исследователей как простейшая из математических моделей многостадийного синтеза, которую мы называем *циклической.* Говоря точнее, нам здесь будет интересна целая последовательность таких систем:

$$\dot{x}_1 + \frac{n}{\tau}\,x_1 = g(t,\,y_n), \quad \dot{x}_k + \frac{n}{\tau}\,x_k = \frac{n}{\tau}\,x_{k-1}, \quad \dot{y}_n + \vartheta\,y_n = \frac{n}{\tau}\,x_n, \tag{1}$$

где $1 < k \le n$, если n больше единицы. Эти системы объединяют общие для них три «параметра»: положительное число τ, непрерывная на полуоси $t \ge 0$ вещественная функция $\vartheta = \vartheta(t)$ и функция $g(t,y)$, которая задана для всех $t \ge 0$ и $y \ge 0$. Пусть она непрерывна, ограничена и неотрицательна. Легко понять, что в этом случае для любых чисел $\mu_1^n, \dots, \mu_n^n, m_n \ge 0$ существуют определенные при всех $t \ge 0$ неотрицательные дифференцируемые функции $x_1(t), \dots, x_n(t), y_n(t)$, удовлетворяющие уравнениям системы и условиям

$$x_1(0) = \mu_1^n, \dots, x_n(0) = \mu_n^n, \quad y_n(0) = m_n. \tag{2}$$

Как много бы таких решений ни оказалось у этой задачи Коши, последнюю компоненту y_n любого из них мы называем *финальной* функцией, отвечающей заданным стартовым условиям циклического синтеза. Следует подчеркнуть, что не только здесь, но и всюду в дальнейшем эти условия неотрицательны.

Циклические системы обыкновенных дифференциальных уравнений, где неотрицательные переменные $x_1, \dots, x_n, y_n$, имеющие, как и в нашем случае, смысл массы или концентрации, преобразуются по «круговой» схеме

$$y_n \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{n-1} \to x_n \to y_n \dots, \tag{3}$$

уже десятки лет служат важным инструментом исследования биологических проблем [1]. Математикам же естественно-научные интерпретации этих систем зачастую подсказывают новые и порой неожиданные математические задачи. Модель циклического синтеза мы не сможем изучить без интеграла Стилтьеса или принципа выбора Хелли [2], без интегралов Эйлера или асимптотических методов Лапласа [3], а скрытая монотонность финальных функций, которой они обязаны исключительно неотрицательности масс, потребует от нас узнать нечто новое о последовательностях монотонных функций. Однако главное, что мы хотели бы понять в этой статье — это действие того механизма, благодаря которому финальные функции при неограниченном возрастании размерности системы синтеза не только не усложняются, как можно было бы ожидать, но в каком-то смысле даже упрощаются, а в пределе — при подходящем выборе начальных масс — и вовсе приводят к функциям, которые выражаются через эти массы явными интегральными формулами. Такие функции, которые мы называем здесь предельными режимами циклического синтеза, порождаются, например, нулевыми начальными условиями, как это показано в статье [4], но еще большее впечатление на автора произвела работа [5], где для целого ряда интересных классов начальных условий доказано существование предельного режима многостадийного циклического синтеза и описано его устройство.

Наши задачи здесь таковы: (1) описать все последовательности начальных условий, порождающие предельные режимы циклического синтеза; (2) понять, как по заданным условиям построить отвечающий им предельный режим, не «решая» никаких дифференциальных уравнений; (3) провести исчерпывающее качественное его исследование, чтобы узнать все его характерные черты. Мы подробно обсудим эти вопросы и наши ответы в первом, обзорном, параграфе работы, где сформулируем три теоремы, решающие три наши задачи.

§ 1. Предельная картина циклического синтеза

1.1. Начальные распределения. Говоря в терминах «типичных» для анализа категорий, первый из основных итогов нашего исследования можно выразить в очень краткой форме: из сходимости последовательности наборов начальных условий вытекает сходимость последовательности отвечающих им финальных функций, и обратно. Что такое *сходимость* — отдельный вопрос.

Для каждого номера n выберем финальную функцию y_n и предположим, что значения переменной t, для которых предел $y_*(t)$ последовательности $y_n(t)$ существует и конечен, всюду плотно заполняют неотрицательную полупрямую. Для финальных функций такая сходимость эквивалентна сходимости почти всюду, но еще интересней, что она равносильна сходимости «в среднем» на каждом отрезке временно́й полуоси. В каждой точке $t > 0$ функция y_* имеет конечный предел $y_*(t-0)$ слева, но для нас важнее функция $y(t) = y_*(t+0)$, заданная при всех $t \geq 0$. Если для тех же начальных условий, при которых были выбраны функции y_n, есть и другие финальные функции, они приведут нас к той же функции y. Мы назовем ее *предельным режимом* циклического синтеза, порожденным заданной последовательностью начальных условий.

Но как же нам сравнить элементы разных арифметических пространств? Набор начальных масс у системы с номером n имеет размерность $n+1$. Как понимать сходимость последовательности из этих «расширяющихся» наборов и что может быть ее пределом? Предлагаемый ниже подход к этим вопросам состоит в том, чтобы с каждым «начальным» набором, какой бы ни была его размерность, связать некоторую функцию на временной полуоси, чтобы далее уже забыть о наборах и говорить о сходимости последовательности функций. Ясно, что при этом функции должны легко строиться по начальным массам и содержать всю информацию о них, но главное — они должны иметь прямое отношение к делу. Чтобы «угадать» эти функции, нужно заранее знать ответ. Не имея здесь места для таких подробностей, мы просто все начальные массы m_n, μ_n^n, $\mu_{n-1}^n, \dots, \mu_2^n$, μ_1^n ровно в этом порядке разместим в точках

$$0 = \frac{0 \cdot \tau}{n},\ \frac{1 \cdot \tau}{n},\ \frac{2 \cdot \tau}{n}, \dots, \frac{(n-1) \cdot \tau}{n},\ \frac{n \cdot \tau}{n} = \tau \tag{4}$$

начального отрезка от нуля до τ и для каждого $t \geq 0$ посчитаем совокупную массу $F_n(t)$, оказавшуюся при этом в точках отрезка с концами 0 и t. Другими словами, если набору чисел $\mu_1^n, \dots, \mu_n^n, m_n$ сопоставить *суммы Абеля*

$$A_0^n = m_n,\ A_1^n = m_n + \mu_n^n, \dots, A_n^n = m_n + \mu_n^n + \dots + \mu_1^n, \tag{5}$$

мы получим возможность построить на всей полупрямой $t \geq 0$ очень простую ступенчатую функцию $F_n(t)$, полагая $F_n(t) = A_k^n$ для всех t из промежутка $k\tau/n \leq t < (k+1)\tau/n$, где $k = 0, \dots, n-1$, и $F_n(t) = A_n^n$ для любого $t \geq \tau$. Эту функцию мы будем называть *функцией распределения* заданного набора *начальных условий*, или, если совсем кратко, *начальным распределением*.

Пусть последовательность F_n сходится на всюду плотной части временной полуоси. Поскольку после τ каждая функция F_n постоянна, это равносильно двум условиям: во-первых, последовательность F_n сходится на всюду плотном подмножестве начального отрезка, а во-вторых, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\tau) = \lim_{n\to\infty} \bigl[\mu_1^n + \dots + \mu_n^n + m_n\bigr]. \tag{6}$$

При этом сходимость на отрезке от 0 до τ можно понимать и как сходимость почти всюду в обычном лебеговом смысле или же как сходимость в среднем, но в любом случае на неотрицательной полупрямой существует единственная неотрицательная неубывающая функция F, непрерывная справа и такая, что для всех точек $t > 0$, где она непрерывна и слева, последовательность $F_n(t)$ сходится к $F(t)$. Эту функцию F мы назовем *предельным распределением* той последовательности начальных условий, что участвует в ее построении.

Теорема 1. *Последовательность начальных условий в том и только том случае порождает предельный режим циклического синтеза, когда обладает предельным распределением. Уже одним лишь этим распределением и уж тем более начальными условиями предельный режим определяется однозначно.*

Эта теорема ясно показывает, сколь важно для всей нашей темы понятие распределения «начальных масс». Она дает элементарный, конструктивный и эффективный способ узнать, имеет система предельный режим при заданных начальных условиях или нет, предлагая нам очень простой алгоритм наших действий, единообразный во всех конкретных случаях. Теперь мы поймем, как по известному предельному распределению построить предельный режим.

1.2. Формулы синтеза. Пусть $\Theta(t)$ означает первообразную функции $\vartheta(t)$, равную нулю при $t = 0$. Все дальнейшие наши формулы и аргументы станут особенно компактными и прозрачными, если с предельным режимом y циклического синтеза связать *приведенный* предельный режим Y, полагая

$$Y(t) = e^{\Theta(t)} y(t), \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Теорема 2. *Приведенный предельный режим Y, отвечающий предельному распределению F, на отрезке $0 \leq t \leq \tau$ выражается интегралом Стилтьеса:*

$$Y(t) = F(0) + \int\limits_0^t e^{\Theta(s)}\, dF(s). \tag{8}$$

На оставшейся полупрямой $t > \tau$ он считается по рекуррентной формуле

$$Y(t) = Y(\tau) + \int\limits_\tau^t e^{\Theta(s)} g(s-\tau,\, y(s-\tau))\, ds, \tag{9}$$

где интеграл справа можно понимать в классическом смысле Римана.

Мы видим, что предельный режим при заданных начальных условиях на начальном этапе не зависит от функции g и точно такой же, как и в *линейной* версии модели, где $g \equiv 0$. В этом случае «приведенная» масса $Y(t)$ к моменту τ достигает своего максимального значения $M = Y(\tau)$ и дальше не изменяется, а «истинная» масса $y(t)$ при $t \geq \tau$ подобна знакомой нам «экспоненте»:

$$y(t) = M e^{-\Theta(t)}, \tag{10}$$

На это указывает формула (9). Она способна произвести впечатление слегка необычного уравнения, но на самом деле — это конструктивное *итерационное правило*, позволяющее нам шагами длины τ исчерпать всю временную полуось и построить на ней предельный режим, как только мы знаем его на начальном отрезке, но там он считается так, как будто речь идет о линейном синтезе.

Например, если начальные массы при каждом n нулевые, так что процесс, можно сказать, начинается «из ничего», то все функции F_n равны нулю и уж точно имеют предел $F \equiv 0$. Таким образом, при нулевых начальных условиях *каждая* система циклического синтеза непременно «выходит» на предельный режим. Этот впечатляющий результат Г. В. Демиденко [4] послужил стимулом и ориентиром для последующих математических исследований многомерных систем «биохимического» происхождения. Мы только разрешили параметру ϑ быть переменным и не стали требовать от функции g ничего, что обеспечивало бы единственность решения задачи Коши для конечномерных систем синтеза. Согласно формуле (8) на начальном отрезке $0 \leq t \leq \tau$ предельный режим $y(t)$ равен нулю. На следующем участке $\tau \leq t \leq 2\tau$ он вычисляется по формуле

$$e^{\Theta(t)} y(t) = \int\limits_\tau^t e^{\Theta(s)}\, g(s-\tau,\, 0)\, ds, \tag{11}$$

но и дальше его развитие определяется итерационными правилом (9), и это полностью согласуется с формулами из [4], когда ϑ не зависит от времени.

1.3. Предельные режимы. Нам остается узнать полный список свойств тех функций на неотрицательной полупрямой, которые служат предельными режимами систем многостадийного циклического синтеза. Ясно, что для этого достаточно описать все характерные свойства «приведенных» режимов.

Теорема 3. *Каждый приведенный предельный режим многостадийного циклического синтеза представляет собой заданную на всей неотрицательной полупрямой непрерывную справа неотрицательную неубывающую функцию, которая подчиняется итерационному правилу. Любая функция, обладающая перечисленными свойствами, служит приведенным предельным режимом.*

Таким образом, на отрезке $0 \le t \le \tau$ роль $Y(t)$ может исполнять *любая* неотрицательная неубывающая функция, непрерывная справа при $0 \le t < \tau$. Но дальше никакой свободы для нас уже нет — подчиняясь формуле (9), мы однозначно достраиваем функцию $Y(t)$ на полуоси $t > \tau$, замечая, что всюду на ней эта функция непрерывна, а это значит, что и предельный режим y может иметь разрывы лишь в точках t промежутка $0 < t \le \tau$. Как и у монотонной функции Y, число этих разрывов не более чем счетно. Очевидно, что в каждой такой точке существует предел $y(t-0)$, строго меньший $y(t+0) = y(t)$. Если учесть еще формулу (8), мы сможем посчитать величину этого скачка:

$$y(t) - y(t-0) = F(t) - F(t-0), \tag{12}$$

так что если уж где-то на промежутке $0 < t \le \tau$ функция y позволяет себе мгновенные скачки, то лишь одновременно с F и при этом той же величины, а значит, ни g, ни даже ϑ не влияют на время и на высоту этих прыжков. Мы увидим, что в каждой точке $t > 0$, где функция F непрерывна, значения $y_n(t)$ финальных функций y_n, приводящих к функции y, сходятся к $y(t)$, так что на самом деле y получается из функции y_* почти незаметной ее модификацией, затрагивающей лишь очень «небольшое» число точек начального отрезка.

Как показывает итерационная формула (9), в точке $t > \tau$ функция y не только непрерывна, но даже дифференцируема, если она «была» непрерывна в точке $t - \tau$, причем, ее производную в точке t можно найти из формулы

$$\dot{y}(t) + \vartheta(t)y(t) = g(t-\tau, y(t-\tau)). \tag{13}$$

Например, при нулевых начальных условиях, как отмечено в работе [4], это относится ко всем точкам $t > \tau$. Так будет во всех случаях, когда предельное распределение начальных условий совсем не имеет разрывов. Если же их нет после момента $\tau_* \ge 0$, формула верна для всех $t > \tau_* + \tau$, но и при $t = \tau_* + \tau$ мы сохраним ее, если точку над y будем понимать как производную справа.

Однако в любом случае эта формула действует на полуоси $t > 2\tau$, так что для предельного режима циклического синтеза характерны *три особых этапа* его развития: до момента τ он вправе совершить конечное или счетное число скачков, затем идет «переходный» этап, занимающий временной отрезок от τ до 2τ, где уже нет разрывов, хотя еще не так все «гладко», но после 2τ и уже до самого «конца» бесконечной полуоси процесс протекает спокойно и плавно в том смысле, что описывается непрерывно дифференцируемой функцией.

Итак, мы узнали, когда существует предельный режим, как он устроен и какими свойствами обладает. Завершая на этом наш обзор, далее фактически мы начнем с «чистого листа» и почти всю оставшуюся часть работы посвятим доказательству трех сформулированных здесь теорем, которые описывают нам полную предельную картину многостадийного циклического синтеза. Прежде всего мы сведем все наши задачи к изучению самой простой модели синтеза, узнаем про нее все и лишь после этого докажем три наши теоремы. В конце работы мы обсудим примеры, послужившие источником этого исследования.

§ 2. Переход к линейной модели

2.1. Уравнение синтеза. Едва присмотревшись к системе циклического синтеза, мы замечаем, что в действительности нет у нас никакой *многомерной системы*, но для каждого номера n есть ровно *одно уравнение* для финальной функции y_n. В самом деле, первые n уравнений (1), если мы примем первые n начальных условий (2), позволят нам однозначно выразить x_n через y_n. Если это выражение применить в последнем уравнении системы, у нас получится какое-то интегро-дифференциальное уравнение для функции y_n. Пусть

$$\delta_n^k(t) := \frac{(n/\tau)^k}{(k-1)!}\, e^{-nt/\tau} t^{k-1}, \tag{14}$$

где $t \geq 0$ и $k = 1, \ldots, n$. Каждая функция δ_n^k участвует в дальнейших наших конструкциях, но из них особо выделяются функции $\delta_n := \delta_n^n$, составляющие замечательную дельта-образную последовательность с «центром» в точке τ.

Лемма 1. *Любая финальная функция y_n системы* (1), *отвечающая набору условий* (2), *служит решением «интегро-дифференциальной» задачи Коши*

$$\dot{y}_n + \vartheta y_n = f_n + \delta_n * g_n, \quad y_n(0) = m_n, \tag{15}$$

где «звездочка» означает свертку двух функций на неотрицательной полуоси, а функции f_n и g_n для всех значений $t \geq 0$ определяются равенствами

$$f_n(t) := \sum_{k=1}^{n} \mu_{n+1-k}^n \delta_n^k(t), \quad g_n(t) := g(t,\, y_n(t)). \tag{16}$$

Каждое решение задачи (15), *определенное на всей временной полуоси, служит финальной функцией системы* (1), *отвечающей начальным условиям* (2).

Разумеется, здесь надо немного посчитать, но вряд ли стоит заниматься этим в тексте. Теперь мы забудем о больших системах синтеза, которые уже сыграли свою роль, и сосредоточимся на изучении решений уравнения (15). Каждое такое решение y_n разложим в сумму двух важнейших его частей:

$$y_n = z_n + \Delta_n, \tag{17}$$

где первое слагаемое z_n, которое мы будем считать *однородной составляющей* функции y_n, служит единственным решением «линейной» задачи Коши

$$\dot{z}_n + \vartheta z_n = f_n, \quad z_n(0) = m_n, \tag{18}$$

а разность Δ_n между y_n и z_n, которую назовем *остаточной частью* y_n, можно явно выразить через y_n, не вычисляя z_n, поскольку

$$\dot{\Delta}_n + \vartheta \Delta_n = \delta_n * g_n, \quad \Delta_n(0) = 0. \tag{19}$$

Только что возникшие две новые задачи Коши имеют много общего, но они очень разные — в уравнении (18) при $n \to \infty$ все интересное происходит фактически на начальном отрезке от нуля до τ, но главные события, которые описывает уравнение (19), напротив, развиваются уже после момента τ. Чтобы побыстрее разобраться со вторым из наших уравнений и «освободить» синтез от нелинейного влияния, нам нужна небольшая подготовительная работа.

2.2. Колокольчики Дирака. Так мы называем функции δ_n, играющие исключительно важную роль в нашем дальнейшем исследовании. При $n = 1$ это всего лишь половинка от экспоненты, имеющая пик $1/\tau$ при $t = 0$, но для всех $n > 1$ графики этих функций — настоящие «колокольчики» с вершинами над точками $t = \tau - \tau/n$, ограничивающие под собой единичную площадь. Нет сомнения в том, что последовательность $\delta_n(t)$ равномерно стремится к нулю на каждом отрезке $0 \le t \le \tau'$, где $0 < \tau' < \tau$, и любой полупрямой $t \ge \tau''$, где $\tau'' > \tau$. При этом интегралы функций $\delta_n(t)$ по отрезку $\tau' \le t \le \tau''$ стремятся к единице, что так же очевидно и можно элементарно доказать за несколько строк, но мы представим эти интегралы в виде произведения K_n и I_n, где

$$K_n = \frac{(n/\tau)^n}{(n-1)!}, \quad I_n = \int\limits_{\tau'}^{\tau''} e^{-nt/\tau} t^{n-1}\, dt, \tag{20}$$

и заметим, вспоминая формулу Стирлинга и метод Лапласа [3], что

$$K_n \sim \sqrt{n/2\pi}(e/\tau)^n, \quad I_n \sim \sqrt{2\pi/n}(\tau/e)^n, \tag{21}$$

а значит, $K_n I_n \to 1$ при $n \to \infty$. Иными словами, функции δ_n действительно образуют последовательность Дирака, и следующая лемма уже доказана.

Лемма 2. *Если функция $\varphi(t)$ непрерывна при $a \le t \le b$, где $0 \le a < b$, то*

$$\lim_n \int\limits_a^b \delta_n(t)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(\tau), \tag{22}$$

когда $a < \tau < b$, но этот предел уже равен нулю, если $\tau < a$ или же $\tau > b$.

Эта лемма позволит нам изучить остаточные части финальных функций, но уже сейчас, учитывая, что свертка с дельта-функций с центром в точке τ приводит к сдвигу на τ, и обращаясь к уравнению синтеза, можно предвидеть все, что будет сказано далее о возможности редукции общей модели синтеза к ее линейному варианту, как и характерном для циклического синтеза эффекте «запаздывания». Но проще все это строго доказать чем объяснять, почему все это очевидно. Прежде всего для каждого n построим функцию

$$E_n(t, s) = \int\limits_0^{t-s} \delta_n(\sigma) e^{\Theta(\sigma+s)}\, d\sigma \tag{23}$$

на «треугольнике» $0 \le s \le t$ и заметим, что остаточную часть Δ_n финальной функции y_n для всех $t \ge 0$ можно выразить через y_n явной формулой

$$e^{\Theta(t)} \Delta_n(t) = \int\limits_0^t E_n(t, s)\, g_n(s)\, ds. \tag{24}$$

Чтобы прийти к этой формуле, надо просто решить линейную относительно Δ_n задачу Коши (19), представив ее решение повторным интегралом, и затем немного преобразовать этот интеграл. Впрочем, когда формула уже указана, читателю вполне достаточно проверить ее прямым дифференцированием.

Лемма 3. *При $n \to \infty$ последовательность интегралов $E_n(t,s)$ стремится к нулю, когда $t - s < \tau$, однако если $t - s > \tau$, ее пределом уже служит $e^{\Theta(\tau+s)}$. Если $0 \le t \le \tau$, последовательность $\Delta_n(t)$ стремится к нулю, но если $t > \tau$, то*

$$\lim_n \int\limits_{t-\tau}^{t} E_n(t,s)\, g_n(s)\, ds = 0. \tag{25}$$

Доказательство. Первое предложение леммы благодаря непрерывности Θ представляет собой частный случай утверждения леммы 2. Для предельного перехода в интеграле (24) нам будет очень кстати совокупная ограниченность функций g_n. Ее вполне достаточно, чтобы сослаться на Лебега, вспомнив его «мажоранты» и одноименную теорему. Мы так и поступим в следующем нашем рассуждении. А именно, если $0 < s \le t \le \tau$, то $t - s < \tau$, а значит, интегралы $E_n(t,s)$ стремятся к нулю. Ясно, что все они в совокупности ограничены, так что вместе с ними стремятся к нулю и интегралы (24). По тем же причинам исчезают интегралы (25), поскольку внутри у них $t - s < \tau$. Лемма доказана.

2.3. Первая редукция. Для линейной модели синтеза, разумеется, нет проблемы «существования» или «единственности», как нет и никакой проблемы найти ее финальные функции в явной форме. Тем более отрадно, что все наши задачи циклического синтеза естественно приводятся к их линейной версии.

Лемма 4. *Последовательность финальных функций y_n сходится почти всюду на неотрицательной полупрямой тогда и только тогда, когда в том же смысле сходится последовательность z_n их «однородных» составляющих. При этом в каждой точке $t \ge 0$, где сходится одна из последовательностей $y_n(t)$ и $z_n(t)$, сходится и другая, а их пределы $y_*(t)$ и $z_*(t)$ связаны равенством*

$$y_*(t) = z_*(t) + \Delta(t), \tag{26}$$

где функция Δ определена уже в прямом смысле всюду на полупрямой $t \ge 0$, равна нулю на отрезке $0 \le t \le \tau$, но при $t > \tau$ вычисляется по формуле

$$e^{\Theta(t)}\Delta(t) = \int\limits_{0}^{t-\tau} e^{\Theta(\tau+s)} g(s, y_*(s))\, ds. \tag{27}$$

В частности, функция y_* — подобно функции z_* — однозначно определяется начальными условиями, даже если это не так для финальных функций.

Доказательство. Предположим сначала, что функции y_n почти всюду на неотрицательной полупрямой сходятся к некоторой функции y_*. Как мы уже видим, помня аргументы, связанные с Лебегом, совокупной ограниченностью участвующих в наших построениях функций и «конечностью» промежутков интегрирования, нам позволен «предельный переход» в интеграле (24). Этот «переход», как показывает лемма 3, приводит нас к замечательному выводу: функции Δ_n *всюду* на временной полуоси сходятся к той функции Δ, которая указана в лемме — надо только вспомнить о непрерывности g и заметить, что благодаря этому обстоятельству последовательность $g_n(s) = g(s, y_n(s))$ почти для всех $s \ge 0$ сходится к $g(s, y_*(s))$. Но тогда уже и разности $z_n = y_n - \Delta_n$ сходятся к разности $z_* = y_* - \Delta$ ровно в тех же точках, где y_n сходятся к y_*. Это была половина леммы, но для нас интересней обратное утверждение.

Пусть функции z_n почти всюду сходятся к какой-то функции z_*. Заметим, что тогда и функции $y_n = z_n + \Delta_n$ почти всюду на начальном отрезке тоже сходятся к z_*, поскольку в произвольной его точке согласно лемме 3 остаточные функции Δ_n стремятся к нулю. А теперь предположим, что для некоторого номера k функции $\Delta_n(t)$ сходятся на отрезке $0 \le t \le k\tau$, хорошо помня, что при $k = 1$ это уже не предположение. Тогда почти всюду на том же отрезке сходятся и функции $y_n = z_n + \Delta_n$. Пусть $k\,\tau < t \le (k+1)\tau$. В таком случае

$$e^{\Theta(t)}\Delta_n(t) = \int\limits_0^{t-\tau} E_n(t,s)\, g(s, y_n(s))\, ds \; + \int\limits_{t-\tau}^{t} E_n(t,s) g_n(s)\, ds. \tag{28}$$

В силу леммы 3 второй из этих интегралов с ростом n исчезает. В первом же интеграле $0 \le s \le t - \tau \le k\tau$, так что последовательность $y_n(s)$ сходится для почти всех этих s. Последовательность $E_n(t,s)$ сходится еще лучше. Все это значит, что первые интегралы тоже имеют конечный предел при $n \to \infty$. Итак, из сходимости z_n почти всюду вытекает сходимость Δ_n всюду, но тогда и сходимость y_n там, где сходится последовательность z_n. Лемма доказана.

Эта лемма, во-первых, показывает нам, что «нелинейная часть» системы никак не влияет на условия существования предельного режима, а во-вторых, позволяет нам шаг за шагом построить его в самом общем случае, если для заданных условий мы знаем предельный режим линейных систем, где $g = 0$. Теперь мы еще и параметр ϑ отделим от основного русла нашей задачи.

2.4. Вторая редукция. Линейную модель синтеза мы назовем *свободной*, если функция ϑ всюду равна нулю. Финальные функции U_n этой модели для принятых нами начальных значений определяются двумя условиями:

$$\dot U_n = f_n, \quad U_n(0) = m_n. \tag{29}$$

Сравнивая уравнения линейного и свободного синтеза, мы видим, что

$$\dot U_n = \dot z_n + \vartheta z_n, \quad U_n(0) = z_n(0). \tag{30}$$

Чтобы «конструктивно» описать эту связь между функциями z_n и U_n, удобно от функции z_n перейти к отвечающей ей *приведенной* функции Z_n, полагая

$$Z_n(t) := e^{\Theta(t)} z_n(t), \quad t \ge 0. \tag{31}$$

Обе функции Z_n и U_n при $t = 0$ равны m_n. Поэтому очевидные формулы

$$\dot Z_n(t) = e^{\Theta(t)}\dot U_n(t), \quad \dot U_n(t) = e^{-\Theta(t)}\dot Z_n(t), \tag{32}$$

эквивалентные между собой, вполне можно записать в интегральной форме.

Лемма 5. *Функции Z_n и U_n могут быть выражены одна через другую на всей полуоси $t \ge 0$ двумя взаимно обратными интегральными формулами:*

$$Z_n(t) = m_n + \int\limits_0^t e^{\Theta(s)}\, dU_n(s), \quad U_n(t) = m_n + \int\limits_0^t e^{-\Theta(s)}\, dZ_n(s). \tag{33}$$

Здесь нет повода беспокоиться о существовании интегралов, но далее нам важно, что функции U_n и Z_n неубывающие, о чем говорят их производные.

Лемма 6. *Последовательность функций Z_n в том и только том случае сходится почти всюду на неотрицательной полуоси, когда в таком же смысле сходится последовательность U_n финальных функций свободного синтеза. При этом в любой точке $t \geq 0$, где сходится одна из последовательностей $Z_n(t)$ и $U_n(t)$, сходится и другая, а их пределы $Z_*(t)$ и $U_*(t)$ связаны формулой*

$$Z_*(t) = e^{\Theta(t)} U_*(t) - \int\limits_0^t e^{\Theta(s)}\, U_*(s)\, \vartheta(s)\, ds, \tag{34}$$

хотя в точности эту же самую связь можно выразить равенством

$$U_*(t) = e^{-\Theta(t)} Z_*(t) + \int\limits_0^t e^{-\Theta(s)} Z_*(s) \vartheta(s)\, ds, \tag{35}$$

где интегралы формально считаются по Лебегу, но по сути — по Риману.

Доказательство. Если в последних двух формулах звездочки заменить нижним индексом n, мы получим формулы, непосредственно вытекающие из равенств (33). Особенность обсуждаемой нами задачи заключается в том, что заданные на всей неотрицательной полуоси неотрицательные функции U_n и Z_n неубывающие, а значит, если какая-то из этих последовательностей сходится почти всюду на упомянутой полуоси, то на каждом отрезке этой полуоси она равномерно ограничена. Это гарантирует нам право на предельный переход и указанные в лемме равенства, а монотонность предельных функций U_* и Z_* позволяет нам от Лебега перейти к Риману, так что лемма доказана.

Уже сейчас, опираясь на леммы 4 и 6, мы приходим к одному из главных наших выводов о циклическом синтезе: класс последовательностей начальных условий, порождающих предельные режимы, *для всех моделей* циклического синтеза один и тот же — он точно такой же, как и для *канонической* модели

$$\dot{x}_1 + n x_1 = 0, \quad \dot{x}_k + n x_k = n x_{k-1}, \quad \dot{y}_n = n x_n, \tag{36}$$

где k и n те же, что и в (1). Более того, какие бы условия из этого класса мы ни выбрали, у всех отвечающих им последовательностей финальных функций множества поточечной их сходимости при заданном τ одинаковы и не зависят от ϑ и g, а при разных τ получаются одно из другого простой гомотетией.

2.5. Скрытая монотонность синтеза. Только что упомянутые нами две «леммы о редукции» мы понимали как утверждения о предельных режимах, хотя речь там шла о сходимости почти всюду, а наше исходное предположение о последовательности финальных функций, порождающей предельный режим, состояло в том, что она сходится всего лишь на всюду плотном подмножестве временной полуоси. Как мы сейчас увидим, здесь нет противоречия. Причиной тому служит «скрытая» монотонность финальных функций. Чтобы это было понятно, для каждой финальной функции y_n мы определим соответствующую ей приведенную финальную функцию Y_n, как и в линейном случае, полагая

$$Y_n(t) := e^{\Theta(t)} y_n(t), \quad t \geq 0. \tag{37}$$

Как показывает уравнение (15), производная этой функция неотрицательна, и мы теперь ясно видим, что монотонные функции неизбежно возникают как верные спутники циклического синтеза благодаря неотрицательности масс.

Пусть поточечный предел y_* последовательности финальных функций y_n существует и конечен на всюду плотном подмножестве временной полуоси. На том же множестве сходится и последовательность Y_n приведенных финальных функций. Ее предел Y_* представляет собой монотонную функцию, а значит, в каждой точке $t > 0$, возможно, кроме конечного или же счетного их числа, пределы Y_* слева и справа одинаковы. Крайне важно понять, хотя это почти очевидно, что в каждой такой точке t предел функции Y_* служит и пределом последовательности $Y_n(t)$. Но тогда и последовательность $y_n(t)$ сходится.

Другими словами, из предположения о сходимости последовательности y_n на сколь-нибудь «представительном» подмножестве неотрицательной полуоси вытекает, что она сходится не только *почти всюду* в обычном смысле Лебега, но даже *всюду* за возможным исключением не более чем счетного числа точек, а появляющаяся при этом «поточечно-предельная» функция y_* наследует все свойства монотонной функции Y_*, не считая, быть может, ее монотонности, отличаясь от этой функции всего лишь «экспоненциальным» множителем:

$$y_*(t) = e^{-\Theta(t)} Y_*(t). \tag{38}$$

Например, в каждой точке $t \geq 0$ функция y_* имеет конечный предел $y_*(t+0)$ справа, а если $t > 0$, существует левосторонний предел $y_*(t-0)$. Случается, хотя и редко, что эти два предела различны, но тогда предел справа, как мы теперь видим, строго больше предела слева. Аналогично, если функция $y_*(t)$ оказалась определена при $t = 0$, ее значение $y_*(0)$ не превосходит $y_*(+0)$, но может быть и меньше. Очень важно, что все эти «скачки масс» мы учитываем при построении предельного режима, который по этой причине и становится функцией, заданной всюду на временной полуоси и непрерывной справа. Если так же поступить с функцией Y_* и знакомыми нам функциями Z_* и U_*, мы придем к неотрицательным неубывающим и непрерывным справа функциям

$$Y(t) = Y_*(t+0), \quad Z(t) = Z_*(t+0), \quad U(t) = U_*(t+0). \tag{39}$$

Ясно, что это — приведенные предельные режимы циклического, линейного и свободного синтеза. Благодаря именно полноте этих функций математическое описание «предельной картины» многостадийного синтеза обретает особенную краткость и простоту. Например, лемма 4, если «освободить» ее от звездочек предельным переходом по времени, примет заметно более компактный вид.

Теорема 4. *Последовательность начальных условий в том и только том случае порождает предельный режим циклического синтеза, когда существует отвечающий этим условиям предельный режим линейного синтеза. При этом приведенные предельные режимы Y и Z циклического и линейного синтеза, построенные по одинаковым начальным условиям, связаны формулой*

$$Y(t) = Z(t) + \int\limits_{\tau}^{t} e^{\Theta(s)}\, g(s-\tau,\, y(s-\tau))\, ds \tag{40}$$

при $t > \tau$ и равны между собой на начальном отрезке временной полуоси.

Конечно, часть информации здесь утрачена, так что теорему 4 правильно считать следствием леммы 4, но не наоборот. То же касается и леммы 6, где удручающе-громоздкие интегралы примут привлекательную форму, если мы прежде «сотрем» в них все звездочки, а затем посчитаем их «по частям».

Теорема 5. *Последовательность начальных условий в том и только том случае порождает предельный режим линейного синтеза, если она порождает предельный режим свободного синтеза. При этом отвечающие одним и тем же условиям приведенный предельный режим Z линейного синтеза и предельный режим U свободной модели связаны двумя эквивалентными формулами*

$$Z(t) = U(0) + \int\limits_0^t e^{\Theta(s)}\,dU(s), \quad U(t) = Z(0) + \int\limits_0^t e^{-\Theta(s)}\,dZ(s), \tag{41}$$

где интегралы понимаются в обычном классическом смысле Стилтьеса.

Заметим, что формулы (41) мы не могли получить прямым предельным переходом из аналогичных «допредельных» формул (33), и не только потому, что здесь не помог бы Хелли [2], которому нужна сходимость *всюду*. Важнее другое: существование предельного режима *никак не связано* со сходимостью масс m_n, и значения $Z(0) = U(0)$ в (41) не обязаны служить их пределом.

§ 3. Свободный многостадийный синтез

3.1. От сумм Абеля к интегралам Стилтьеса. Теперь нам осталось изучить финальные функции U_n самой простой модели синтеза, свободной от «нелинейностей и неавтономностей». Как показывают формулы (29) и первая из формул (16), на полупрямой $t \geq 0$ нам имеет смысл построить функции

$$I_n^k(t) = \int\limits_0^t \delta_n^k(\sigma)\,d\sigma = \frac{(n/\tau)^k}{(k-1)!}\int\limits_0^t e^{-n\sigma/\tau}\sigma^{k-1}\,d\sigma, \tag{42}$$

где $k = 1, \ldots, n$. Разумеется, здесь нет проблемы посчитать в явной форме все эти элементарные интегралы, но если пойти этим путем, мы обречем себя на безжалостно-скрупулезный анализ «длинных» сумм с неудержимо растущим числом слагаемых. Мы не станем этого делать, но просто заметим, что

$$U_n = m_n + \sum_{k=1}^n \mu_{n+1-k}^n I_n^k. \tag{43}$$

Здесь мы уже вплотную подошли к еще одному из наиболее важных для нас «радикальных поворотов» в нашем сочинении о циклическом синтезе — мы должны в этой сумме усмотреть самый настоящий… интеграл Стилтьеса.

Чтобы увидеть его, нам нужно вспомнить о функции распределения F_n начальных условий $\mu_1^n, \ldots, \mu_n^n, m_n$ и слегка «приподняться» над интегралами и факториалами, принявшими участие в построении финальной функции U_n, заменив $(k-1)!$ на $\Gamma(k)$ и, вслед за этим, k на ns/τ. Точнее говоря, пусть

$$H_n(t,s) = \frac{(n/\tau)^\nu}{\Gamma(\nu)}\int\limits_0^t e^{-n\sigma/\tau}\sigma^{\nu-1}\,d\sigma, \quad \nu = ns/\tau, \tag{44}$$

где $t \geq 0$ и пока $s > 0$. Если $t > 0$, то при $s \to +0$ эти интегралы, как легко понять, стремятся к единице, и нам разумно согласиться, что $H_n(t,0) := 1$, но чтобы функции $H_n(t,s)$ и при $t = 0$ были определены и непрерывны по s не только при $s > 0$, но и при $s = 0$, договоримся считать, что $H_n(0,0) := 0$.

Лемма 7. *Финальная функция U_n свободного синтеза выражается через распределение F_n породивших ее начальных условий интегралом Стилтьеса:*

$$U_n(t) = m_n + \int\limits_0^\tau H_n(t,s)\,dF_n(s). \tag{45}$$

Доказательство. При $s = k\,\tau/n$, когда $F_n(s)$ совершает скачки μ_{n+1-k}, интегралы $H_n(t,s)$, где $\nu = k$, при всех $t \geq 0$ равны $I_n^k(t)$. Лемма доказана.

Функции $H_n(t,s)$ мы называем *интегралами Эйлера — Дирака*, тем самым подчеркивая, что здесь «нормированная» неполная гамма-функция вычисляет переменную площадь под знакомыми нам «колокольчиками». Обозначение H для них отражает то почти очевидное обстоятельство, что интегралы $H_n(t,s)$ с ростом n все более напоминают нам «двумерную ступеньку» Хевисайда.

3.2. Интегралы Эйлера — Дирака. Интересно, что именно проблемы циклического синтеза приводят нас к *отношению* классических интегралов:

$$H(t,s) := \frac{\Gamma(t,s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^t e^{-\sigma}\sigma^{s-1}\,d\sigma, \tag{46}$$

где $t \geq 0$, но пока $s > 0$. При постоянном s и возрастающей переменной t эта дробь растет, принимая значение 0 при $t = 0$ и стремясь к 1 при $t \to \infty$. Как легко понять, для нас ее зависимость от переменной s заметно интересней.

Лемма 8. *Если закрепить переменную $t > 0$, то окажется, что*

$$\lim_{s\to+0} H(t,s) = 1, \quad \lim_{s\to\infty} H(t,s) = 0. \tag{47}$$

При этом функция $H(t,s)$ строго убывает при возрастании переменной s.

Доказательство. Если неполный интеграл Эйлера мы «посчитаем» по частям, то сразу же согласимся, что первое из этих соотношений очевидно:

$$\Gamma(s+1)\cdot H(t,s) = e^{-t}t^s + \int\limits_0^t e^{-\sigma}\sigma^s\,d\sigma. \tag{48}$$

Второе же соотношение вовсе не нуждается в комментариях. Наконец, чтобы убедиться в монотонности функции $H(t,s)$ по s, имеет смысл заметить, что

$$\Gamma^2(t,s)\cdot[\ln\Gamma(t,s)]''_{st} = e^{-t}t^{s-1}\int\limits_0^t e^{-\sigma}\sigma^{s-1}[\ln t - \ln\sigma]\,d\sigma. \tag{49}$$

Здесь правая часть явно больше нуля. Это значит, что при каждом значении переменной s логарифмическая производная $\Gamma(t,s)$ по s представляет собой строго возрастающую функцию переменной t. Таким образом, разность

$$[\ln H(t,s)]'_s = [\ln\Gamma(t,s)]'_s - [\ln\Gamma(s)]'_s \tag{50}$$

и вместе с нею производная $H(t,s)$ по s меньше нуля. Лемма доказана.

Как видим, естественно считать, что $H(t,0) := 1$, когда $t > 0$. Если же мы еще договоримся, что $H(0,0) := 0$, то сможем выразить все интегралы H_n через функцию H для любых неотрицательных t и s единой формулой:

$$H_n(t,s) := H(nt/\tau, ns/\tau). \tag{51}$$

Лемма 9. *Последовательность $H_n(t,s)$ при $n \to \infty$ стремится к 1, если $0 \le s < t$, причем, сходимость эта равномерна на любом отрезке $0 \le s \le s'$, где $0 < s' < t$, однако в случае $s > t \ge 0$, последовательность $H_n(t,s)$ стремится уже к нулю, причем, равномерно на каждой полупрямой $s \ge s''$, где $s'' > t$.*

Доказательство. Несмотря на ту «поспешность», с которой мы изучили колокольчики Дирака, все, что нам теперь требуется для вычисления предела последовательности $H_n(t,s)$, уже было сказано. Однако подчеркнем, что

$$H_n(t,s) = \int_0^t \delta_n^\nu(\sigma)\, d\sigma, \tag{52}$$

где функции δ_n^ν вычисляются по той же формуле (14), что и прежние δ_n^k, если там $(k-1)!$ понимать как $\Gamma(k)$ и k заменить на $\nu = ns/\tau$. Если $s > 0$, то при $n > \tau/s$ эти функции будут все теми же «настоящими» колокольчиками, но их вершины уже окажутся «над» точками $\sigma = s - \tau/n$. Если $0 < t' < s < t''$, то $H_n(t',s)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$, что ясно безо всяких аргументов, а чтобы убедиться, что $H_n(t'',s)$ стремятся к единице, уже достаточно то же самое доказать для разности интегралов $H_n(t'',s)$ и $H_n(t',s)$. Полагая

$$\varphi(\sigma) = e^{-\sigma/s}, \quad \lambda = \nu - 1, \quad L(\sigma) = \ln\sigma - \sigma/s, \tag{53}$$

мы разложим эту разность в произведение легко обозримого коэффициента и замечательного интеграла, записав его в канонической «лапласовой» форме:

$$H_n(t'',s) - H_n(t',s) = \frac{(n/\tau)^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_{t'}^{t''} \varphi(\sigma)\, e^{\lambda L(\sigma)}\, d\sigma. \tag{54}$$

Здесь мы видим непрерывную функцию $\varphi(\sigma)$, параметр λ, который с ростом n стремится к бесконечности, и «унимодальную» функцию $L(\sigma)$, достигающую наибольшего своего значения в точке $\sigma = s$. Это означает, что асимптотика интеграла в строчке (54) «вычисляется» по самой простой и красивой версии формулы Лапласа, которая относится к случаю, когда максимум функции L приходится на внутреннюю точку отрезка интегрирования [3]. Конечно, мы не станем помещать в текст детали элементарных вычислений, но если еще раз вспомним Стирлинга, то ясно увидим, что коэффициент перед интегралом представляет собой величину, асимптотически обратную этому интегралу.

Теперь нам остается лишь в полной мере воспользоваться монотонностью интегралов Эйлера — Дирака, установленной в предыдущей лемме. Например, если $0 \le s \le s' < t$, то $H_n(t,s') \le H_n(t,s) \le 1$, где $H_n(t,s') \to 1$ при $n \to \infty$, так что интегралы $H_n(t,s)$ стремятся к единице равномерно по s на всем отрезке $0 \le s \le s'$. Ровно так же мы придем к нужному выводу, если $s \ge s'' > t \ge 0$. Здесь $0 \le H_n(t,s) \le H_n(t,s'')$, где $H_n(t,s'') \to 0$ при $n \to \infty$, но тогда $H_n(t,s)$ стремятся к нулю равномерно по s на полупрямой $s \ge s''$. Лемма доказана.

3.3. Последовательности монотонных функций. Если мы взглянем еще раз на формулу (45) и сопоставим ее с утверждениями леммы 9, то сразу увидим, что последовательности U_n и F_n могут сходиться лишь одновременно, причем, к общему пределу. Но чтобы строго обосновать эту нашу уверенность, нам нужно убедиться, что для последовательностей монотонных функций все сколь-нибудь «разумные» подходы к понятию их сходимости эквивалентны.

Лемма 10. *Пусть на временной полуоси задана последовательность u_n неотрицательных неубывающих функций. Нет никакой разницы, сходится ли она на всюду плотном подмножестве полуоси, почти всюду или в среднем на каждом отрезке. В случае ее сходимости на полуоси существует единственная неотрицательная неубывающая функция u, непрерывная справа и такая, что $u_n(t) \to u(t)$ при $n \to \infty$ в каждой точке $t > 0$, где она непрерывна и с левой стороны, так что на самом деле последовательность u_n сходится во всех точках временной полуоси, быть может, кроме конечного или счетного их числа.*

Доказательство. Предположим, что точки t, для которых предел $u_*(t)$ последовательности $u_n(t)$ существует и конечен, образуют на неотрицательной полупрямой всюду плотное ее подмножество. Заданная на нем неубывающая функция u_* в любой точке $t > 0$, возможно, кроме конечного или счетного их числа, имеет предел. Пусть он равен $u(t)$. Ясно, что $u_n(t) \to u(t)$ при $n \to \infty$, так что в каждой такой точке функция u_* уже определена и $u(t) = u_*(t)$. Это прямое следствие монотонности, столь же замечательное, сколь и очевидное. Полагая еще $u(t) := u_*(t+0)$ для $t = 0$ и для тех «немногих» точек $t > 0$, где предел функции u_* слева меньше предела справа, мы получим ту, заданную на полуоси $t \geq 0$, единственную функцию u, о которой говорится в лемме.

Как мы уже видим, последовательность u_n сходится к функции u почти всюду, а поскольку на каждом отрезке полуоси она, конечно, ограничена, она сходится на нем к u и по интегральной норме. Намного интересней обратное утверждение. Итак, пусть нашлась такая локально суммируемая функция v, что для каждого $T > 0$ интегралы функций $|u_n - v|$ по отрезку от нуля до T при $n \to \infty$ стремятся к нулю. Функция v этим условием определяется лишь с точностью до «лебеговой эквивалентности» и не обязана быть монотонной. Однако сужение ее на множество ее точек Лебега [2] представляет собой уже неубывающую функцию: здесь достаточно сравнить интегралы функции v по двум отрезкам *равной длины*, окружающим две из таких точек. Все эти точки составляют на нашей полуоси множество полной меры, так что функцию v мы можем заменить эквивалентной ей функцией u, уже неубывающей и даже непрерывной справа. Возьмем теперь точку $t > 0$, где функция u непрерывна, и докажем, что $u_n(t) \to u(t)$, когда $n \to \infty$. Выберем $\varepsilon > 0$ и найдем такие точки t' и t'', что $0 \leq t' < t < t''$ и $|u(t'') - u(t')| < \varepsilon/2$. Интегралы функции $|u_n - u|$, посчитанные по отрезкам от t' до t и от t до t'', становятся сколь угодно маленькими, когда n неограниченно растет. Однако при маленьком интеграле неотрицательная функция может быть большой лишь на очень маленьком по мере множестве. Это простое наблюдение уже давно воплощено в классическом неравенстве Чебышева. Оно позволяет для каждого достаточно большого n найти пару точек s_n' и s_n'' в интервалах $t' < s_n' < t$ и $t < s_n'' < t''$, для которых $|u_n(s_n') - u(s_n')| < \varepsilon/2$ и $|u_n(s_n'') - u(s_n'')| < \varepsilon/2$. Благодаря монотонности всех наших функций и благоприятному взаимному расположению возникшей у нас «пятерки» точек $t' < s' < t < s'' < t''$ отсюда следует, что $|u_n(t) - u(t)| < \varepsilon$ для тех же «больших» номеров n, а это означает, что лемма доказана.

3.4. Предельная картина свободного синтеза. Начальные «массы» мы выбираем сами, и поэтому только от нас зависит, какой будет предельная картина «распределения» этих масс. Опираясь на асимптотические свойства интегралов Эйлера — Дирака и предыдущую лемму, теперь мы докажем, что эта картина и будет выражением предельного режима свободного синтеза.

Теорема 6. *Предельное распределение начальных условий и отвечающий им предельный режим свободного синтеза могут существовать лишь оба сразу, причем, если уж они существуют, они тождественно равны между собой.*

Доказательство. Для каждого n выберем набор начальных условий и по ним построим функции F_n и U_n. Пусть наша начальная последовательность обладает предельным распределением F. Возьмем произвольную точку $t > 0$, где функция F непрерывна, а тогда, как мы уже отмечали, $F_n(t) \to F(t)$ при $n \to \infty$. Докажем, что последовательность $U_n(t)$ тоже стремится к $F(t)$. Это решит половину задачи, поскольку будет означать, что F служит предельным режимом свободного синтеза, отвечающим нашим условиям. Заметим прежде всего, что если $t > \tau$, то $F_n(t) = F_n(\tau)$. Но последовательность $H_n(t,s)$ сходится к единице равномерно относительно s на отрезке $0 \le s \le \tau$, так что разность

$$U_n(t) - F_n(t) = U_n(t) - F_n(\tau) = \int_0^\tau [H_n(t,s) - 1]\, dF_n(s) \tag{55}$$

при $n \to \infty$ стремится к нулю. Здесь нет никакой нужды в теоремах Хелли, но достаточно ограниченности последовательности функций F_n, вытекающей из ее сходимости. Чуть более содержательный анализ требуется в том случае, когда точка t лежит в интервале $0 < t < \tau$ и разбивает его на две части:

$$U_n(t) - F_n(t) = \int_0^t [H_n(t,s) - 1]\, dF_n(s) + \int_t^\tau H_n(t,s)\, dF_n(s). \tag{56}$$

Если бы в первом интеграле верхним пределом служила точка s' интервала $0 < s' < t$, а во втором нижний предел был равен s'', где $t < s'' < \tau$, то оба интеграла с ростом n стремились бы к нулю в согласии с леммой 9, которую молчаливо мы один раз уже применили выше. Но разница между тем, что имеем, и тем, что хотим, не так уж и велика, если точки s' и s'' достаточно близки к t, поскольку $0 \le H_n \le 1$, так что сумма «остаточных» интегралов

$$\int_{s'}^t [H_n(t,s) - 1]\, dF_n(s) + \int_t^{s''} H_n(t,s)\, dF_n(s) \tag{57}$$

благодаря монотонности функций F_n по абсолютной величине не превосходит разности $F_n(s'') - F_n(s')$ и даже меньше ее. Этим уже все сказано, но все же пусть $\varepsilon > 0$. Непрерывность F в точке t и сходимость последовательности F_n к функции F на всюду плотном подмножестве временной полуоси позволяют нам в качестве s' и s'' выбрать точки, удовлетворяющие трем условиям:

$$F(s'') - F(s') < \varepsilon/3, \quad |F_n(s') - F(s')| < \varepsilon/3, \quad |F_n(s'') - F(s'')| < \varepsilon/3 \tag{58}$$

для достаточно больших n. Итак, $U_n(t) \to F(t)$. Случай $t = \tau$ мы можем вовсе не обсуждать, но можем и заметить, что рассуждения здесь еще проще.

Пусть, напротив, мы знаем, что последовательность начальных условий порождает предельный режим свободного синтеза и он равен U. Справа от τ мы найдем точку t_*, где $U_n(t_*) \to U(t_*)$, так что последовательность $U_n(t_*)$ окажется ограниченной. При этом функции $H_n(t_*, s)$ при $n \to \infty$ равномерно по s на отрезке $0 \le s \le \tau$ стремятся к единице. Например, всюду на нем они больше $1/2$ для всех достаточно больших номеров n. Однако в таком случае для тех же n, как показывает формула (45), сумма $m_n + F_n(\tau)$ меньше $2U_n(t_*)$. Но это означает, что начальные распределения F_n во всей своей совокупности ограничены на временной полуоси, а тогда ограничены полные вариации всех этих неубывающих функций. Принцип выбора Хелли [2] позволяет нам найти такие растущие номера n_k, что последовательность F_{n_k} при $k \to \infty$ окажется сходящейся в каждой точке начального отрезка, а тогда и на всей временной полуоси. Впрочем, нам было бы вполне достаточно поточечной ее сходимости всего лишь на всюду плотном подмножестве этой полуоси, на которой в этом случае можно построить такую неотрицательную неубывающую функцию F, непрерывную справа, что в каждой точке $t > 0$, где она непрерывна и слева, $F_{n_k}(t) \to F(t)$ при $k \to \infty$. Но тогда и $U_{n_k}(t) \to F(t)$ для тех же t. Чтобы в этом убедиться, надо еще раз посмотреть доказательство первой половины теоремы и увидеть, что там номер n не обязан «пробегать» весь натуральный ряд, и мы вполне можем заменить его на n_k. Но если наша последовательность U_n вся целиком, как мы договаривались, сходится к функции U, то $F = U$. Мы пришли к замечательному выводу — у ограниченной последовательности монотонных функций F_n только один «частичный» предел. Конечно, здесь не может быть ни малейших сомнений, что такая последовательность сходится. Однако речь идет о поточечной сходимости, и в этом трудность. Вот если бы мы говорили о сходимости относительно какой-либо нормы или метрики, то все было бы так же просто, как и для числовых последовательностей, и вряд ли это стоит пояснять. Но функции распределения монотонны и для них в силу леммы 10 нет разницы, как им сходиться, поточечно в нашем смысле или по интегральной норме на отрезке, чуть большем начального. Теорема доказана.

§ 4. Итоги и примеры

4.1. Формула обращения. В следующем разделе мы докажем три наши теоремы из обзорного параграфа. Они практически содержатся в доказанных выше теоремах 4–6, но чтобы детали не заслонили простую картину, мы еще несколько слов посвятим интегралам Стилтьеса и монотонным функциям.

Лемма 11. *Пусть на всей временной полуоси задана неотрицательная и неубывающая функция Φ, непрерывная справа. Тогда и функция*

$$\Psi(t) = \Phi(0) + \int_0^t e^{\Theta(s)}\, d\Phi(s), \tag{59}$$

определенная на той же полуоси, обладает всеми этими свойствами и

$$\Phi(t) = \Psi(0) + \int_0^t e^{-\Theta(s)}\, d\Psi(s) \tag{60}$$

для всех $t \ge 0$. Таким образом, пара этих формул задает нам два взаимно обратных преобразования класса функций, определенных и неотрицательных на всей временной полуоси, неубывающих на ней и непрерывных справа.

Доказательство. Пожалуй, стоит заметить, что лемма очевидна, если функция Φ гладкая. Действительно, тогда гладкой будет и функция Ψ, а обе наши формулы, помимо равенства $\Psi(0) = \Phi(0)$, выражают соотношения

$$\dot{\Psi}(t) = e^{\Theta(t)}\dot{\Phi}(t), \quad \dot{\Phi}(t) = e^{-\Theta(t)}\dot{\Psi}(t), \tag{61}$$

действующие всюду на полупрямой $t \geq 0$ и эквивалентные между собой. Чтобы доказать ее в полном объеме, правую часть формулы (60) мы пока обозначим символом $\tilde{\Phi}(t)$ и убедимся, что $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)$ для всех $t \geq 0$. Если интегралы, выражающие Ψ и $\tilde{\Phi}$, посчитать по частям, получатся формулы

$$\Psi(t) = e^{\Theta(t)}\Phi(t) - \int\limits_0^t \Phi(s)\,de^{\Theta(s)}, \quad \tilde{\Phi}(t) = e^{-\Theta(t)}\Psi(t) - \int\limits_0^t \Psi(s)\,de^{-\Theta(s)}. \tag{62}$$

Сочетание этих двух формул приводит нас к замечательному выводу:

$$\Phi(t) - \tilde{\Phi}(t) = e^{-\Theta(t)} \int\limits_0^t \Phi(s)\,de^{\Theta(s)} + \int\limits_0^t \Psi(s)\,de^{-\Theta(s)}. \tag{63}$$

На всей временной полуоси эта разность непрерывна и обладает производной справа. Нетрудно посчитать ее и убедиться, что она равна нулю. Этого более чем достаточно, чтобы и разность была равна нулю. Лемма доказана.

4.2. Первые три теоремы. Существование предельного распределения заданной последовательности начальных условий, как показывает теорема 6, необходимо и достаточно для существования предельного режима свободного синтеза, отвечающего этой последовательности. Но тогда, согласно теореме 5, это верно и для линейного синтеза, а значит, и для общей циклической модели, как об этом говорит нам теорема 4, так что первая часть теоремы 1 доказана. Согласно тем же теоремам 4 и 5 предельный режим определяется однозначно не только начальными условиями, но и отвечающим им предельным режимом свободного синтеза, а по теореме 6 он равен предельному распределению этих условий. Это значит, что и второе утверждение теоремы 1 уже доказано.

В теореме 2 предполагается, что начальные условия обладают предельным распределением и оно равно F. Согласно теореме 6 можно в первой формуле (41) заменить U на F. Если учесть, что $Y = Z$ на начальном отрезке, как утверждает теорема 4, мы придем к формуле (8). Поскольку F не меняется после τ, те же аргументы показывают, что $Z(t) = Z(\tau) = Y(\tau)$ для $t \geq \tau$. Так формула (40) превращается в формулу (9), а значит, теорема 2 доказана.

Возможно, уже в обзорном параграфе было бы уместно подчеркнуть, что не только предельный режим Y определяется предельным распределением F начальных условий, но и функцию F можно восстановить по функции Y. Мы теперь можем не просто это заметить, но доказать, что формула (8) допускает обращение. А именно, повторяя часть рассуждений из предыдущего абзаца и снова заменяя U на F, но уже во второй из формул (41), мы видим, что

$$F(t) = Y(0) + \int\limits_0^t e^{-\Theta(s)}\,dY(s), \tag{64}$$

где $0 \leq t \leq \tau$, а значит, *предельный режим циклического синтеза прекрасно «помнит» предельное распределение породивших его начальных условий.*

Сама по себе эквивалентность формул (8) и (64), конечно, никак не обязана тому, что функции F и Y служат пределами особым образом связанных между собой функциональных последовательностей, и легко может быть установлена при помощи леммы 11. Примерно такую же «разъясняющую» роль эта лемма играет и при доказательстве теоремы 3. Она состоит у нас из двух половинок, прямой и обратной, из которых первая описывает свойства, которыми должна обладать функция на временной полуоси, чтобы иметь право быть предельным режимом циклического синтеза. Все они вытекают, например, из теоремы 2.

Переходя к обсуждению второго утверждения теоремы 3, предположим, что на временной полуоси задана неубывающая неотрицательная функция Y, которая непрерывна справа, а после τ вычисляется по итерационной формуле. Построим последовательность начальных условий, порождающую предельный режим, для которого Y будет соответствующим ему приведенным режимом. Для этого мы временно «остановим» функцию Y в момент τ и построим новую функцию Z, полагая $Z(t) = Y(t)$ для $0 \le t \le \tau$ и $Z(t) = Y(\tau)$ при $t > \tau$. Она обладает всеми свойствами, которые были перечислены в лемме 11. Пусть

$$F(t) = Z(0) + \int_0^t e^{-\Theta(s)}\, dZ(s), \tag{65}$$

где $t \ge 0$. Так на временной полуоси появляется еще одна неотрицательная неубывающая функция F, всюду непрерывная справа. Подражая породившей ее функции Z, в момент τ она стабилизируется, но уже на уровне $F(\tau)$. Легко представить ее как предельное распределение некоторой последовательности начальных условий. С этой целью для каждого номера n построим разбиение начального отрезка на n равных частей, отметив на временной полуоси между нулем и τ точки $t_k^n = k\tau/n$ для всех $k = 0, \dots, n$, и после этого сконструируем функцию распределения F_n набора начальных условий $\mu_1^n, \dots, \mu_n^n, m_n$, где

$$m_n = F(t_0^n),\ \mu_n^n = F(t_1^n) - F(t_0^n), \dots, \mu_1^n = F(t_n^n) - F(t_{n-1}^n), \tag{66}$$

Ясно, что последовательность $F_n(t)$ сходится к $F(t)$ в любой точке $t \ge 0$, где функция F непрерывна, а значит, для построенной нами последовательности начальных условий функция F служит ее предельным распределением. Далее можно было, сославшись на теоремы 1 и 2, прийти к выводу, что функция

$$\tilde{Z}(t) = F(0) + \int_0^t e^{\Theta(s)}\, dF(s) \tag{67}$$

служит приведенным предельным режимом линейного синтеза, отвечающим какой угодно последовательности начальных условий, для которой предельное распределение равно F, а затем, выразив F через $\tilde{Z}$ на начальном отрезке по формуле (64), заменяя в ней Y на $\tilde{Z}$, сравнить результат с формулой (65). Мы увидели бы, что $\tilde{Z} = Z$. Но именно это равенство благодаря лемме 11 прямо следует из формулы (65). Так или иначе, $\tilde{Z}(t) = Y(t)$, если $0 \le t \le \tau$. Поэтому, продолжая $\tilde{Z}$ на полуось $t > \tau$ согласно итерационному правилу, конечно, мы получим — с одной стороны — исходную функцию Y, а с другой — это будет приведенный предельный режим циклического синтеза, порождаемый только что нами упомянутыми начальными условиями. Итак, теорема 3 доказана. Это значит, что мы завершили обоснование всех утверждений нашего обзора.

4.3. Равномерная сходимость. Наши прежние выводы об особенностях сходимости последовательностей финальных функций мы дополним здесь еще одним наблюдением, но для этого нам нужна еще одна лемма о монотонных функциях, чем-то напоминающая теорему Дини — столь же простая и тоже позволяющая легко устанавливать равномерную сходимость функциональных последовательностей, не прибегая при этом к неравенствам и оценкам.

Лемма 12. *Если последовательность функций, заданных и монотонных на компактном подмножестве вещественной прямой, в каждой точке компакта сходится к непрерывной на нем функции, сходимость эта равномерна.*

Доказательство. Предположим, что речь идет о монотонных функциях v_n на компакте Q, которые сходятся к непрерывной на нем же функции v. Если $\varepsilon > 0$, мы найдем *конечный* набор таких отрезочков с концами из Q, что вместе они покрывают Q и на каждом из них колебание функции v меньше $\varepsilon/2$. Для всех достаточно больших номеров n значения функций v_n и v в каждой из концевых точек отличаются меньше чем на $\varepsilon/2$. Ясно, что для тех же n на любом из этих отрезочков, а тогда и на всем множестве Q, разность между монотонными функциями v_n и v по модулю меньше ε. Лемма доказана.

Как и предыдущие наши утверждения о сходимости последовательностей монотонных функций, эта лемма применима к финальным функциям. Редко бывая монотонными, они отличаются от приведенных и уже монотонных их «дубликатов» общим для них непрерывным положительным множителем. Он не влияет на сходимость составленной из них последовательности, какой бы из вариантов сходимости мы ни имели в виду, поточечный ли в том или ином смысле, по интегральной норме на отрезках или равномерную сходимость на ограниченных множествах. Например, если во всех точках какого-то компакта последовательность y_n финальных функций сходится к непрерывной на нем функции, сходимость на этом компакте будет равномерной. Важно отметить, что класс ограниченных множеств равномерной сходимости для функций y_n ровно тот же, что и для однородных их составляющих z_n, которые мы всегда можем посчитать в квадратурах. Нужно лишь учесть, что последовательность $\Delta_n = y_n - z_n$ на каждом таком множестве сходится равномерно, поскольку она сходится всюду, ее предел непрерывен, а функции $e^{\Theta(t)}\Delta_n(t)$ монотонны.

Следует еще заметить, что если предельное распределение непрерывно на компактном подмножестве полуоси $t \geq 0$, не содержащем точку $t = 0$, функции y_n при $n \to \infty$ сходятся на нем равномерно. В самом деле, в каждой точке t такого компакта согласно формуле (12) функция y непрерывна, но ясно, что $y_*(t-0) = y(t-0)$, а потому $y(t_*-0) = y(t) = y(t_*+0)$. Как мы знаем, в этом случае функция y_* определена в точке t, так что $y_n(t)$ стремится к $y_*(t) = y(t)$ при $n \to \infty$, и мы приходим к той ситуации, о которой только что говорили.

4.4. Одноточечные распределения. Завершая эту работу, мы обсудим все примеры конкретных классов начальных условий циклического синтеза, исследование которых было целью статьи [5], и посмотрим, как они выглядят в свете той системы понятий, что была предложена в нашей работе, и теорем, которые здесь были нами доказаны. Все эти примеры, в нашей терминологии, относятся к *одноточечным распределениям* начальных масс — это когда для любого номера n из всего набора $\mu_1^n, \ldots, \mu_n^n, m_n$ начальных условий лишь одна из его компонент вправе быть отличной от нуля, а значит, отвечающая этому набору функция распределения F_n может совершить скачок только раз.

Впрочем, если этой «единственной компонентой» служит m_n, функция F_n вовсе не имеет скачков и всюду на временной полуоси принимает постоянное значение m_n. Поэтому предельное распределение F, а значит, и предельный режим y циклического синтеза, существуют в том и только том случае, когда последовательность m_n сходится. При этом $F \equiv m := \lim m_n$, а функция y определяется формулами (8) и (9), как описано в теореме 2, а именно:

$$e^{\Theta(t)} y(t) = m \tag{68}$$

на отрезке $0 \leq t \leq \tau$, а далее, при $t > \tau$, считается по рекуррентной формуле

$$e^{\Theta(t)} y(t) = m + \int_{\tau}^{t} e^{\Theta(s)}\, g(s-\tau,\, y(s-\tau))\, ds. \tag{69}$$

Конечно, здесь еще нет нужды в понятии начального распределения. Можно просто заметить, что финальные функции z_n линейного синтеза в этом случае легко считаются, и обойтись одной лишь леммой 4 о первой редукции:

$$z_n(t) = m_n e^{-\Theta(t)}, \quad t \geq 0, \tag{70}$$

и мы сразу видим, что сходимость m_n эквивалентна сходимости z_n в любом смысле. Более того, при этом условии z_n не просто сходится в каждой точке неотрицательной полуоси, но даже равномерно на каждом ее отрезке, а наши наблюдения, описанные в предыдущем разделе, позволяют нам — безо всяких оценок — утверждать, что это верно и для функций y_n. Предельная функция y здесь оказывается не только непрерывной на всей временной полуоси, но даже гладкой слева и справа от точки τ. В самой же этой точке график функции y может иметь излом. Точнее говоря, в точке τ производные функции y имеют пределы слева и справа, но они могут быть разными, что обычно и бывает:

$$\dot{y}(\tau + 0) - \dot{y}(\tau - 0) = g(0, m). \tag{71}$$

Интересно, что здесь скачок производной может происходить лишь «по вине» функции g, но параметр ϑ при этом никак не влияет даже на его величину.

Это был только первый из примеров начальных распределений, которые исследуются в работе [5]. Чтобы охватить единой схемой не только все далее изучаемые в ней примеры, но и произвольные «одноточечные» распределения, для каждого n из номеров $k = 1, \ldots, n$ мы выберем какой-то один $k = k(n)$ и предположим, что в наборе $\mu_1^n, \ldots, \mu_n^n, m_n$ лишь μ_{n+1-k}^n может быть не равно нулю. Это — высота единственного прыжка, который в момент $k\tau/n$ вправе совершить функция распределения F_n нашего начального набора. Очевидно, что предельное распределение F таких начальных условий существует в двух случаях: либо $\mu_{n+1-k}^n \to 0$ при $n \to \infty$, где k означает $k(n)$, либо сходятся обе последовательности μ_{n+1-k}^n и k/n, так что *в этих и только в этих двух случаях описанные нами начальные условия порождают предельный режим циклического многостадийного синтеза*, и мы уже знаем, как он устроен.

В первом случае, когда «начальные массы» в пределе исчезают, конечно, можно просто повторить знакомые нам аргументы и увидеть, что предельная картина здесь точно такая же, какая была нами только что описана, если там взять $m = 0$. Разумеется, второй случай не исключает первый, но если массы не стремятся к нулю, предельная картина получается заметно интересней.

Теорема 7. *Если «массы» μ^n_{n+1-k} и дроби k/n, где $k = k(n)$, сходятся и*

$$\mu_* = \lim_n \mu^n_{n+1-k}, \quad \tau_* = \lim_n \frac{k}{n}\,\tau, \tag{72}$$

циклический синтез непременно выходит на предельный режим y, который на отрезке $\tau_* \le t \le \tau$ вычисляется по «экспоненциальной» формуле

$$y(t) = Me^{-\Theta(t)}, \quad M = \mu_* e^{\Theta(\tau_*)}. \tag{73}$$

Например, $y(\tau_*) = \mu_*$. Если слева от τ_* на временной полуоси есть место, он там просто равен нулю. После τ он определяется итерационным правилом.

Можно еще заметить, что финальные функции, отвечающие обсуждаемым начальным условиям, аппроксимируют предельную функцию y равномерно на любом отрезке, лежащем строго справа от τ_*, а если $\tau_* > 0$, то и на каждом отрезке временной полуоси, расположенном строго слева от точки τ_*. Функция y может иметь разрыв лишь в точке τ_* и на самом деле имеет, если $\tau_* > 0$ и $\mu_* > 0$. Она дифференцируема и подчиняется уравнению (13) справа от τ, не считая точки $\tau + \tau_*$, если $\tau_* > 0$, где ее график вполне может иметь излом.

После всего, что сказано, ни теорема, ни дополнения к ней не нуждаются ни в каких комментариях. Но стоит заметить, что все это легко доказать и без привлечения понятия распределения начальных условий, опираясь только на леммы 4 и 6 о первой и второй редукциях. В самом деле, эти леммы приводят нашу задачу к изучению финальных функций U_n свободного синтеза, и здесь мы их можем «явно» записать, поскольку это $\mu^n_{n+1-k} I^k_n$. Однако интегралы I^k_n, построенные в (42), элементарно исследуются по Лапласу, хотя еще проще применить описанные нами свойства интегралов Эйлера — Дирака.

Мне приятно выразить искреннюю признательность Г. В. Демиденко и участникам его семинара по избранным вопросам математического анализа, где мне довелось побывать и немножко узнать, чем интересуются коллеги. Моя теплая благодарность В. М. Чересизу за внимание к работе и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.
2. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: ГИТТЛ, 1957.
3. *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. (Справочная математическая библиотека.).
4. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
5. *Демиденко Г. В., Мельник И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.

Статья поступила 16 июня 2015 г., окончательный вариант — 20 сентября 2016 г.

Иванов Владимир Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
iva@math.nsc.ru