Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ДВУХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЦОКОЛЕМ $L_2(q)$

В. И. Зенков

Аннотация. С точностью до сопряженности приведено описание всех пар нильпотентных подгрупп A и B из конечной группы G с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, $q \geq 4$, для которых $A \cap B^g \neq 1$ для любого $g \in G$.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.607

Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная подгруппа, пересечение подгрупп.

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Обозначим через $M_G(A,B)$ множество минимальных по включению подгрупп вида $A \cap B^g$, $g \in G$, а через $\mathrm{Min}_G(A,B) = \langle M_G(A,B)\rangle$ — подгруппу, порожденную всеми элементами множества $M_G(A,B)$. Через $m_G(A,B)$ обозначим подмножество из $M_G(A,B)$ элементов минимального порядка, а через $\min_G(A,B)$ — подгруппу $\langle m_G(A,B)\rangle$. По определению $\mathrm{Min}_G(A,B) \geq \min_G(A,B)$, но возможно и строгое неравенство. Для примера рассмотрим группу $G \simeq \Sigma_4$ — симметрическую группу степени 4. Положим $A \simeq D_8$, $A \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $A > B$, B изоморфна C_4 — циклической группе порядка 4. Тогда $M_G(A,B) = \{B,\ B^f \cap O_2(G),\ B^{f^2} \cap O_2(G) \mid f$ — элемент порядка 3 из $G\}$, а $m_G(A,B) = \{B^f \cap O_2(G),\ B^{f^2} \cap O_2(G),\ f$ — элемент порядка 3 из $G\}$. Следовательно, $M_G(A,B) > m_G(A,B)$ и $\mathrm{Min}_G(A,B) = A > \min_G(A,B) = O_2(G)$, хотя $\mathrm{Min}_G(B,A) = \min_G(B,A) = B \cap O_2(G) \simeq C_2$. Этот пример показывает, что существуют группы, в которых $M_G(A,B) \supset m_G(A,B)$ и не только $\mathrm{Min}_G(A,B) > \min_G(A,B)$, но к тому же и $\min_G(A,B) \leq F(G) < \mathrm{Min}_G(A,B)$. Рассмотренный пример относится к разрешимым группам и примарным подгруппам в роли A и B. Однако существуют и более сложные примеры почти простых групп, в которых выполняется неравенство $\mathrm{Min}_G(A,B) > \min_G(A,B)$ для примарных подгрупп A и B из G. В случае простой неабелевой группы G и примарных подгрупп A, B из G справедливо соотношение $\mathrm{Min}_G(A,B) = \min_G(A,B) = 1$ [1, теорема 1]. Если G — произвольная конечная группа, A и B — абелевы подгруппы из G, то [2, теорема 1] $\min_G(A,B) \leq \mathrm{Min}_G(A,B) \leq F(G)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (код проекта 15–11–10025), (теорема 1) и проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.210006) (теорема 2).

В случае, когда A — циклическая подгруппа, а B — нильпотентная подгруппа из конечной группы G, по [3, лемма 2.1] $\mathrm{min}_G(A, B) \leq \mathrm{Min}_G(A, B) \leq F(G)$. В частном случае, когда $L_n(q) \leq G \leq PGL_n(q)$, $q \geq 4$, $q \neq 8$, A — полупростая циклическая подгруппа из G, B — максимальная подгруппа из G, имеем более сильное утверждение, а именно $\mathrm{min}_G(A, B) \leq \mathrm{Min}_G(A, B) = 1 = F(G)$ [4].

В связи с этим в [5, № 16.29] поставлена задача описания простых групп лиева типа, обладающих следующим свойством: для любой полупростой абелевой подгруппы A из G и любой собственной подгруппы H из G найдется такой элемент x из G, для которого $A \cap H^x = 1$, что эквивалентно условию $\mathrm{Min}_G(A, H) = \mathrm{min}_G(A, H) = 1$.

Приведем пример простой группы G, полупростой подгруппы A из G и подгруппы H из G, для которых $\mathrm{Min}_G(A, H) \neq 1$. В действительности $\mathrm{Min}_G(A, H) = \mathrm{min}_G(A, H) = A$. Пусть $G \simeq L_2(5)$. Тогда силовская 2-подгруппа A из G полупроста и изоморфна E_4. В качестве H возьмем подгруппу из G, изоморфную $C_5 \leftthreetimes C_2$. Так как $A \in \mathrm{Syl}_2(G)$, а $|H|$ четен, то $A \cap H^x \neq 1$ для некоторого элемента x из G. Поскольку $|G : N_G(A)| = 5$, с подгруппой A в группе G сопряжено 5 подгрупп. Но в подгруппе H также 5 силовских 2-подгрупп. Следовательно, $A^g \cap H \neq 1$ для любого элемента g из G, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что $A \cap H^y \neq 1$ для любого элемента y из G. Так как $|A \cap H^y| = 2$ для любого элемента y из G, то $A \cap H^y \in m_G(A, H)$. Кроме того, $N_G(A)$ действует транзитивно на инволюциях из A. Следовательно, $\mathrm{min}_G(A, H) = A = \mathrm{Min}_G(A, H)$. Заметим также, что $\mathrm{min}_G(H, A) = H = \mathrm{Min}_G(H, A)$. Это единственный известный автору на данный момент пример, удовлетворяющий условиям задачи, но не заключению. Этот пример приведен в замечании к задаче [5, № 16.29]. В данном примере подгруппа A абелева, а подгруппа H сверхразрешима. Этот пример показывает, что в [4] ослабить условие цикличности подгруппы A до абелевости с сохранением заключения нельзя, хотя подгруппа A из рассмотренного выше примера содержит циклическую подгруппу индекса 2. Также этот пример показывает, что отказаться от абелевости подгруппы B в [2, теорема 1] с сохранением заключения этой теоремы нельзя, хотя подгруппа H даже метациклическая.

Целью настоящей работы является изучение подмножеств $M_G(A, B)$ и $m_G(A, B)$, подгрупп $\mathrm{Min}_G(A, B)$ и $\mathrm{min}_G(A, B)$ в случае, когда цоколь группы G изоморфен $L_2(q)$, $q \geq 4$, а подгруппы A и B нильпотентны. Более того, если $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$, что эквивалентно условию $\mathrm{min}_G(A, B) \neq 1$, то возникает вопрос: каким известным группам изоморфны данные подгруппы A и B? На этот вопрос отвечают две следующие теоремы нашей работы.

Теорема 1. *Пусть G — конечная неразрешимая группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, $q = t^n$, t простое, и S — силовская p-подгруппа из G. Тогда $M_G(S, S) = m_G(S, S)$, $\mathrm{Min}_G(S, S) = \mathrm{min}_G(S, S)$ и если $\mathrm{Min}_G(S, S) = \mathrm{min}_G(S, S) \neq 1$, то $p = 2$ и либо $q = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна, $G \simeq \mathrm{Aut}(L_2(q))$, и $\mathrm{Min}_G(S, S) = \mathrm{min}_G(S, S) = S$, либо $q = 9$, $G \simeq \mathrm{Aut}(L_2(9))$, и $\mathrm{Min}_G(S, S) = \mathrm{min}_G(S, S) = \langle i, j \rangle \simeq D_{16}$, где $i^2 = j^2 = 1$, инволюции i и j лежат в $G \backslash G'$ и $|C_S(i)| = |C_S(j)| = 8$. Во всех неединичных случаях множество $M_G(S, S) = m_G(S, S)$ совпадает с множеством всех нецентральных подгрупп порядка два из $\mathrm{Min}_G(S, S) = \mathrm{min}_G(S, S)$.*

Хотя в теореме 1 подгруппы $\mathrm{Min}_G(S, S)$ и $\mathrm{min}_G(S, S)$ описаны только для силовской подгруппы S из G, эта теорема, как показывает теорема 2, имеет ключевое значение при описании подгрупп $\mathrm{Min}_G(A, B)$ и $\mathrm{min}_G(A, B)$ в случае произвольных нильпотентных подгрупп A и B из G.

Теорема 2. *Пусть G — конечная неразрешимая группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, $q = t^n$, t простое, S — силовская 2-подгруппа из G и A, B — нильпотентные подгруппы из G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$;

(2) $\min_G(A, B) \neq 1$;

(3) *либо $q = 2^m - 1$ — простое число Мерсенна, $G \simeq \mathrm{Aut}(L_2(q))$, пара (A, B) с точностью до сопряженности совпадает с парой (S, S), $M_G(A, B) = m_G(A, B)$ и $\mathrm{Min}_G(A, B) = \min_G(A, B) = S$ из теоремы 1, либо $q = 9$, $G \simeq \mathrm{Aut}(L_2(9))$, пара (A, B) с точностью до сопряженности принадлежит множеству $\{(S, S), (\min_G(S, S), S), (S, \min_G(S, S))\}$, $M_G(A, B) = m_G(A, B)$ и $\mathrm{Min}_G(A, B) = \min_G(A, B) = \langle i, j\rangle \simeq D_{16}$, $i^2 = j^2 = 1$, инволюции i и j лежат в $G\backslash G'$ и $|C_S(i)| = |C_S(j)| = 8$ из теоремы 1.*

1. Обозначения и предварительные сведения

Обозначения в основном общепринятые. Часть из них можно найти в [6, 7].

Лемма 1.1 [2, теорема 1]. *Пусть G — конечная группа и A, B — абелевы подгруппы из G. Тогда $\min_G(A, B) \leq \mathrm{Min}_G(A, B) \leq F(G)$.*

Лемма 1.2 [3, лемма 2.1]. *Пусть G — конечная группа, A — циклическая подгруппа из G и B — нильпотентная подгруппа из G. Тогда $\min_G(A, B) \leq \mathrm{Min}_G(A, B) \leq F(G)$.*

Лемма 1.3 [1, теорема 1]. *Пусть G — конечная простая неабелева группа и A, B — примарные подгруппы из G. Тогда $\mathrm{Min}_G(A, B) = \min_G(A, B) = 1$.*

Лемма 1.4 [8, следствие из теоремы B]. *Пусть G — конечная неразрешимая группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, и A, B — примарные подгруппы из G и $\min_G(A, B) \neq 1$. Тогда A, B — 2-подгруппы и либо $q = 9$, либо q — простое число Ферма или простое число Мерсенна.*

Лемма 1.5 [8, лемма 3.2]. *Пусть G — конечная группа и M — p-локальная подгруппа из G такая, что $M = N_G(O_p(M))$. Если в M найдутся две силовские p-подгруппы Q_1 и Q_2 такие, что $Q_1 \cap Q_2 = O_p(M)$, то в G найдутся две силовские p-подгруппы P_1 и P_2 такие, что $P_1 \cap P_2 = O_p(M)$ и $P_1 \geq Q_1$, а $P_2 \geq Q_2$.*

Лемма 1.6 [9, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа и G_1, A, B — подгруппы в G такие, что G_1 содержит A. Если $G_1 \trianglerighteq G_2$ и $G_2 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, причем в фактор-группе $\overline{G}_1 = G_1/G_2$ имеем $\overline{A} \cap \overline{(G_1 \cap B^g)}^{\bar{g}_1} = \bar{1}$ для некоторого элемента $g_1 \in G_1$, то $A \cap B^{gg_2} = 1$ для любого элемента g_2 из смежного класса g_1G_2.*

Лемма 1.7 [9, лемма 7]. *Пусть G — одна из симметричных групп Σ_5, Σ_6 или одна из знакопеременных A_5, A_6 и A, B — нильпотентные подгруппы из G. Тогда $\mathrm{Min}_G(A, B) = \min_G(A, B) = 1$.*

Лемма 1.8 [8, лемма 3.18]. *Пусть $G \simeq \mathrm{Aut}(L_2(q))$ и S — силовская 2-подгруппа из G. Тогда*

(1) $\mathrm{Min}_G(S, S) = \min_G(S, S) = 1$, *если q не равно $2^n - 1$ — простому числу Мерсенна, и $q \neq 9$.*

(2) $\mathrm{Min}_G(S, S) \neq 1$ *для $q = 2^n - 1$ — простого числа Мерсенна, или $q = 9$.*

Лемма 1.9 [10, лемма 5]. *Пусть $t, n > 1$ — натуральные числа. Тогда для любого $\varepsilon \in \{+, -\}$ существует примитивный делитель $t_{\{\varepsilon n\}}$ числа $t^n - (\varepsilon 1)^n$, за исключением следующих случаев:*

(I) $\varepsilon = +$, $n = 6$, $t = 2$;

(II) $\varepsilon = +$, $n = 2$, $t = 2^l - 1$ *для некоторого* $l \geq 2$;

(III) $\varepsilon = -$, $n = 3$, $t = 2$;

(IV) $\varepsilon = -$, $n = 2$, $t = 2^l + 1$ *для некоторого* $l \geq 0$.

Простое число $t_{\{\varepsilon n\}}$ называется *примитивным делителем числа* $t^n - (\varepsilon 1)^n$, если $t_{\{\varepsilon n\}}$ не делит $t^i - (\varepsilon 1)^i$ при $1 \leq i < n$.

2. Доказательство теоремы 1

Так как $\mathrm{Soc}(G) \simeq L_2(q)$, $q = t^n > 3$, t простое, то $\mathrm{Inn}(K) \leq G \leq \mathrm{Aut}(K)$, где $K \simeq L_2(q)$. Пусть S — силовская p-подгруппа из G. В случае $p \geq 3$ согласно [8, теорема B(2)] $\min_G(S, S) = 1$. Но если $\min_G(S, S) = 1$, то $\mathrm{Min}_G(S, S) = 1$, и в этом случае теорема доказана. Более того, по лемме 1.3 теорема 1 справедлива для любой простой неабелевой группы и любого простого числа p. Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно рассмотреть случай $G \neq \mathrm{Soc}(G)$, при этом $p = 2$. Тогда по леммам 1.4 и 1.8 либо $G = \mathrm{Aut}(K)$ для q, равного простому числу Мерсенна, либо $q = 9$. В случае $q = 9$ согласно [8, лемма 3.27(2)] $G = \mathrm{Aut}(K)$, $K \simeq L_2(9)$.

Пусть $G \simeq \mathrm{Aut}(L_2(q))$, $q = 2^n - 1 > 3$ — простое число Мерсенна и i — инволюция из $G \backslash G'$. Тогда по [11] $C_G(i) \simeq D_{2(q-\varepsilon 1)}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$ и ε выбирается так, что 4 не делит $q - \varepsilon 1$. Для такой инволюции i имеем $C_G(i) \simeq C_2 \times (C_{\frac{q-\varepsilon 1}{2}} \leftthreetimes C_2)$, где $C_{\frac{q-\varepsilon 1}{2}} \leftthreetimes C_2$ — группа Фробениуса. Тогда в подгруппе $M = C_G(i)$ получим $\langle i \rangle = O_2(M)$ и в $\overline{M} = M/_{O_2(M)}$ любая пара различных силовских 2-подгрупп $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ имеет единичное пересечение. Следовательно, их полные прообразы в M, т. е. Q_1 и Q_2, будут силовскими 2-подгруппами в M и $Q_1 \cap Q_2 = O_2(M) = \langle i \rangle$. По лемме 1.5 $\langle i \rangle = S \cap S^y$ для некоторого элемента y из G. По определению $\langle i \rangle \leq \min_G(S, S)$. Пусть x — произвольный элемент из S. Тогда равенство $\langle i \rangle = S \cap S^y$ влечет, что $\langle i \rangle^x = (S \cap S^y)^x = S \cap S^{yx}$. Следовательно, $\langle i^x \rangle \leq \min_G(S, S)$ для любого элемента x из S. В частности, $\langle i^S \rangle \leq \min_G(S, S)$. Так как $|C_S(i)| = 4$ и подгруппа S диэдральна, $\langle i^S \rangle$ — диэдральная подгруппа индекса 2 из S.

Если инволюция i принадлежит $\mathrm{Soc}(G)$, то в силу сопряженности инволюций в $\mathrm{Soc}(G)$ можно считать, что $\langle i \rangle = Z(S)$.

Поскольку $|S| = 2^{n+1}$, а $|S : S_0| = 2$ для $S_0 = S \cap \mathrm{Soc}(G)$, условие $2^n - 1 > 3$ влечет, что $n \geq 3$. Поэтому S_0 — неабелева подгруппа и в силу диэдральности S и S_0 для любой четверной подгруппы E из S_0 и инволюции j из $S \backslash S_0$ имеем $E^j \neq E$. Пусть E_1 и E_2 — четверные подгруппы из $S_0 = S \cap \mathrm{Soc}(G)$, переставляемые инволюцией j из $S \backslash S_0$. Тогда $(N_G(E_1))^j = N_G(E_2)$, где $N_G(E_1) \simeq \Sigma_4$.

Как и выше, для подгрупп $M_1 = N_G(E_1) \simeq \Sigma_4$ и $M_2 = N_G(E_2) \simeq \Sigma_4$ с $O_2(M_1) \simeq O_2(M_2) \simeq E_4$ имеем $\overline{M}_i = M_i/_{O_2(M_i)} \simeq \Sigma_3$ для $i = 1, 2$. Поэтому $Q_1 \cap Q_2 = O_2(M_1)$, где $Q_1, Q_2 \in \mathrm{Syl}_2(M_1)$. Аналогично для M_2. По лемме 1.5 $S \cap S_1 = E_1$ и $S \cap S_2 = E_2$ для соответствующих силовских 2-подгрупп S_1 и S_2 из G, которые можно выбрать исходя из того, что $E_1^j = E_2$, так, что $S_1^j = S_2$. Тогда $D = S_1 \cap S_2 \leq C_G(\langle Z(S_1), Z(S_2) \rangle) \leq Z(S)$ в силу того, что $\langle Z(S_1), Z(S_2) \rangle$ — диэдральная подгруппа порядка, большего либо равного 8. Поэтому $D = \langle i \rangle$. Если сопряжем в $N_G(E_1)$ подгруппы S_1 и S элементом r, то равенство $\langle i \rangle = S_1 \cap S_2$ влечет, что $\langle i \rangle^r = (S_1 \cap S_2)^r = S_1^r \cap S_2^r = S \cap S_2^r$. Поэтому

$\langle i\rangle^r \le \min_G(S,S)$. В частности, подгруппа E_1 содержится в $\min_G(S,S)$, а тогда и S_0 содержится в $\min_G(S,S)$. Следовательно, $\min_G(S,S) = S = \mathrm{Min}_G(S,S)$. По построению для любой инволюции $i \in S\backslash Z(S)$ имеем $\langle i\rangle = S\cap S^x \in M_G(S,S)$ для некоторого x из G. Значит, $M_G(S,S) = m_G(S,S)$ и $q = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна в случае $G = \mathrm{Aut}(L_2(q))$. Теорема 1 в рассматриваемом случае доказана.

Пусть $G = \mathrm{Aut}(L_2(9))$. Вся необходимая информация о группе G с $\mathrm{Soc}(G) \simeq L_2(9)$ содержится в [6, с. 4]. В частности, каждая инволюция из S содержится либо в S_1, где $S_1 = S\cap G_1$, $G_1 \simeq \Sigma_6$, либо в S_2, где $S_2 = S\cap G_2$ и $G_2 \simeq PGL_2(q)$, причем подгруппы S_1 и S_2 индекса 2 в S, а потому нормальны в S. При этом силовская 2-подгруппа S_1 из G_1 изоморфна $C_2\times D_8$ и может быть представлена как $\langle k\rangle\times\langle m,n\rangle$, где k,m и n — инволюции из S_1 и $S_0 = S\cap \mathrm{Soc}(G) = \langle m,n\rangle \simeq D_8$. Пусть z — инволюция из $Z(S_0)$. Тогда $\langle z,m\rangle \simeq E_4 \simeq \langle z,n\rangle$ и в $S_1\backslash S_0$ нецентральными в S_1 инволюциями являются km, kmz, kn, knz. Легко проверяется, что $T_1 = \langle km,kn\rangle \simeq D_8$ и $T_1\cap S_0 = \langle mn\rangle \simeq C_4$. Поэтому T_1 содержит инволюции kmz и knz. Подгруппа S_0 нормальна в S по определению, а подгруппа T_1 нормальна в S в силу того, что порождается нормальным замыканием в S любой из нецентральных в T_1 инволюций, так как, например, для инволюции km из T_1 имеем $|C_S(km)| = 8$, а для инволюций k и kz имеем $|C_S(K)| = |C_S(kz)| = 16$ и в $S_1\backslash S_0$ всего шесть инволюций. Кроме того, инволюция $i\in S\backslash S_1$ действует на S_1 так, что $k^i = kz$ и $\langle z,m\rangle^i = \langle z,n\rangle$.

Приступим к определению подгруппы $\min_G(S,S) = T$. Прежде всего отметим, что согласно [6, с. 4] $C_G(i) \simeq C_2\times(C_5 \leftthreetimes C_4)$ и $|i^S| = 4$. Тогда по лемме 1.5 имеем $\langle i\rangle = S\cap S^g$ для некоторого элемента g из G. Поэтому $\langle i\rangle \in m_G(S,S)$ и $\langle i^S\rangle \le T$. Так как $i\in S_2 \simeq D_{16}$, то $\langle i^S\rangle \simeq D_8$. Поскольку $\Sigma_6 \simeq Sp_4(2)$, ввиду [8, лемма 3.13] все силовские 2-подгруппы из G_1, которые пересекаются с S_1 по единице, сопряжены под действием S_1, т. е. их число равно $|S_1| = 16$. С другой стороны, в $C_G(i)$ четыре силовские 2-подгруппы, которые пересекаются с $S\cap C_G(i)$ по подгруппе $\langle i\rangle$. По лемме 1.5 подгруппа S пересекается с соответствующими силовскими 2-подгруппами из G, содержащими силовские 2-подгруппы из S, по подгруппе $\langle i\rangle$. Так как $|i^S| = 4$, каждая силовская 2-подгруппа из G_1, которая пересекается с S_1 по единице, содержится в силовской 2-подгруппе из G, которая в пересечении с S содержит инволюцию из i^S.

Поэтому далее, рассматривая элемент $D = S\cap S^g$ из $M_G(S,S)$, можно считать, что $D_1 = D\cap G_1 \ne 1$, т. е.

$$D_1 = S\cap S^g\cap G_1 = S\cap G_1\cap(S^g\cap G_1) = S_1\cap(S\cap G_1)^g = S_1\cap S_1^g \ne 1.$$

Так как

$$C_G(k) = C_{G_1}(k) \simeq C_2\times\Sigma_4 \simeq C_G(kz) = C_{G_1}(kz),$$

из определенного выше действия инволюции i на S_1 следует, что $C_G(k)^i = C_G(kz)$. Без ограничения общности можно считать, что $O_2(C_G(k)) = \langle k\rangle\times\langle z,m\rangle$. Тогда инволюция n принадлежит $S_1\backslash O_2(C_G(k))$ и инвертирует элемент f порядка 3 так, что $\langle n,f\rangle \simeq \Sigma_3$. Инволюции n и n^f центральны в G, их централизаторы в G — 2-группы, поэтому

$$C_G(n)\cap C_G(n^f) \le C_G(\langle n,n^f\rangle) = C_G(f).$$

Но $O_2(C_G(f)) \simeq C_2$ и $\langle k\rangle \le O_2(C_G(f))$, откуда $\langle k\rangle = C_G(n)\cap C_G(n^f)$. Инволюция n сопряжена с z в $C_G(kz)$ некоторым элементом r так, что $(C_G(n))^r = S$ и $(C_G(n^f))^r = S^{r_1}$ для некоторого элемента r_1 из G. Тем самым

$$(C_G(n)\cap C_G(n^f))^r = \langle k\rangle^r = S\cap S^{r_1} \in m_G(S,S).$$

Так как элемент r действует на $O_2(C_G(kz)) = \langle k\rangle \times \langle z\rangle \times \langle n\rangle$ нетривиально и инволюция k не сопряжена с z в G, то $k^r \notin \langle k\rangle \times \langle z\rangle$. Поэтому $k^r \in T_1$. Следовательно, все нецентральные в T_1 инволюции лежат в подгруппе T. Таким образом, подгруппа T содержит две подгруппы, изоморфные D_8 и нормальные в S. Тогда $T \geq T_2 = \langle j^S\rangle\langle i^S\rangle$, где $j \in T_1\backslash Z(T_1)$. В частности, $T_2 \geq \langle km, i\rangle$ — диэдральная подгруппа. Но $(km)^i = k^i m^i = kzn$, $|km \cdot kzn| = |mn \cdot z|$ и $(mn \cdot z)^2 = (mn)^2 z^2 = z$. Следовательно, $|\langle km, i\rangle| \geq 16$. Подгруппа S не содержит диэдральных подгрупп порядка 32, значит, $\langle km, i\rangle \simeq D_{16}$, и тогда $\langle km, i\rangle = T_2 = \langle j^S\rangle\langle i^S\rangle$ в силу того, что $|j^S| = |i^S| = 4$.

Продолжая рассматривать элемент $D = S \cap S^g$ из $M_G(S,S)$ и считая, что $D_1 = S_1 \cap S_1^g \neq 1$, допустим, что $D \not\leq T_2$.

Так как в случае $D > D_1$ в разности $D\backslash D_1$ нет инволюций, поскольку $\langle i\rangle \in m_G(S,S)$ и $j = i^s$ для $s \in S$ для любой инволюции j из $S\backslash S_1$, группа D содержит элемент y порядка 4. Но каждый 2-элемент из S лежит в $S_1 \simeq C_2 \times D_8$, в $S_2 \simeq D_{16}$ или в $S_3 \simeq SD_{16}$ — полудиэдральной подгруппе, поэтому $\langle y^2\rangle \leq Z(S_0)$ и $\langle y^2\rangle \leq Z\big(S_0^g\big)$, откуда $\langle y^2\rangle = Z(S_0) = Z\big(S_0^g\big)$ и $S = S^g$ в силу того, что $S = C_G(Z(S_0)) = S^g$.

Значит, $D = D_1$. Подгруппа D не содержит инволюций из $T_1\backslash Z(T_1)$, поэтому каждая инволюция из D лежит либо в $Z(S_1)$, либо в S_0. Кроме того, если $|D| \geq 4$, то $D \cap Z(S_0) \neq 1$. Так как $\big[Z\big(S_0^g\big), D\big] = 1$, то $\big[Z\big(S_0^g\big), Z(S_0)\big] = 1$, откуда $Z\big(S_0^g\big) \leq S_0$ и $S \cap S^g \geq C_S\big(Z\big(S_0^g\big)\big) \geq \langle k\rangle \times \langle z\rangle \times Z(S_0)^g$. Поскольку $S_0 \neq S_0^g$, то $C_S\big(Z\big(S_0^g\big)\big)$ содержит инволюцию из $T_1\backslash Z(T_1)$; противоречие с выбором D. Если $|D| = 2$, то $\big\langle Z(S_0), Z\big(S_0^y\big)\big\rangle \leq C_G(D)$. В случае $D \in S_0$ имеем $C_{S_1}(D) \simeq E_8$ и, таким образом, $|C_G(D) : C_{S_1}(D)| = 2$. Значит, $Z\big(S_0^y\big)$ нормализует $C_{S_1}(D)$. Поэтому $|D| \geq \big|C_{C_{S_1}(D)}\big(Z\big(S_0^y\big)\big)\big| \geq 4$; противоречие. Если $D = \langle k\rangle$ или $D = \langle km\rangle$, то $Z\big(S_0^y\big) \leq C_G(D)$ и тем самым $Z\big(S_0^y\big)$ нормализует $O_2(C_G(D)) \simeq E_8$. Снова $|D| \geq \big|C_{O_2(C_G(D))}\big(Z\big(S_0^y\big)\big)\big| \geq 4$; противоречие. Поэтому $D \in m_G(S,S)$, $T_2 = T = \min_G(S,S) = \mathrm{Min}_G(S,S) = \langle i, j\rangle \simeq D_{16}$ и $|C_S(i)| = |C_S(j)| = 8$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2 в примарном случае

Перейдем к доказательству теоремы 2. Сохраним обозначения, введенные при доказательстве теоремы 1. Так как условия (1) и (2) теоремы 2 эквивалентны по определению, достаточно доказать, например, эквивалентность условий (2) и (3) теоремы 2.

Допустим, что справедливо условие (2) теоремы 2, т. е. $\min_G(A,B) \neq 1$ для некоторых примарных подгрупп A и B из G. Без ограничения общности можно предполагать, что A и B — подгруппы из S. Так как $\min_G(A,B) \neq 1$, тем более $\min_G(S,S) \neq 1$. По лемме 1.3 группа G не простая и так же, как при доказательстве теоремы 1, имеем $p = 2$ и $G = \mathrm{Aut}(K)$, где $K \simeq L_2(q)$ и $q = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна или $q = 9$.

Пусть $D = S \cap S^g \in m_G(S,S)$. По теореме 1 $|D| = 2$ и $S \cap S^g \geq A \cap B^g \neq 1$ в силу условия $\min_G(A,B) \neq 1$. Но $2 = |S \cap S^g| \geq |A \cap B^g| \geq 2$. Следовательно, $D \in m_G(A,B)$, и, таким образом, $T = \min_G(S,S) \leq \min_G(A,B)$. Так как $\min_G(A,B) \leq A$, то $T \leq A$. Но если $\min_G(A,B) \neq 1$, то $\min_G(B,A) \neq 1$. По предположению $B \leq S$. Стало быть, $B \geq T$, и в случае $q = 2^n - 1$ теорема 2 следует из теоремы 1 в части (2) $\Rightarrow$ (3). Допустим, что $q = 9$ и $A = B = T \simeq D_{16}$. По определению подгруппы T все ее нецентральные инволюции лежат вне $G_0 = \mathrm{Soc}(G)$ и $T \cap Z(S_1) = T \cap (\langle k\rangle \times \langle z\rangle) = \langle z\rangle$. Так как $C_G(k) \simeq C_2 \times \Sigma_4 \simeq C_G(kz)$, без ограничения общности можно считать, что инволюция m сопряжена с z некоторым элементом v из $C_G(kz)$. Тогда равенство $T\cap Z(S_1) = T\cap(\langle k\rangle\times\langle z\rangle) = \langle z\rangle$ влечет, что $(T\cap Z(S_1))^u = T^u\cap(\langle k\rangle\times\langle z\rangle)^u = T^u\cap(\langle k\rangle\times\langle z\rangle^u) = \langle z\rangle^u$ и $(T\cap Z(S_1))^v = T^v\cap(\langle kz\rangle\times\langle z\rangle)^v = T^v\cap(\langle kz\rangle\times\langle z\rangle^v) = \langle z\rangle^v$. Значит, $T^u\cap\langle k\rangle = 1$ и $T^v\cap\langle kz\rangle = 1$. Кроме того, $T^u\cap\langle z\rangle = T^v\cap\langle z\rangle = 1$. Следовательно, $T^u\cap T^z\cap Z(S_1) = 1$.

С другой стороны, если $D = T^u\cap T^v \neq 1$, то D содержится в

$$C_G(\langle Z(T^u), Z(T^v)\rangle) = C_G(\langle m, n\rangle) = C_G(S_0) = Z(S_1);$$

противоречие с тем, что $D\cap Z(S_1) = 1$. Значит, $A\neq T$ или $B\neq T$. Поэтому A или B совпадает с S в силу того, что $|S:T| = 2$, и тогда $(A,B)\in\{(S,S),(S,\min_G(S,S)),(\min_G(S,S),S)\}$. Так как $\min_G(S,S) = T\neq 1$, для любого элемента g из G имеем $S\cap S^g\geq D\in M_G(S,S)$. По теореме 1 $D\in m_G(A,B)$, $D\neq 1$ и, таким образом, $D\leq T$. Поэтому $T\cap S^g\neq 1$ для любого элемента g из G. Аналогично $S\cap T^g\neq 1$ для любого элемента g из G. Значит, $\min_G(S,T)\neq 1$ и $\min_G(T,S)\neq 1$. Рассмотрим, например, случай $\min_G(S,T)\neq 1$ и покажем, что $M_G(S,T) = m_G(S,T)$. Возьмем элемент $D = S\cap T^g\in M_G(S,T)$. Если $|D| = 2$, то ввиду $\min_G(S,T)\neq 1$ имеем $D\in m_G(S,T)$ для некоторого элемента g из G. Если $|D| > 2$, то $D\cap Z(T^g)\neq 1$ в силу того, что по теореме 1 группа T изоморфна D_{16}. Поэтому $[Z(S), Z(T^g)] = [Z(S), Z(S^g)] = 1$, так как $Z(T^g) = Z(S^g)$. Поскольку $C_G(Z(S))$ — 2-группа и $D\in M_G(S,T)$, то $Z(S)\neq Z(S^g)$ и $Z(S^g)\leq S_0$. Следовательно, без ограничения общности центр $Z(S)$ сопряжен с $Z(S^g)$ элементом из $C_G(k)$. Но тогда T^g не содержит инволюцию k, так как $T\cap Z(S_1) = Z(S)$ и $Z(S)$ и T^g не содержат z. Поэтому T^g содержит kz и, таким образом, $D\geq\langle kz\rangle\times Z(T^g)$. Но в подгруппе $\langle kz\rangle\times Z(T^g) = \langle kz\rangle\times\langle z^g\rangle$ инволюция $r = kz\cdot z^g$ лежит вне $Z(S_1)$. По теореме 1 $\langle r\rangle\in m_G(S,S)$, где $\langle m_G(S,S)\rangle = T$, тем самым $D > S\cap S^x = \langle r\rangle = S\cap T^x$, так как r — нецентральная инволюция в S_1^x, а потому лежит в T^x. Противоречие с выбором D. Следовательно, $M_G(S,T) = m_G(S,T)$. Аналогично $M_G(T,S) = m_G(T,S)$. Стало быть, (2) $\Rightarrow$ (3) в теореме 2 для примарных подгрупп доказано.

(3) $\Rightarrow$ (2) Для пары $(A,B) = (S,S)$ это доказано в [8, леммы 3.18(2), 3.27(2д)]. Если $(A,B) = (T,S)$, где $T = \min_G(A,B)$, то из $\min_G(S,S)\neq 1$ следует, что для любого элемента g из G будет $D = S\cap S^g\geq D_1\in M_G(S,S)$. По теореме 1 имеем $1\neq D_1\in m_G(S,S)$. Поэтому $D_1\leq T$ и, таким образом, $T\cap S^g\neq 1$. Значит, $\min_G(T,S)\neq 1$. Так как $T\cap S^g\neq 1$ для любого элемента g из G, то $1\neq T\cap S^g = (S\cap T^{g^{-1}})^g$ влечет, что $S\cap T^{g^{-1}}\neq 1$ для любого элемента g из G. Поэтому $\min_G(S,T)\neq 1$. Теорема 2 для примарных подгрупп доказана.

4. Доказательство теоремы 2 в непримарном случае

Сохраним обозначения, введенные в начале доказательства теоремы 1, и выберем в качестве группы G контрпример к теореме 2. При этом порядок G выберем минимальным. Далее в группе G пару нильпотентных подгрупп A и B с условием $\min_G(A,B)\neq 1$ выберем так, чтобы число $|A||B|$ было минимальным. Последующие леммы будем доказывать при этих условиях.

Лемма 4.1. *Следующие утверждения справедливы для группы G и подгрупп A и B:*

(1) *подгруппы A и B непримарны;*

(2) *хотя бы одна из подгрупп, скажем A, неабелева, при этом B нециклическая;*

(3) $G = A\,\mathrm{Soc}(G) = B\,\mathrm{Soc}(G)$;

(4) $\pi(A) = \pi(B)$;

(5) *фактор-группа* $\overline{G} = G/_{\mathrm{Soc}(G)}$ *абелева.*

Доказательство. (1) Так как теорема 2 в случае, когда обе подгруппы примарны, доказана, получаем, что хотя бы одна из подгрупп, скажем A, непримарна. Если при этом $|\pi(B)| \geq 2$, утверждение (1) леммы доказано. Если $\pi(B) = \{p\}$, то для пары $(A, B) = (O_p(A), B)$ имеем $\min_G(O_p(A), B) \neq 1$ и по теореме 2 имеем $p = 2$ и $O_2(A) \geq \min_G(S, S)$. Поскольку $Z(\min_G(S, S)) \simeq C_2$ и $C_G(Z(\min_G(S, S)))$ — 2-группа, то A — 2-группа; противоречие. П. (1) леммы доказан.

(2) По леммам 1.1 и 1.2 справедлив п. (2).

(3) Допустим, что $G_1 = \mathrm{Soc}(G)A \neq G$. Пусть $B_1 = B \cap G_1$. Тогда по индукции либо $A \cap B_1^{g_1} = 1$ для некоторого элемента g_1 из G_1, либо G_1 известна, при этом A — 2-группа, что невозможно по п. (1). Значит,

$$A \cap (B \cap G_1)^{g_1} = A \cap (B^{g_1} \cap G_1) = A \cap B^{g_1} = 1;$$

противоречие. Аналогично для $G_2 = \mathrm{Soc}(G)B$ показываем, что $B \cap A^{g_2} = 1$ для некоторого элемента g_2 из G_2. П. (3) леммы доказан.

(4) Если $\pi(A) \neq \pi(B)$, то без ограничения общности в $\pi(A)$ содержится элемент p, не лежащий в $\pi(B)$. Тогда $\min_G(O_{p'}(A), B) = \min_G(A, B) \neq 1$ и выбор числа $|A||B|$ ведет к противоречию. П. (4) леммы доказан.

(5) Согласно [6, с. XVI] $\mathrm{Aut}(K) \simeq \mathrm{Inn\,diag}(K) \leftthreetimes C_n$, где $K \simeq L_2(q)$, $q = t^n$ и C_n — циклическая подгруппа порядка n. Так как $\mathrm{Out\,diag}(K)$ изоморфно вкладывается в C_2, то $\overline{G} = G/_{\mathrm{Soc}(G)}$ абелева. Лемма доказана.

Лемма 4.2. $G \not\leq \mathrm{Inn\,diag}(K)$.

Доказательство. Допустим, что $G \leq \mathrm{Inn\,diag}(K)$. По лемме 4.1(1),(2) подгруппа A неабелева и непримарна. Следовательно, $|Z(A)|$ делится, по крайней мере, на два простых числа. Значит, хотя бы одно из них нечетное. Согласно [6, с. XVI] $|G| \leq q(q^2 - 1)$, причем подгруппы порядков $q - 1$ и $q + 1$ из $\mathrm{Inn\,diag}(K)$ циклические, а силовская t-подгруппа S_t из G порядка q элементарная абелева и сильно изолированная в G, т. е. $C_G(x) \leq S_t$ для любого неединичного элемента x из S_t. То же самое справедливо и для элементов нечетного порядка для подгрупп T_1 и T_2 из $\mathrm{Inn\,diag}(K)$ порядков $q - 1$ и $q + 1$ соответственно, что доказано, например, в [11, гл. 1, § 1] Тогда в силу неабелевости A, леммы 4.1(5) и сильной изолированности S_t имеем $(t, |A|) = 1$. Но $Z(A) \cap \mathrm{Soc}(G) \neq 1$ ввиду $|\,\mathrm{Out\,diag}(K)| \leq 2$ и $O(Z(A) \cap \mathrm{Soc}(G)) \neq 1$. Следовательно, $A \leq C_G(O(Z(A))) \leq T_1$ или $A \leq T_2$; противоречие с неабелевостью $\leq A$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Подгруппа A содержит элемент x простого порядка p, где p делит n, индуцирующий на $\mathrm{Soc}(G)$ полевой автоморфизм такой, что $x \notin Z(A)$.*

Доказательство. По лемме 4.2 A не содержится в $\mathrm{Inn\,diag}(K)$, $K \simeq L_2(q)$, $q = t^n > 3$. Следовательно, из равенства $\mathrm{Aut}(K) = \mathrm{Inn\,diag}(K) \leftthreetimes C_n$ вытекает, что $n > 1$. По лемме 4.1(3) $G = \mathrm{Soc}(G)A$, значит, $A \cap \mathrm{Inn\,diag}(K) \neq A$. Если в разности $A \backslash A \cap \mathrm{Inn\,diag}(K)$ нет элементов простого порядка, то $\min_G(A_1, B) = \min_G(A, B)$, где $A_1 = A \cap \mathrm{Inn\,diag}(K)$; противоречие с выбором числа $|A||B|$. Стало быть, в $A \backslash A_1$ есть элемент x простого порядка p, индуцирующий на $\mathrm{Soc}(G)$ полевой автоморфизм. Но в таком случае p делит n. Допустим, что $x \in Z(A)$. Тогда $C = C_G(x) \geq A$ и согласно [12, (9-1)] $C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(x) \simeq \mathrm{Inn\,diag}(L_2(t^{n/p}))$.

Следовательно, если $C_{\mathrm{Inn}}(x)$ — неразрешимая подгруппа, то $t^{n/p} > 3$ и с учетом [12, (9-8)] фактор-группа $\overline{C} = C_G(x)/_{\langle x\rangle}$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(L_2(t^{n/p}))$. По лемме 4.1 имеем $|x| < |A|$. Поэтому $|A||B| > |x||B|$ и выбор числа $|A||B|$ влечет, что $B^g \cap \langle x\rangle = 1$ для некоторого элемента g из G. Положим $B_1 = C_G(x) \cap B^g$, и пусть $\overline{A}$, $\overline{B}_1$ — образы подгрупп A и B_1 в $\overline{C}$.

Если $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \bar{1}$, то по лемме 1.6 имеем $\min_G(A, B) = 1$; противоречие с выбором A и B.

Если $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) \neq \bar{1}$, то по индукции $\overline{C} \simeq \mathrm{Aut}(L_2(t^{n/p}))$, где либо $t^{n/p} = 2^r - 1 > 3$ — простое число Мерсенна и без ограничения общности $\overline{A} = \overline{B}_1 \in \mathrm{Syl}_2(\overline{C})$, либо $t^{n/p} = 9$ и без ограничения общности для подгрупп $\overline{A}$ и $\overline{B}_1$ из силовской 2-подгруппы $\overline{Q}$ из $\overline{C}$ имеем $\overline{A} \cap \overline{B}_1 \geq \min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) \simeq D_{16}$.

По лемме 4.1 $|\pi(A)| = |\pi(B)| \geq 2$. Так как $C_G(x) \geq A$ и $C_{\overline{C}}(\bar{z})$ — 2-группа для инволюции $\bar{z}$ из $\overline{A} \cap \mathrm{Soc}(\overline{C})$, то $p > 2$, поэтому $C = C_G(x) \simeq C_p \times \mathrm{Aut}(L_2(t^{n/p}))$ и $\min_C(A, B_1) \neq 1$. По теореме 1 в $O^{2'}(C)$ либо $O_2(A)$, либо B_1 является силовской 2-подгруппой и $|O_2(A) : \min_C(A, B_1)| \leq 2$ и $|B_1 : \min_C(A, B_1)| \leq 2$.

Значит, без ограничения общности $A \leq C_G(z)$, где z — единственная инволюция из прообраза для $\bar{z}$. Поскольку $C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(z) \simeq D_{2(q-\varepsilon 1)}$, где 4 делит $(q - \varepsilon 1)$, каждая инволюция из $C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(z) \backslash \langle z\rangle$ инвертирует подгруппу $R = O(C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(z)) \neq 1$ ввиду $t^{n/p} = 9$ или $2^r - 1$.

Заметим, что $C_R(x) = 1$, иначе $C_{\overline{C}}(\bar{z})$ не 2-группа. Поэтому $\langle x\rangle$ действует нетривиально на $R_2 = \Omega(R_1)$, где R_1 — некоторая силовская подгруппа из R. Так как A нормализует R_2, для подгруппы $G_1 = R_2 A$ имеем $\langle z\rangle \leq A_2 = C_A(R_2) \neq A$ и фактор-группа $\overline{G}_1 = G_1/_{A_2}$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(R_2)$. Тогда выбор пары A, B влечет, что $A_2 \cap B^g = 1$ для некоторого g из G. Поскольку $\mathrm{Aut}(R_2)$ — циклическая группа, для подгруппы $B_1 = G_1 \cap B^g$ в фактор-группе $\overline{G}_1$ в силу того, что $\overline{G}_1$ — группа Фробениуса, имеем $\min_{\overline{G}_1}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \bar{1}$ из-за $(|\overline{A}|, 2) = 2$ и $(2, |R_2|) = 1$. По лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$; противоречие с выбором A и B.

Пусть $C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(x)$ — разрешимая подгруппа. Тогда $t^{n/p} < 4$ и либо $t = 2$, и в этом случае A — абелева подгруппа, что невозможно, либо $t = 3$, $C_G(x)$ изоморфно вкладывается в разрешимую подгруппу $C_p \times PGL_2(3)$ из G, $A \simeq C_p \times D_8$ в силу непримарности и неабелевости A. Так как $F(C_G(x)) \simeq C_p \times E_4$, то $|F(C_G(x))| < |A|$ и выбор числа $|A||B|$ влечет, что $F(C_G(x)) \cap B^h = 1$ для некоторого элемента h из G. Пусть $B_1 = C_G(x) \cap B^h$ и $\overline{C} = C_G(x)/_{F(C_G(x))} \simeq \Sigma_3$. Тогда $|\overline{A}| = 2$ и $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = 1$. По лемме 1.6 имеем $A \cap B^{h_2} = 1$ для некоторого элемента h_2 из G; противоречие с выбором A и B. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *G не контрпример к теореме.*

Доказательство. Допустим, что G — контрпример к теореме. По лемме 4.1(3) $G = A\,\mathrm{Soc}(G) = B\,\mathrm{Soc}(G)$, а по [6, с. XVI] G изоморфно вкладывается в $\mathrm{Inn\,diag}(K) \leftthreetimes C_n$, где $K \simeq L_2(q)$, $q = t^n$, t — простое число. В лемме 4.2 доказано, что $G \not\leq \mathrm{Inn\,diag}(K)$, поэтому $n > 1$, а в лемме 4.3 доказано, что для любого элемента x простого порядка P из A, индуцирующего на $\mathrm{Soc}(G)$ полевой автоморфизм, $x \notin Z(A)$. Таким образом, силовская p-подгруппа из A неабелева, и $O_p(A) \cap \mathrm{Soc}(G) \neq 1$ по лемме 4.1(5). Так как по лемме 4.1(1) A непримарна, то $Z(A)$ непримарен и $Z(A) \leq \mathrm{Inn\,diag}(K) \cap A$. Следовательно,

$(t, |Z(A)|) = 1$ из-за сильной изолированности неединичных элементов из силовской t-подгруппы в G' относительно $\operatorname{Inn}\operatorname{diag}(K) \cap G$. Поскольку $Z(A)$ содержит неединичный элемент f нечетного порядка r, этот элемент из-за сильной изолированности в содержащей его подгруппе T из $C_{\operatorname{Inn}\operatorname{diag}(K)\cap G}(x)$ порядка $\frac{\sqrt[p]{q}-1}{(2,q-1)}$ или $\frac{\sqrt[p]{q}+1}{(2,q-1)}$ однозначно определяет T, а также и содержащую T подгруппу T_1 из $\operatorname{Inn}\operatorname{diag}(K) \cap G$ порядка $\frac{q-1}{(2,q-1)}$ или $\frac{q+1}{(2,q-1)}$. Если эти четыре числа умножить на общий множитель $(2, q-1)$, то по лемме 1.9 для чисел вида $t^n \pm 1 = q \pm 1$ существует примитивный простой делитель, за исключением следующих случаев.

(i) $\varepsilon = +$, $n = 6$, $t = 2$.

В этом случае G изоморфно вкладывается в $L(2^6) \leftthreetimes C_6$. Если в A содержится элемент y порядка 6, индуцирующий на $\operatorname{Soc}(G)$ полевой автоморфизм, то $C_G(y) \simeq C_6 \times \Sigma_3$ и силовские подгруппы из A абелевы, что невозможно. Значит, либо $G \simeq L_2(2^6) \leftthreetimes C_3$, либо $G \simeq L_2(2^6) \leftthreetimes C_2$. В обоих случаях для элемента x, индуцирующего полевой автоморфизм на $\operatorname{Soc}(G)$, по теореме Бэра — Судзуки имеем $\langle x\rangle \cap B^g = 1$ для $\langle x\rangle \simeq C_2$ или $\langle x\rangle \simeq C_3$, и для $C = C_G(x)$ в фактор-группе $\overline{C} = C/_{\langle x\rangle}$ по индукции и теореме 2 для подгрупп $\overline{A}$ и $\overline{B}_1$, где $B_1 = B^g$, будет $\min_{\overline{G}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = 1$. По лемме 1.6 $A \cap B^{g_1} = 1$ для некоторого g_1 из G; противоречие с тем, что $\min_G(A, B) \neq 1$.

(ii) $\varepsilon = +$, $n = 2$, $t = 2^l - 1$ для некоторого $l \geq 2$.

В этом случае $t = 2^l - 1$ — простое число Мерсенна и G изоморфно вкладывается в $PGL_2(t^2) \leftthreetimes C_2$. Поэтому $|x| = 2$ и $C_G(x) \simeq PGL_2(t)$. Так как A неабелева, она содержит инволюцию из $C_{G'}(x)$. Но централизаторы инволюций в $C_{G'}(x)$ являются 2-группами. Поэтому A примарна; противоречие с леммой 3(1).

(iii) $\varepsilon = -$, $n = 3$, $t = 2$.

В этом случае $G \simeq \operatorname{Aut}(L_2(8))$, $C_{G'}(x) \simeq \Sigma_3$ и силовская 2-подгруппа из A абелева; противоречие.

(iv) $\varepsilon = -$, $n = 2$, $t = 2^l + 1$, $l \geq 0$.

В этом случае G изоморфно вкладывается в $PGL_2(t^2) \leftthreetimes C_2$ и, как в п. (ii), неабелевость A влечет, что A содержит инволюцию i из G' и $C_G(i)$ — 2-группа; противоречие.

Следовательно, в оставшихся случаях для группы $\operatorname{Inn}\operatorname{diag}(K)$ по лемме 1.9 каждое из чисел $q-1$ и $q+1$ имеет примитивный простой делитель $t_{\{\varepsilon n\}}$. Так как A нормализует каждую силовскую подгруппу из T_1, она нормализует циклическую силовскую $t_{\{\varepsilon n\}}$-подгруппу R из T_1, причем элемент x из A действует нетривиально на $\Omega(R)$. Действительно, допустим, что $\Omega(R) = \langle\omega\rangle \leq C_G(x)$. Тогда $t_{\{\varepsilon p\}} = |\omega|$ — примитивный простой делитель какого-либо из чисел $q-1$ или $q+1$. Из определения $t_{\{\varepsilon p\}}$ следует, что $t_{\{\varepsilon p\}} > 2$. Покажем, что $t_{\{\varepsilon p\}}$ не делит число $|PGL_2(\sqrt[p]{q})| = |C_{\operatorname{Inn}\operatorname{diag}(K)}(x)| = \sqrt[p]{q}(\sqrt[p]{q}-1)(\sqrt[p]{q}+1)$. Действительно, если $t_{\{\varepsilon p\}}$ делит $\sqrt[p]{q}(\sqrt[p]{q}-1)(\sqrt[p]{q}+1)$, то либо $t_{\{\varepsilon p\}}$ делит $\sqrt[p]{q}-1$, либо $t_{\{\varepsilon p\}}$ делит $\sqrt[p]{q}+1$. В любом случае из-за сильной изолированности элемента ω в содержащей его подгруппе порядка $q-1$ или $q+1$ и абелевости подгрупп порядков $\sqrt[p]{q}+1$ и $\sqrt[p]{q}-1$ имеем, что либо $\sqrt[p]{q}-1$, либо $\sqrt[p]{q}+1$ делит одно из чисел $q-1$ или $q+1$, а именно то, для которого $t_{\{\varepsilon p\}}$ является примитивным простым делителем.

Если $t_{\{\varepsilon p\}}$ является примитивным простым делителем для $q-1$, то $t_{\{\varepsilon p\}}$ по определению при $\varepsilon = 1$ не делит $\sqrt[p]{q}-1$. Но тогда $t_{\{\varepsilon p\}}$ делит $\sqrt[p]{q}+1$. Следовательно, при $p > 2$ $t_{\{\varepsilon p\}}$ делит $q+1$. В этом случае $t_{\{\varepsilon p\}}$ делит $(q+1)-$

$(q-1)=2$; противоречие с тем, что $t_{\{\varepsilon p\}}>2$.

При $p=2$ имеем $q-1=(\sqrt[p]{q}-1)(\sqrt[p]{q}+1)$ и $t_{\{\varepsilon 2\}}$ не является примитивным простым делителем для $q-1$ по определению при $\varepsilon=-1$.

Если $t_{\{\varepsilon p\}}$ является примитивным простым делителем для $q+1$, то $t_{\{\varepsilon p\}}$ при $p>2$ по определению при $\varepsilon=-1$ не делит $\sqrt[p]{q}+1$. Следовательно, $t_{\{\varepsilon p\}}$ делит $\sqrt[p]{q}-1$. Но тогда $t_{\{\varepsilon p\}}$ делит $q-1$. Поэтому $t_{\{\varepsilon p\}}$ делит $(q+1)-(q-1)=2$; противоречие с тем, что $t_{\{\varepsilon p\}}>2$. Если $p=2$ и $t_{\{\varepsilon 2\}}$ делит либо $\sqrt{q}+1$, либо $\sqrt{q}-1$, то $t_{\{\varepsilon 2\}}$ делит q^2-1. Но тогда $t_{\{\varepsilon 2\}}$ делит $(q^2+1)-(q^2-1)=2$; противоречие с тем, что $t_{\{\varepsilon 2\}}>2$. Поэтому $\Omega(R)$ не лежит в $C_G(x)$. Пусть $G_1=\Omega(R)A$. Так как A — неабелева подгруппа, а $\mathrm{Aut}(\Omega(R))$ — циклическая подгруппа ввиду $t_{\{\varepsilon n\}}>2$, то $1<C_A(\Omega(R))=A_1<A$.

Выбор числа $|A||B|$ влечет, что $A_1\cap B^{f_1}=1$ для некоторого элемента f_1 из G_1. В фактор-группе $\overline{G}_1=G_1/_{A_1}$, изоморфно вложенной в $C_{t_{\{\varepsilon n\}}}\leftthreetimes C_{t_{\{\varepsilon n\}}-1}$, $\overline{A}\leq C_{t_{\{\varepsilon n\}}-1}$ и для подгруппы $B_1=G_1\cap B^{f_1}$ имеем $\overline{A}\cap\overline{B}_1^{\bar{d}}=\bar{1}$ для некоторого элемента $\bar{d}$ из $\overline{G}_1$ ввиду того, что $\overline{G}_1$ — группа Фробениуса. По лемме 1.6 $A\cap B^{d_1}=1$ для некоторого элемента d_1 из G; противоречие с условием $\min_G(A,B)\neq 1$. Лемма доказана.

Итак, случай $|\pi(A)|\geq 2$ ведет к противоречию. Поэтому A и B — примарные группы, и теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д., Зенков В. И.* О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 56, № 2. С. 150–152.
2. *Зенков В. И.* Пересечения абелевых подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1994. № 56. С. 869–871.
3. *Jamali A. R., Viseh M.* On nilpotent subgroups containing nontrivial normal subgroups // J. Group Theory. 2010. V. 13, N 4. P. 411–416.
4. *Silmons J., Zalesskii A.* Regular orbits of cyclic subgroups in permutation representations of certain simple groups // J. Algebra. 2000. V. 226. P. 451–478.
5. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные задачи теории групп. Изд. 17-е. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. http://math.usc.ru/alglog/17kt/pdf.
6. *Conway J. H., et al.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
7. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1996.
8. *Зенков В. И.* Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 1. С. 1–92.
9. *Зенков В. И.* О пересечениях нильпотентных подгрупп в конечных симметрических и знакопеременных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 145–149.
10. *Заварницин А. В., Мазуров В. Д.* О порядках элементов в накрытиях простых групп $L_n(q)$ и $U_n(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 89–98.
11. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
12. *Gorenstein D., Lyons R.* The local structure of finite groups of characteristic 2 type. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 42).

Статья поступила 14 октября 2015 г., окончательный вариант — 7 июня 2016 г.

Зенков Виктор Иванович
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
zenkov@imm.uran.ru