Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 512.554

ПРОСТЫЕ ЙОРДАНОВЫ СУПЕРАЛГЕБРЫ С АССОЦИАТИВНОЙ НИЛЬ–ПОЛУПРОСТОЙ ЧЕТНОЙ ЧАСТЬЮ

В. Н. Желябин

Аннотация. Изучаются простые бесконечномерные абелевы йордановы супералгебры, не изоморфные супералгебре билинейной формы. Доказано, что четная часть такой супералгебры является дифференциально простой ассоциативной коммутативной алгеброй, а нечетная часть — конечно порожденным проективным модулем ранга 1. Описаны простые унитальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью, у которых два четных элемента индуцируют ненулевое дифференцирование.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.606

Ключевые слова: йорданова супералгебра, супералгебра векторного типа, йорданова скобка, дифференциальная алгебра, проективный модуль.

Простые унитальные конечномерные йордановы супералгебры были описаны в [1–5]. В [6] описаны простые унитальные бесконечномерные градуированные йордановы алгебры, у которых размерности однородных компонент имеют ограниченный рост.

Примеры бесконечномерных простых йордановых супералгебр можно получить, используя процесс удвоения Кантора, из ассоциативной суперкоммутативной супералгебры, на которой задана йорданова скобка, например, скобка векторного типа или скобка Пуассона (см. [7]). Если йорданова скобка задана на ассоциативно-коммутативной алгебре, то четная часть полученной йордановой супералгебры ассоциативна, а нечетная является ассоциативным модулем над четной частью. Такие супералгебры, следуя [8], будем называть *абелевыми*. Различные свойства супералгебр векторного типа и йордановых скобок изучались в [9–12].

Простые бесконечномерные унитальные специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью исследовались в [13, 14]. В частности, там показано, что для четной части A и нечетной M справедливо $(A, M, A) = 0$, т. е. любые два четных элемента индуцируют нулевое дифференцирование. Кроме того, в [13, 14] описаны простые унитальные специальные абелевы йордановы супералгебры, не изоморфные супералгебре невырожденной билинейной формы. Как оказалось, такие супералгебры являются супералгебрами векторного типа относительно нескольких дифференцирований. В [14–16] построены примеры простых йордановых супералгебр векторного типа относительно двух дифференцирований. Данные примеры являются ответом на вопрос Кантарини —

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14–21–00065).

Каца, сформулированный в работе [17], в которой описаны простые линейно компактные йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Здесь также следует отметить работу [18].

В настоящей работе изучаются простые бесконечномерные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью. Доказано, что простая абелева йорданова супералгебра является либо супералгеброй невырожденной билинейной формы, либо порядком в простой супералгебре йордановых скобок. Описаны простые унитальные йордановы супералгебры с ассоциативной нильполупростой четной частью. А именно, если $J = A + M$ такая супералгебра и $N = (A, M, A) \neq 0$, то четная часть $A = A_0 + A_1$ — Z_2-градуированная алгебра, A_1 — конечно порожденный проективный A_0-модуль ранга 1, нечетная часть $M = N + M_0$ — прямая сумма конечно порожденных проективных A_0-модулей ранга 1 и $A_0 + M_0$ — простая абелева подсупералгебра в J. Кроме того, если $A_1 = A_0 s$ и $s^2 = 1$, то $J \cong J(A_0, M_0, M_0^*)$. Супералгебры типа $J(A_0, M_0, M_0^*)$ введены в [14, 19].

Пусть F — поле характеристики не 2, $A = A_0 + A_1$ — произвольная $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра, т. е. $A_0^2 \subseteq A_0$, $A_1^2 \subseteq A_0$, $A_0 A_1 \subseteq A_1$, $A_1 A_0 \subseteq A_1$. Алгебру A будем называть *супералгеброй.* Пространство $A_0(A_1)$ называется четной (нечетной) частью Z_2-градуированной алгебры A. Элементы множества $A_0 \cup A_1$ называются *однородными.* Выражение $|x|$, где $x \in A_0 \cup A_1$, означает индекс четности однородного элемента x:

$$|x| = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A_0 \ (x \text{ четный}), \\ 1, & \text{если } x \in A_1 \ (x \text{ нечетный}). \end{cases}$$

Пусть G — алгебра Грассмана над F, т. е. ассоциативная алгебра, заданная образующими $1, e_1, e_2, \ldots$ и определяющими соотношениями

$$e_i^2 = 0, \quad e_i e_j = -e_j e_i.$$

Произведения $1, e_{i_1} \ldots e_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, образуют базис алгебры G. Пусть G_0, G_1 — векторные подпространства, порожденные произведениями четной и нечетной длины соответственно. Тогда $G = G_0 + G_1$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра.

Пусть $A = A_0 + A_1$ — произвольная $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра. Тогда $G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$ является подалгеброй в алгебре $G \otimes A$ (тензорное произведение над полем F) и называется *грассмановой оболочкой алгебры* A.

Супералгебра $J = J_0 + J_1$ называется *йордановой супералгеброй* тогда и только тогда, когда ее грассманова оболочка $G(J)$ — йорданова алгебра, т. е. в $G(J)$ выполняются тождества

$$xy = yx, \quad (x^2 y)x = x^2(yx).$$

Четную часть супералгебры J будем обозначать через A, нечетную — через M. В йордановой супералгебре J справедливы следующие тождества для однородных элементов:

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}[(ab)c]d + (-1)^{|b||c|+|b||d|+|c||d|}[(ad)c]b + (-1)^{|a|(|b|+|c|)+(|a|+|b|+|c|)|d|}[(db)c]a \\ = (ab)(cd) + (-1)^{|b||c|}(ac)(bd) + (-1)^{|b||d|+|c||d|}(ad)(bc),\end{aligned} \tag{2}$$

$$(ab, c, d) + (-1)^{|b||c|+|c||d|+|d||b|}(ad, c, b) + (-1)^{|a|(|b|+|c|+|d|)+|d||c|}(bd, c, a) = 0, \tag{3}$$

где $(x,y,z)=(xy)z-x(yz)$ — ассоциатор элементов x,y,z. Отсюда следует

$$(a,bc,d)=(-1)^{|a||b|}b(a,c,d)+(-1)^{|c||d|}(a,b,d)c, \tag{4}$$

$$(a,b,c)+(-1)^{|a||b|+|a||c|}(b,c,a)+(-1)^{|a||c|+|b||c|}(c,a,b)=0. \tag{5}$$

Йорданова супералгебра называется *абелевой*, если ее четная часть A является ассоциативной алгеброй, а нечетная часть M — ассоциативный A-модуль.

Приведем некоторые примеры йордановых супералгебр.

1. **Супералгебра билинейной формы.** Пусть $V=V_0\oplus V_1$ — линейное Z_2-градуированное векторное пространство над F с суперсимметрической билинейной формой $f(x,y)$ (т. е. форма f симметрична на V_0, кососимметрична на V_1 и $f(V_0,V_1)=0$). Рассмотрим прямую сумму векторных пространств $J=F\cdot 1+V$. Определим умножение на J, полагая $1\cdot v=v\cdot 1=v$, $v_1\cdot v_2=f(v_1,v_2)\cdot 1$. Тогда J — йорданова супералгебра с четной частью $A=F\cdot 1+V_0$ и нечетной частью $M=V_1$. Если форма f невырожденна, то J — простая супералгебра, за исключением случая $V_1=0$, $V_0=F\cdot e$ и $f(e,e)=\alpha^2$.

2. **Дубль Кантора $J(\Gamma,\{\,,\})$.** Пусть $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с единицей 1 и $\{\,,\}:\Gamma\mapsto\Gamma$ — суперкососимметрическое билинейное отображение, которое будем называть *скобкой*. По супералгебре Γ и скобке $\{\,,\}$ можно построить супералгебру $J(\Gamma,\{\,,\})$. Рассмотрим $J(\Gamma,\{\,,\})=\Gamma\oplus\Gamma x$, прямую сумму векторных пространств, где Γx — изоморфная копия пространства Γ. Пусть a,b — однородные элементы из Γ. Тогда операция умножения $\cdot$ на $J(\Gamma,\{\,,\})$ определяется формулами

$$a\cdot b=ab,\quad a\cdot bx=(ab)x,\quad ax\cdot b=(-1)^{|b|}(ab)x,\quad ax\cdot bx=(-1)^{|b|}\{a,b\},$$

где $a,b\in\Gamma_0\cup\Gamma_1$ и ab — произведение элементов a,b в Γ. Положим $A=\Gamma_0+\Gamma_1x$ и $M=\Gamma_1+\Gamma_0x$. Тогда $J(\Gamma,\{\,,\})=A+M$ является Z_2-градуированной алгеброй.

Скобка $\{\,,\}$ называется *йордановой*, если супералгебра $J(\Gamma,\{\,,\})$ является йордановой супералгеброй.

Если $J(\Gamma,\{\,,\})$ — йорданова супералгебра, то отображение $D:\Gamma\mapsto\Gamma$, заданное правилом $D(a)=\{a,1\}$, является супердифференцированием.

3. **Супералгебра векторного типа $J(\Gamma,D)$.** Пусть Γ — ассоциативная коммутативная F-алгебра с ненулевым дифференцированием D. Определим на Γ скобку $\{\,,\}$, полагая

$$\{a,b\}=D(a)b-aD(b).$$

Тогда $J(\Gamma,D)=J(\Gamma,\{\,,\})$ является йордановой супералгеброй и называется *супералгеброй векторного типа*.

4. **Добавление нечетной переменной.** Пусть K — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей 1 и заданной на ней йордановой скобкой $\langle\,,\rangle$. Рассмотрим пространство $\Gamma=K\oplus Kn$, где Kn — изоморфная копия пространства K. Положим $\Gamma_0=K$, а $\Gamma_1=Kn$. Определим на $\Gamma=\Gamma_0\oplus\Gamma_1$ операцию умножения $\cdot$ и скобку $\{\,,\}$, полагая

$$(a+bn)\cdot(c+dn)=ac+(ad+cb)n,$$

$$\{a,b\}=\langle a,b\rangle,\quad \{a,bn\}=-\{bn,a\}=(\langle a,b\rangle-b\langle a,1\rangle)n,\quad \{an,bn\}=-ab,$$

где $a,b\in K$ и ab — произведение в K. Как известно, $\{\,,\}$ — йорданова скобка. Поэтому супералгебра $J(\Gamma,\{\,,\})$ является йордановой супералгеброй, которую будем обозначать через $J(K[n],\{\,,\})$.

Приведем еще одно представление $J(K[n],\{\,,\})$ (см. [14]). Ее четная часть $A=K+Ks$, нечетная часть $M=Kn+Km$. Умножение в $J(K[n],\{\,,\})$ относительно этого представления определяется формулами

$$(a+bs)\cdot(c+ds)=ac+bd+(ad+cb)s,$$

$$(a+bs)\cdot(dn+cm)=(\langle b,c\rangle+b\langle c,1\rangle+ad)n+(ac)m,$$

$$am\cdot bm=\{a,b\},\quad an\cdot bm=(ab)s,\quad an\cdot bn=0,$$

где $a,b,c,d\in K$.

Заметим, что $(Ks,m,K)=0$ в супералгебре $J(K[n],\{\,,\})$ тогда и только тогда, когда $J(K,\langle\,,\rangle)$ — супералгебра векторного типа. Действительно, пусть $a,b\in K$. Тогда

$$(as,m,b)=(\langle a,1\rangle b-\langle a,b\rangle-a\langle b,1\rangle)n,$$

поэтому если $\langle\,,\rangle$ — скобка векторного типа, то $(Ks,m,K)=0$. Если $(Ks,m,K)=0$, то

$$\langle a,b\rangle=\langle a,1\rangle b-a\langle b,1\rangle$$

для любых $a,b\in K$, т. е. $\langle\,,\rangle$ — скобка векторного типа.

Конструкция добавления одной нечетной переменной обобщена в [19]. А именно, пусть $J=A+M$ — абелева йорданова супералгебра и Φ — A-подмодуль в $\mathrm{Hom}_A(M,A)$, содержащий все A-гомоморфизмы вида $\phi_{a,x}:y\in M\mapsto(a,y,x)\in A$ и удовлетворяющий условию $\phi(x)y=x\phi(y)$ для всех $\phi\in\Phi$, $x,y\in M$. Рассмотрим векторное пространство

$$J(A,M,\Phi)=(A\oplus As)\oplus(M\oplus\Phi),$$

где As — изоморфная копия пространства A, и определим на $J(A,M,\Phi)$ операцию умножения, полагая

$$(a+bs)\cdot(c+ds)=ac+bd+(ad+bc)s,$$

$$a\cdot x=ax,\quad a\cdot\phi=\phi\cdot a=a\phi,\quad (as)\cdot\phi=0,\quad (as)\cdot x=\phi_{a,x},$$

$$x\cdot y=xy,\quad \phi\cdot x=-x\cdot\phi=\phi(x)s,\quad \phi\cdot\psi=0,$$

где $a,b,c,d\in A$, $x,y\in M$, $\phi,\psi\in\Phi$ и в правых частях равенств стоит произведение элементов из J, $a\phi$ — A-модульное действие на $\mathrm{Hom}_A(M,A)$. Тогда $J(A,M,\Phi)$ — йорданова супералгебра с четной частью $A+As$ и нечетной $M+\Phi$. Если супералгебра J проста, то супералгебра $J(A,M,\Phi)$ также проста, причем либо $\Phi=0$, либо $\Phi=M^*=\mathrm{Hom}_A(M,A)$. Заметим, что для $a,b\in A$ и $x\in M$ в $J(A,M,\Phi)$

$$(as,x,b)=b\phi_{a,x}-\phi_{a,bx}.$$

Как показано в [14], если $J=A+M$ — простая унитальная специальная йорданова супералгебра с ассоциативной четной частью, то $(A,M,A)=0$, где (A,M,A) — векторное подпространство, порожденное ассоциаторами вида (a,m,b), где $a,b\in A$, $m\in M$.

§ 1. Простые абелевы йордановы супералгебры

В этом параграфе опишем некоторые свойства простой абелевой йордановой супералгебры $J=A+M$.

Лемма 1. *Пусть $J = A + M$ — абелева йорданова супералгебра. Тогда для $x, y \in M$ отображение $D_{x,y} : A \mapsto A$, заданное правилом $D_{x,y}(a) = (a, x, y)$, является дифференцированием.*

Доказательство. Заметим, что в любой алгебре справедливо тождество

$$x(y, z, t) = (xy, z, t) + (x, y, zt) - (x, yz, t) - (x, y, z)t. \tag{6}$$

Тогда для $a, b \in A$ в силу (4) получаем

$$\begin{aligned} aD_{x,y}(b) &= D_{x,y}(ab) + (a, b, xy) - (a, bx, y) - (a, b, x)y \\ &= D_{x,y}(ab) - b(a, x, y) - x(a, b, y) = D_{x,y}(ab) - bD_{x,y}(a). \end{aligned}$$

Следовательно, $D_{x,y}(ab) = aD_{x,y}(b) + D_{x,y}(a)b$.

Лемма 2. *Пусть $J = A + M$ — простая абелева йорданова супералгебра. Тогда алгебра A дифференциально проста относительно множества дифференцирований $\Delta = \{D_{x,y} \mid x, y \in M\}$ алгебры A. Более того, J — унитальная супералгебра.*

Доказательство. Так как $J^2 = J$, то $M = AM$. Следовательно, $A^2 \neq 0$. Пусть I — идеал алгебры A, инвариантный относительно множества дифференцирований Δ. Тогда $(I, M, M) \subseteq I$. Рассмотрим $K = I + IM$. Имеем

$$AK \subseteq AI + A(IM) \subseteq I + (AI)M \subseteq K.$$

Аналогично

$$KM \subseteq IM + (IM)M \subseteq IM + (I, M, M) + I(MM) \subseteq K.$$

Стало быть, K — идеал супералгебры J, поэтому либо $K = 0$, либо $K = J$. Отсюда получаем, что либо $I = 0$, либо $I = A$. Поскольку A^2 — Δ-инвариантный идеал, $A^2 = A$.

Таким образом, A — дифференциально простая ассоциативная коммутативная алгебра. Поэтому в силу [20] алгебра A унитальна.

Пусть 1 — единица алгебры A. Тогда $D_{x,y}(1) = 0$ для любых $x, y \in M$. Рассмотрим $N = \{1 \cdot m - m \mid m \in M\}$. Ясно, что N — A-подмодуль A-модуля M. Для любого $x \in M$ получаем

$$(1 \cdot m - m)x = D_{m,x}(1) + 1 \cdot (mx) - mx = mx - mx = 0.$$

Следовательно, N — идеал супералгебры J с нулевым умножением. Значит, $N = 0$ и 1 — единица супералгебры J.

Пусть $J = A + M$ — простая абелева йорданова супералгебра. Если $(A, M, M) = 0$, то в силу леммы 2 A — поле. В этом случае $f : M \times M \mapsto A$, заданное правилом $f(x, y) = xy$, где xy — произведение элементов в J, является кососимметрической билинейной формой векторного пространства M над A, поэтому J — супералгебра невырожденной билинейной формы над полем A.

Пусть далее $J = A + M$ — простая абелева йорданова супералгебра и $(A, M, M) \neq 0$.

Рассмотрим $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Пусть отображение $\phi_{a,x} : M \to A$ задано правилом $\phi_{a,x}(y) = (a, y, x)$. Тогда $\phi_{a,x} \in M^*$. Действительно, в силу (4) для произвольного $b \in A$ имеем

$$\phi_{a,x}(by) = (a, by, x) = b(a, y, x) - (a, b, x)y = b(a, y, x) = b\phi_{a,x}(y). \tag{7}$$

Напомним, что A-модуль M является проективным ранга 1 тогда и только тогда, когда $M \otimes_A M^* \cong A$ (изоморфизм A-модулей).

Лемма 3. *Для любых $x, y, z \in M$ и $a \in A$ имеем $xD_{y,z}(a) = yD_{x,z}(a)$. Модуль M — конечно порожденный проективный A-модуль ранга 1. Кроме того, A-модуль M^* порождается гомоморфизмами вида $\phi_{a,x}$.*

Доказательство. Пусть $x, y, z \in M$ и $a \in A$. Тогда в силу (4)

$$xD_{y,z}(a) = x(a, y, z) = (a, xy, z) + y(a, x, z) = yD_{x,z}(a).$$

Рассмотрим $I = (A, M, M)$. Для любых $a, b \in A$, $x, y \in M$ получаем

$$a(b, x, y) = (b, ax, y) - x(b, a, y) = (b, ax, y),$$

поэтому I — идеал алгебры A. Ясно, что I — инвариантный относительно множества дифференцирований Δ. Следовательно, $I = A$ в силу леммы 2. Тем самым для некоторых $a_i \in A$, $x_i, y_i \in M$, $i = 1, \dots, n$, имеем

$$1 = (a_1, x_1, y_1) + \dots + (a_n, x_n, y_n) = D_{x_1,y_1}(a_1) + \dots + D_{x_n,y_n}(a_n).$$

Тогда для любого $m \in M$ получаем

$$m = m \cdot 1 = mD_{x_1,y_1}(a_1) + \dots + mD_{x_n,y_n}(a_n) = D_{m,y_1}(a_1)x_1 + \dots + D_{m,y_n}(a_n)x_n.$$

Следовательно, M — конечно порожденный A-модуль.

Покажем, что M — проективный ранга 1 A-модуль. В силу (4) $\phi_{a,x}(y)z = \phi_{a,x}(z)y$ и $\phi_{a,x}(y)\phi(z) = \phi_{a,x}(z)\phi(y)$ для $a \in A$, $x, y, z \in M$, $\phi \in M^*$. По доказанному

$$1 = (a_1, x_1, y_1) + \dots + (a_n, x_n, y_n) = \phi_{a_1,y_1}(x_1) + \dots + \phi_{a_n,y_n}(x_n).$$

Рассмотрим гомоморфизм A-модулей $\pi : M \otimes_A M^* \mapsto A$, заданный правилом $\pi : \sum_i (m_i \otimes \phi_i) \mapsto \sum_i \phi_i(m_i)$. Так как

$$\begin{aligned}\sum_i (m_i \otimes \phi_i) &= \sum_i \left(m_i \sum_{j=1}^n \phi_{a_j,y_j}(x_j) \otimes \phi_i \right) = \sum_i \sum_{j=1}^n (x_j \phi_{a_j,y_j}(m_i) \otimes \phi_i) \\ &= \sum_i \sum_{j=1}^n (x_j \otimes \phi_{a_j,y_j}(m_i)\phi_i) = \sum_i \sum_{j=1}^n (x_j \otimes \phi_i(m_i)\phi_{a_j,y_j}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_i \phi_i(m_i)(x_j \otimes \phi_{a_j,y_j}),\end{aligned}$$

отсюда получаем, что $\ker \pi = 0$. Кроме того, π — сюръективный гомоморфизм, поэтому $M \otimes_A M^* \cong A$. Следовательно, M — проективный A-модуль ранга 1. Ясно, что A-гомоморфизмы $\phi_{a_1,y_1}, \dots, \phi_{a_n,y_n}$ порождают A-модуль M^*.

Лемма 4. *Пусть четная часть A супералгебры J является локальной алгеброй. Тогда J — супералгебра йордановой скобки. В частности, если основное поле имеет характеристику $p > 2$, то J — супералгебра йордановой скобки.*

Доказательство. Пусть $a \in A$, $y \in M$ и $(a, M, y) = A$. Тогда $1 = (a, x, y)$, т. е. $D_{x,y}(a) = 1$. В силу леммы 3 получаем $m = mD_{x,y}(a) = xD_{m,y}(a)$. Следовательно, M — циклический (однопорожденный) A-модуль. Поэтому умножение нечетных элементов супералгебры J определяет йорданову скобку $\{\,,\}$ на A, а именно $\{a, b\} = (ax)(bx)$.

Пусть A — локальная алгебра с наибольшим идеалом R. В силу леммы 2 существуют такие $a \in R$, $x, y \in M$, что $D_{x,y}(a) \notin R$. Тогда (a, M, y) — идеал в A и $(a, M, y) \nsubseteq R$, значит, $(a, M, y) = A$, поэтому J — супералгебра йордановой скобки.

Если основное поле имеет характеристику $p > 2$, то в силу [21] A — локальная алгебра, тем самым J — супералгебра йордановой скобки.

Теорема 1. *Пусть J — простая абелева йорданова супералгебра. Тогда J вкладывается в простую супералгебру йордановой скобки. Если J не является супералгеброй йордановой скобки, то четная часть A — алгебра без делителей нуля, а нечетная часть M не имеет A-кручений.*

Доказательство. Если нечетная часть M супералгебры J — циклический A-модуль, то J — супералгебра йордановой скобки. В силу леммы 4 можно считать, что характеристика основного поля равна 0. Поэтому в силу [20] четная часть A не имеет делителей нуля.

Покажем, что M не имеет A-кручений. Пусть $a \in A$, $m \in M$ и $am = 0$. Тогда $a\phi(m) = \phi(am) = 0$ для любого $\phi \in M^*$. Если $a \neq 0$, то $\phi(m) = 0$ для любого $\phi \in M^*$. В силу леммы 3 $m\phi(x) = \phi(m)x = 0$ для любых $x \in M$ и $\phi \in M^*$. Так как

$$1 = \phi_{a_1,y_1}(x_1) + \cdots + \phi_{a_n,y_n}(x_n),$$

то

$$m = m(\phi_{a_1,y_1}(x_1) + \cdots + \phi_{a_n,y_n}(x_n)) = 0.$$

Таким образом, A-модуль M не имеет A-кручений.

Пусть S — мультипликативно замкнутое подмножество в A. Рассмотрим кольцо частных $S^{-1}A$ и модуль частных $S^{-1}M$ относительно S. Пусть $S^{-1}J = J \otimes_A S^{-1}A$. Тогда $S^{-1}J$ — йорданова супералгебра с четной частью $A \otimes_A S^{-1}A \cong S^{-1}A$ и нечетной $M \otimes_A S^{-1}A \cong S^{-1}M$. Ясно, что J — подсупералгебра в $S^{-1}J$.

Покажем, что $S^{-1}J$ — простая супералгебра. Пусть I — ненулевой идеал в $S^{-1}J$ и $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes b_i^{-1}$ — ненулевой элемент из I. Положим $b = b_1 \dots b_n$ и $c_i = b_1 \dots b_{i-1} b_{i+1} \dots b_n$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$(1 \otimes b)x = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes b b_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes c_i = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i \otimes 1 \in I.$$

Так как $1 \otimes b$ обратим в $S^{-1}J$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i c_i \otimes 1 \neq 0$. Следовательно, $J \cap I \neq 0$, поэтому $1 \in J \cap I$. Отсюда получаем, что $I = S^{-1}J$. Таким образом, $S^{-1}J$ — простая абелева супералгебра.

Пусть P — простой идеал в A и $S = A \setminus P$. Тогда $S^{-1}A$ — локальное кольцо с наибольшим идеалом $S^{-1}P$. Так как $S^{-1}J$ — простая абелева супералгебра, в силу леммы 4 $S^{-1}J$ — супералгебра йордановой скобки.

§ 2. Простые йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью, у которых $(A, M, A) \neq 0$

Опишем унитальные простые йордановы супералгебры $J = A + M$ с ассоциативной ниль-полупростой четной частью, у которых $(A, M, A) \neq 0$.

Пусть $N = (A, M, A)$. Сначала покажем, что $(A, N, A) = 0$ и $N^2 = 0$.

Пусть $a, b \in A$. Рассмотрим отображение $D_{a,b} : M \mapsto M$, заданное правилом $D_{a,b}(m) = (a, m, b)$. Тогда в силу (4) $cD_{a,b}(m) = D_{a,b}(cm)$ для $c \in A$ и $m \in M$. Положим $D = D_{a,b}$. Тогда $D^i(M)$ — йорданов A-подмодуль в M для любого целого $i \geq 0$.

Следующая лемма доказана в [22].

Лемма 5. *Имеет место равенство* $D^4 = 0$.

Доказательство. Заменяя J ее грассмановой оболочкой, можно считать, что J — йорданова алгебра. Предположим, что J — специальная алгебра. Тогда J — подалгебра алгебры B^+, где B — ассоциативная алгебра.

Пусть $d = [a, b]$ — коммутатор элементов a, b в алгебре B, $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, где xy — произведение элементов x, y в B. Если $x, y, z \in B$, то положим $(x, y, z)^+ = (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z)$. Для $m \in M$ имеем

$$\begin{aligned}4^4 D^4(m) &= 4^4(a,(a,(a,(a,m,b),b),b),b) = [[[[m,d],d],d],d] \\ &= -\frac{1}{4}[([m,d],d,d)^+,d] = -\frac{1}{4}[([m,d]\circ d)\circ d - [m,d]\circ d^2, d] \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}[m,d^2]\circ d - [m,d]\circ d^2, d\right] = -\frac{1}{16}[[m,d^2],d^2] + \frac{1}{4}[[m,d],d]\circ d^2 \\ &= \frac{1}{4}(m,d^2,d^2)^+ + D^2(m)\circ d^2,\end{aligned}$$

а также

$$d^2 = [[a,b]\circ a, b] - [[a,b],b]\circ a = -2(a^2,b,b)^+\circ a + 4(a,b,b)^+\circ a.$$

Тем самым $D^4(m)$ — йорданов многочлен от трех переменных степени 1 по m. Следовательно, в силу теоремы Ширшова — Макдональда

$$4^4 D^4(m) = \frac{1}{4}(m,d^2,d^2)^+ + D^2(m)\circ d^2$$

в любой йордановой супералгебре. Ввиду ассоциативности алгебры A получаем $d^2 = 0$, поэтому $D^4(m) = 0$.

Заметим, что в силу ассоциативности A коммутатор $[D_{a,b}, D_{c,d}]$ равен 0 для любых $a, b, c, d \in A$.

Пусть $n \in M$. Определим отображение $D_n : J \mapsto J$, полагая $D_n(x) = (n, x, n)$. Тогда в силу (4) для любых $x, y \in A \cup M$

$$D_n(xy) = (-1)^{|x||n|} x D_n(y) + (-1)^{|y||n|} D_n(x) y.$$

Лемма 6. *Имеет место равенство* $D^3 = 0$.

Доказательство. Пусть $m, n \in M$. Так как $mn \in A$, в силу (4) имеем

$$D(m)n = D(mn) - mD(n) = -mD(n),$$

поэтому по лемме 5 $D^i(m)D^j(n) = 0$, если $i + j \geq 4$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}(D^3(m)n)^2 &= -(D^3(m)n)(D^2(m)D(n)) \\ &= -((D^3(m)n)D^2(m))D(n) + (D^3(m)n, D^2(m), D(n)),\end{aligned}$$

где первое слагаемое правой части равно

$$\begin{aligned}&-((D^3(m)n)D^2(m))D(n) = ((nD^3(m))D^2(m))D(n) = (n, D^3(m), D^2(m))D(n) \\ &\overset{\text{по (4)}}{=} -(n, D^3(m)D(n), D^2(m)) - D^3(m)(n, D(n), D^2(m)) \\ &= -D^3(m)(n, D(n), D^2(m)).\end{aligned}$$

Так как $nD(n) \in A$, то

$$\begin{aligned}D^3(m)(n, D(n), D^2(m)) &= D^3(m)D^2((nD(n))m) - D^3(m)(n(D(n)D^2(m)))\\ &= -D^3(m)(n(D(n)D^2(m))) = D^3(m)(n(nD^3(m)))\\ &= -D^3(m)(n, n, D^3(m)) \overset{\text{по (5)}}{=} \frac{1}{2}D^3(m)(n, D^3(m), n).\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}(n, D^3(m), n) &= D_nD^3(m) = DD_nD^2(m) + [D_n, D]D^2(m)\\ &= DD_nD^2(m) - (D_{D_n(a),b} + D_{a,D_n(b)})D^2(m)\\ &= DD_nD^2(m) - D^2(D_{D_n(a),b} + D_{a,D_n(b)})(m),\end{aligned}$$

поскольку $[D_{D_n(a),b} + D_{a,D_n(b)}, D] = 0$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}D^3(m)(n, D(n), D^2(m)) &= \frac{1}{2}D^3(m)(n, D^3(m), n)\\ &= \frac{1}{2}D^3(m)(DD_nD^2(m) - D^2(D_{D_n(a),b} + D_{a,D_n(b)})(m)) = 0.\end{aligned}$$

Поэтому $((D^3(m)n)D^2(m))D(n) = 0$ и $(D^3(m)n)^2 = (D^3(m)n, D^2(m), D(n))$. В силу (3)

$$(D^3(m)n, D^2(m), D(n)) = (D^3(m)D(n), D^2(m), n) + (D(n)n, D^2(m), D^3(m)) = 0,$$

так как $D(n)n \in A$.

Следовательно, $(D^3(m)n)^2 = 0$. Поскольку A не имеет нильпотентных элементов, $D^3(m)n = 0$. Тогда $D^3(M)$ — идеал в J с нулевым умножением, тем самым $D^3(M) = 0$, а значит, $D^3 = 0$.

Лемма 7. *Для любых $a, b, c, d \in A$, $m, n \in M$ имеет место $D_{a,c}D_{b,d} = 0$ и $D_{a,c}(m)D_{b,d}(n) = 0$, т. е. $(A, N, A) = N^2 = 0$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $D^2 = 0$. Пусть $m, n \in M$. В силу леммы 6 $D^i(m)D^j(n) = 0$, если $i + j \geq 3$. Тогда

$$\begin{aligned}(D^2(m)n)^2 &= (D^2(m)n)(D^2(m)n) = -(D^2(m)n)(D(m)D(n))\\ &= -((D^2(m)n)D(m))D(n) + (D^2(m)n, D(m), D(n)),\end{aligned}$$

где первое слагаемое в правой части равно

$$\begin{aligned}&-((D^2(m)n)D(m))D(n) = ((nD^2(m))D(m))D(n) = (n, D^2(m), D(m))D(n)\\ &\overset{\text{по (4)}}{=} -(n, D^2(m)D(n), D(m)) - D^2(m)(n, D(n), D(m)) = -D^2(m)(n, D(n), D(m))\\ &= -D^2(m)((nD(n))D(m)) + D^2(m)(n(D(n)D(m))) = -D^2(m)(n(nD^2(m))),\end{aligned}$$

так как $nD(n) \in A$ и $D^2(m)((n(D(n))D(m)) = D^2(m)D((n(D(n))m) = 0$. Имеем

$$-D^2(m)(n(nD^2(m))) = D^2(m)(n, n, D^2(m)) \overset{\text{по (5)}}{=} -\frac{1}{2}D^2(m)(n, D^2(m), n),$$

откуда

$$\begin{aligned}D^2(m)(n, D^2(m), n) &= D^2(m)D_nD^2(m)\\ &= D^2(m)(DD_nD(m) - D(D_{D_n(a),b} + D_{a,D_n(b)})(m)) = 0.\end{aligned}$$

Значит, $((D^2(m)n)D(m))D(n)=0$, и в силу (3) получаем

$$(D^2(m)n)(D^2(m)n)=(D^2(m)n,D(m),D(n))$$
$$=(D^2(m)D(n),D(m),n)+(D(n)n,D(m),D^2(m))$$
$$=(D(n)n,D(m),D^2(m))=((D(n)n)D(m))D^2(m)-(D(n)n)(D(m)D^2(m))=0.$$

Следовательно, $D^2(m)n=0$ и $D(m)D(n)=0$. Тогда $D^2(M)$ — идеал J с нулевым умножением, откуда $D^2=0$.

Пусть $a,b,c,d\in A$. Положим $D_1=D_{a,c}$, $D_2=D_{b,d}$. Тогда

$$(D_1D_2(m)n)(D_1D_2(m)n)=-(D_1D_2(m)n)(D_2(m)D_1(n))$$
$$=-(D_1D_2(m),n,D_2(m)D_1(n))-D_1D_2(m)(n(D_2(m)D_1(n)).$$

В силу (3) имеем

$$(D_1D_2(m),n,D_2(m)D_1(n))=(D_2(m),n,D_1D_2(m)D_1(n))$$
$$+(D_1(n),n,D_2(m)D_1D_2(m))=0,$$

так как $[D_1,D_2]=0$. Значит,

$$(D_1D_2(m)n)(D_1D_2(m)n)=-D_1D_2(m)(n(D_2(m)D_1(n)))$$
$$=D_1D_2(m)(n(D_1D_2(m)n))=D_1D_2(m)(D_1D_2(m),n,n)$$
$$\overset{\text{по (5)}}{=}-\frac{1}{2}D_1D_2(m)D_nD_1D_2(m)=\frac{1}{2}D_2(m)D_1D_nD_1D_2(m).$$

Рассмотрим

$$D_1D_nD_1=[D_1,D_n]D_1+D_nD_1D_1=[D_1,D_n]D_1.$$

Поскольку $[D_1,D_n]=D_{a_1,b_1}+D_{a_2,b_2}$, где $a_1,b_1,a_2,b_2\in A$, то $[[D_1,D_n],D_1]=0$ и

$$2D_1D_nD_1=2[D_1,D_n]D_1=[D_1,D_n]D_1+D_1[D_1,D_n]=\left[D_1^2,D_n\right]=0,$$

поэтому $(D_1D_2(m)n)^2=0$. Следовательно, $D_1D_2(m)n=0$. Тогда $D_1D_2(M)$ — идеал J с нулевым умножением.

Таким образом, $D_1D_2=0$ и $D_1(m)D_2(n)=0$ для всех $m,n\in M$.

Лемма 8. *Пусть $N=(A,M,A)$. Тогда N — йорданов A-подмодуль в M и $(NM)M\subseteq N$. В частности, $(NM)N=0$.*

Доказательство. Пусть $x,y,m\in M$. Тогда $D_{x,y}:J\mapsto J$, заданное правилом $D_{x,y}(u)=(x,u,y)$, является четным супердифференцированием, тем самым

$$D_{x,y}((a,m,b))=-(D_{x,y}(a),m,b)+(a,D_{x,y}(m),b)-(a,m,D_{x,y}(b))\in N.$$

Следовательно, $(M,N,M)\subseteq N$. Поскольку $D=D_{a,b}$ — дифференцирование, то

$$D((x,m,y))=(D(x),m,y)+(x,D(m),y)+(x,m,D(y)),$$

откуда $(D(x),m,y)+(x,m,D(y))\in N$, поэтому $(m,x,D(x))\in-(D(m),x,x)+N$. Так как $(D(m),x,x)=-\frac{1}{2}(x,D(m),x)$ ввиду (5), то $(m,x,D(x))\in N$. Тем самым

$$m(xD(x))=(mx)D(x)-(m,x,D(x))\in N.$$

Линеаризуя последние включения по x, получим $m(xD(y)+yD(x))\in N$. Поскольку $yD(x)=-D(y)x=xD(y)$, то $m(xD(y))\in N$ для любых $m,x,y\in M$.

Таким образом, $(D(m)x)y\in N$ для $m,x,y\in M$. В частности, в силу леммы 7 $(D_{a,b}(m)x)D_{c,d}(y)=0$ для $a,b,c,d\in A$, $m,x,y\in M$.

Лемма 9. *Пусть* $N = (A, M, A) \neq 0$. *Положим*

$$N_1 = \Big\{ \sum_i (nx_i)a_i \cdot x_i \mid n \in N,\ x_i \in M,\ a_i \in A \Big\}.$$

Тогда $A = NM + (NM)A$, $M = N + N_1$. *Более того,* $N = (NM)^2 N$, $M = (NM)^2 M$, $((NM)^2, M, M) \subseteq (NM)^2$ *и*

$$((NM)^2, (NM)^2, M) = ((NM)^2, N, M) = ((NM)^2, M, N) = 0.$$

Доказательство. Покажем, что $I = NM + (NM)A + N + N_1$ — идеал супералгебры J. Пусть $n \in N$, $x, y \in M$, $a \in A$. Будем писать $u \equiv v$, если $u - v \in N$. Ввиду леммы 8 имеем

$$(nx)a \cdot y = (nx, a, y) + (nx)(ay) \equiv (nx, a, y).$$

В силу (3) получаем

$$(nx, a, y) = (yx, a, n) + (ny, a, x) \equiv (ny, a, x) \equiv (ny)a \cdot x,$$

поэтому $(nx)a \cdot y \equiv (ny)a \cdot x$ и $(nx)a \cdot y \in N + N_1$. Следовательно, по лемме 8

$$(NM + (NM)A)M \subseteq N + N_1.$$

Пусть $b \in A$. Тогда

$$((nx)a \cdot y)b = ((nx)a, y, b) + (nx)a \cdot (yb) \in N + N_1.$$

Пусть $z \in M$. В силу (3) и леммы 8 имеем

$$\begin{aligned} ((nx)a \cdot y)z &= ((nx)a, y, z) + (nx)a \cdot (yz) \\ &= ((nx)z, y, a) + (za, y, nx) + (nx)a \cdot (yz) \in NM + (NM)A. \end{aligned}$$

Таким образом, I — идеал супералгебры J, стало быть, $A = NM + (NM)A$, $M = N + N_1$.

Покажем, что $((NM)^2, M, M) \subseteq (NM)^2$. Действительно, с учетом (3) и лемм 8 и 7 получаем

$$((NM)^2, M, M) \subseteq ((NM)M, M, NM) \subseteq (N, M, NM) \subseteq (NM)^2.$$

Покажем, что $M = N + (NM)^2 M$. Так как $A = NM + (NM)A$, то

$$N_1 \subseteq (NM)A \cdot M \subseteq (NM)^2 \cdot M + (NM)^2 A \cdot M.$$

В силу (3)

$$(NM)^2 A \cdot M \subseteq (NM)^2 M + ((NM)^2, A, M) \subseteq (NM)^2 M + ((NM)M, A, NM).$$

Из последнего включения и леммы 8 выводим

$$N_1 \subseteq (NM)^2 \cdot M + (NM)^2 A \cdot M \subseteq (NM)^2 M + N.$$

Следовательно, $M = N + (NM)^2 M$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеем

$$D_{a,b}(M) \subseteq D_{a,b}((NM)^2 M) \subseteq (NM)^2 D_{a,b}(M),$$

поэтому $N = (NM)^2 N$, откуда получаем

$$M = N + (NM)^2 M \subseteq (NM)^2 M.$$

Таким образом, $M = (NM)^2 M$.

Покажем, что $((NM)^2, (NM)^2, M) = 0$. Ввиду (3) и леммы 8

$$((NM)^2, (NM)^2, M) \subseteq ((NM)M, (NM)^2, NM) \subseteq (N, (NM)^2, NM).$$

Так как

$$(N, (NM)^2, NM) \subseteq (N, NM, NM)(NM) \subseteq N(NM),$$

по лемме 8 имеем $((NM)^2, (NM)^2, M) = 0$. Аналогично

$$((NM)^2, N, M) = ((NM)^2, M, N) = 0.$$

Лемма 10. *Пусть $N = (A, M, A) \neq 0$. Тогда $(NM)^3 = NM$, $A = NM + (NM)^2$ и $NM \cap (NM)^2 = 0$. В частности, A — Z_2-градуированная алгебра с четной частью $(NM)^2$ и нечетной NM.*

Доказательство. Покажем, что $(NM)^3 \subseteq NM$. Действительно, в силу (3) и леммы 8

$$(NM)(NM)(NM) \subseteq (N, M, (NM)^2) + N(M(NM)^2) \subseteq (NM, M, N(NM)) + NM = NM.$$

По лемме 9 $N = (NM)^2 N$, поэтому

$$NM = (NM)^2 N \cdot M \subseteq (NM)^3 + ((NM)^2, N, M) \subseteq (NM)^3.$$

Тогда $NM = (NM)^3$.

Ввиду леммы 9 $A = NM + (NM)A$, откуда $A = NM + (N, M, A)$. По (3) имеем

$$(N, M, A) \subseteq (N, M, NM) + (N, M, (NM)A) \subseteq (N, M, NM) + (A, M, N(NM)) + (NM, M, AN).$$

Тогда в силу леммы 8 получаем $(N, M, A) \subseteq (NM)^2$. Следовательно, $A = NM + (NM)^2$.

Рассмотрим $I = NM \cap (NM)^2$. Покажем, что I — идеал в A. Действительно, пусть $r \in I$. Тогда $r \in NM$, поэтому $r(NM) \subseteq (NM)^2$. С другой стороны, $r \subseteq (NM)^2$, значит, $r(NM) \subseteq (NM)^3 \subseteq NM$, следовательно, $r(NM) \subseteq I$. Аналогично $r(NM)^2 \subseteq I$. Таким образом, I — идеал в A.

Докажем, что $(I, M, M) \subseteq I$. Так как $I \subseteq (NM)^2$ и $((NM)^2, M, M) \subseteq (NM)^2$, то $(I, M, M) \subseteq (NM)^2$. Пусть $r \in I$. Тогда $r \in NM$. Поэтому в силу леммы 8

$$(r, M, M) \subseteq ((NM)M)M + r(MM) \subseteq NM + I \subseteq NM.$$

Таким образом, $(I, M, M) \subseteq I$, тем самым $(IM)M \subseteq (I, M, M) + I(MM) \subseteq I$. В силу (2) и лемм 8 и 7 имеем

$$(I^2 M)M \subseteq I((IM)M) + (IM)(IM) + I^2 M^2 \subseteq I^2 + N^2 + I^2 M^2 \subseteq I^2.$$

Аналогично

$$(I^2, M, A) \subseteq (IA, M, I) \subseteq (NM, M, NM) = 0.$$

Отсюда получаем, что $I^2 + I^2 M$ — идеал супералгебры J. Поскольку супералгебра J проста, $A = I^2$ или $I^2 = 0$. Если $I^2 = A$, то $(A, M, A) \subseteq (I^2, M, A) = 0$. Следовательно, $I = NM \cap (NM)^2 = 0$.

Таким образом, $A = NM + (NM)^2$ — Z_2-градуированная алгебра.

Пусть J — унитальная супералгебра и $N = (A, M, A) \neq 0$. Положим $A_0 = (NM)^2$, $A_1 = NM$. Тогда $1 = a + b$ — единица алгебры J, где $a \in A_1$, $b \in A_0$. Так как $b = ba + b^2$, то $ba \in A_0 \cap A_1 = 0$, поэтому $ba = 0$, следовательно, $a = a^2 + ab = a^2$. Тогда $a \in A_0 \cap A_1 = 0$, откуда $1 \in A_0$.

Лемма 11. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *A_1 является точным конечно порожденным проективным A_0-модулем ранга 1.*

2. *$M = M_0 \oplus N$ — прямая сумма A_0-модулей, причем $N \otimes_{A_0} M_0 \cong A_1$ и M_0, N являются точными конечно порожденными проективными A_0-модулями ранга 1.*

3. $A_0 + M_0$ — *унитальная абелева подсуперaлгебра в* $A + M$.

Доказательство. Так как $A_0 = (NM)^2$, то $1 = \sum_i (n_i m_i)(n_i' m_i')$. Рассмотрим отображение $\phi : A_1 \otimes_{A_0} A_1 \mapsto A_0$, заданное правилом

$$\phi\Big(\sum_i x_i \otimes y_i\Big) = \sum_i x_i y_i.$$

Отображение ϕ задано корректно и является эпиморфизмом A_0-модулей.

Покажем, что $\ker \phi = 0$. Пусть

$$\phi\Big(\sum_i x_i \otimes y_i\Big) = \sum_i x_i y_i = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_i x_i \otimes y_i &= \sum_i x_i \sum_j (n_j m_j)(n_j' m_j') \otimes y_i = \sum_i \sum_j (n_j m_j) x_i (n_j' m_j') \otimes y_i \\ &= \sum_i \sum_j (n_j m_j) \otimes x_i (n_j' m_j') y_i = \sum_j \sum_i (n_j m_j) \otimes (n_j' m_j') x_i y_i \\ &= \sum_j \sum_i (n_j m_j \otimes n_j' m_j') x_i y_i = 0.\end{aligned}$$

Значит, $\ker \phi = 0$, и ϕ — изоморфизм A_0-модулей. Отсюда следует, что A_1 — точный конечно порожденный проективный ранга 1 A_0-модуль.

Рассмотрим фактор-модуль M/N. Пусть $x, z \in N$, $y, t \in M$, т. е. $(xy)(zt) \in A_0$, и $\bar{m} = m + N \in M/N$. В силу леммы 8 имеем

$$\begin{aligned}(xy)(zt) \cdot \overline{m} = \overline{(xy)(zt) \cdot m} = \overline{(xy, zt, m)} = \overline{(xm, zt,\ y)} + \overline{(my, zt, x)} \\ = \overline{(xm, zt, y)} = (xm)(zt) \cdot \bar{y}.\end{aligned}$$

Аналогично $(xy)(zt) \cdot n = (ny)(zt) \cdot x$ для $n \in N$.

Рассмотрим отображение $\phi : N \otimes_{A_0} M/N \mapsto A_1$, заданное правилом

$$\phi\Big(\sum_i n_i \otimes \bar{m}_i\Big) = \sum_i n_i m_i.$$

Ввиду леммы 7 и того, что $((NM)^2, N, M) = 0$, $((NM)^2, M, N) = 0$, отображение ϕ задано корректно и является эпиморфизмом A_0-модулей.

Покажем, что $\ker \phi = 0$. Пусть

$$\phi\Big(\sum_i x_i \otimes \bar{y}_i\Big) = \sum_i x_i y_i = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_i x_i \otimes \overline{y_i} &= \sum_i \sum_j (n_j m_j)(n_j' m_j') \cdot x_i \otimes \overline{y_i} = \sum_i \sum_j (x_i m_j)(n_j' m_j') \cdot n_j \otimes \overline{y_i} \\ &= \sum_i \sum_j n_j \otimes (x_i m_j)(n_j' m_j') \cdot \overline{y_i} = \sum_j \sum_i n_j \otimes (x_i y_i)(n_j' m_j') \cdot \overline{m_i} \\ &= \sum_j \sum_i (x_i y_i)(n_j' m_j')(n_j \otimes \overline{m_j}) = 0.\end{aligned}$$

Стало быть, $\ker\phi = 0$, и ϕ — изоморфизм A_0-модулей. Отсюда следует, что N и M/N — точные конечно порожденные проективные ранга 1 A_0-модули. Из проективности A_0-модуля M/N вытекает, что канонический гомоморфизм A_0-модулей $M \mapsto M/N$ прямой. Следовательно, $M = M_0 \oplus N$ — прямая сумма A_0-модулей, и $N \otimes_{A_0} M_0 \cong A_1$.

Докажем утверждение 3. Достаточно доказать, что $m_1m_2 \in M_0$ для $m_1, m_2 \in M_0$. Предположим, что $m_1m_2 = a + b$, где $a \in A_1$, $b \in A_0$. Пусть $x, y \in N$, $z \in M$. По лемме 8 имеем

$$\begin{aligned}(xm_2)(yz)\cdot m_1 = (xm_2, yz, m_1) = (xm_1, yz, m_2) + (m_1m_2, yz, x)\\ = (xm_1)(yz)\cdot m_2 + (m_1m_2, yz, x).\end{aligned}$$

Поскольку $(xm_2)(yz)\cdot m_1, (xm_2)(yz)\cdot m_2 \in M_0$, а $(m_1m_2, yz, x) \in N$, то $(m_1m_2, yz, x) = 0$. Тогда $(a, yz, x) = 0$ в силу того, что $((NM)^2, NM, N) = 0$. Следовательно, $a(yz)\cdot x = 0$, так как $(yz)x \in (NM)N = 0$, т. е. $(aA_1)N = 0$. Ввиду точности A_0-модуля N получаем, что $aA_1 = 0$. Поскольку $1 \in A_1A_1$, то $a = 0$.

Таким образом, $M_0M_0 \subseteq A_0$, т. е. $A_0 + M_0$ — подсупералгебра в $A + M$. В силу леммы 9 $A_0 + M_0$ — абелева супералгебра.

Лемма 12. *Пусть $J = A + M$ — простая унитальная йорданова супералгебра с ассоциативной четной частью и $(A, M, A) \neq 0$. Тогда $A_0 + M_0$ — простая абелева супералгебра и $(A_0, M_0, M_0) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $I_0 + I_1$ — идеал супералгебры $A_0 + M_0$. Положим

$$K_0 = I_0 + (I_1N)(NM_0) + I_1N,$$

$$K_1 = I_1 + I_0N + ((I_1N)(NM_0))N + (I_1N)M_0 + I_1(NM_0).$$

Покажем, что $K = K_0 + K_1$ — идеал в J. Поскольку $(N, M_0, A_0) = 0$, то $(NM_0)I_0 \subseteq I_1N$. Отсюда получаем, что $K_0A \subseteq K_0$.

Ввиду леммы 8, (3) и леммы 11 имеем

$$\begin{aligned}(I_1N)(NM_0)\cdot M \subseteq (I_1N, NM_0, M) \subseteq (I_1M, NM_0, N) + (MN, NM_0, I_1)\\ \subseteq (I_1M_0, NM_0, N) + (I_1N, NM_0, N) + (NM_0)^2I_1 \subseteq ((I_1N)(NM_0))N + I_1,\end{aligned}$$

откуда $K_0M \subseteq K$.

Так как $(A, N, A) = 0$, то $(I_0N)A \subseteq I_0N$ и

$$((I_1N)(NM_0))N\cdot A \subseteq ((I_1N)(NM_0))N.$$

В силу леммы 8 и (3)

$$\begin{aligned}(I_1N)M_0\cdot A \subseteq (I_1N)M_0\cdot A_0 \subseteq (I_1N, M_0, A_0) + (I_1N)M_0\\ \subseteq (NA_0, M_0, I_1) + (I_1A_0, M_0, N) + (I_1N)M_0 \subseteq I_0N + I_1(NM_0) + (I_1N)M_0.\end{aligned}$$

Поскольку $(M, N, A_0) = 0$, так же получаем

$$\begin{aligned}I_1(NM_0)\cdot A \subseteq I_1(NM_0)\cdot A_0 \subseteq I_1((NM_0)A_0) + (I_1, NM_0, A_0)\\ \subseteq I_1(NM_0) + N(I_1, M_0, A_0) + (I_1, N, A_0)M_0 \subseteq I_0N + I_1(NM_0).\end{aligned}$$

Следовательно, $K_1A \subseteq K_1$.

Аналогично

$$(I_0N + ((I_1N)(NM_0))N)M \subseteq I_0(NM_0) + (I_1N)(NM_0)\cdot(NM_0) \subseteq K_0.$$

В силу леммы 8 и (3) имеем

$$\begin{aligned}(I_1N)M_0\cdot M_0 &\subseteq I_1N\cdot M_0M_0+(I_1N,M_0,M_0)\\ &\subseteq I_1N\cdot M_0M_0+(I_1M_0,M_0,N)+(NM_0,M_0,I_1)\\ &\subseteq I_1N\cdot M_0M_0+I_1N+I_0(M_0N)+I_0(NM_0)\subseteq K_0.\end{aligned}$$

Покажем, что $I_1(NM_0)\cdot M_0\subseteq K_0$. С учетом лемм 10 и 8 и (2)

$$\begin{aligned}I_1(NM_0)\subseteq I_1(NM_0)^3 &\subseteq (I_1(NM_0))(NM_0)\cdot(NM_0)+I_1(NM_0)\cdot(NM_0)(NM_0)\\ &\subseteq I_1(NM_0)\cdot(NM_0)(NM_0).\end{aligned}$$

Тогда достаточно доказать, что $(I_1x\cdot y^2)M_0\subseteq K_0$, где $x,y\in NM_0$. Ввиду лемм 7, 8 и (3)

$$\begin{aligned}I_1x\cdot y^2 &\subseteq (I_1x,y,y)\subseteq (xy,y,I_1)+(I_1y,y,x)\\ &\subseteq (xy,y,I_1)+(I_1y)(yx)\subseteq (xy,y,I_1)+(I_1y,x,y)\subseteq (xy,y,I_1)+(y^2,x,I_1),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}(I_1x\cdot y^2)M_0 &\subseteq ((NM_0)^2,NM_0,I_1)M_0\\ &\subseteq ((NM_0)^2,NM_0\cdot M_0,I_1)+((NM_0)^2,M_0,I_1)(NM_0)\\ &\subseteq ((NM_0)^2,N,I_1)+((NM_0)^2,M_0,I_1)(NM_0)\\ &\subseteq I_0(NM_0)\subseteq (NM_0)I_0\subseteq I_1N\subseteq K_0.\end{aligned}$$

Таким образом, K — идеал супералгебры J. Так как J — простая супералгебра, то $A=K_0$ и $M=K_1$. Отсюда $A_0=I_0+(I_1N)(NM_0)$, $M_0=I_1$.

Рассмотрим векторное пространство $R=M_0M_0+(A_0,M_0,M_0)$. Предположим, что $R\neq 0$. Поскольку

$$A_0(A_0,M_0,M_0)\subseteq (A_0,A_0M_0,M_0)+(A_0,A_0,M_0)M_0\subseteq (A_0,M_0,M_0),$$

R — идеал в A_0. Тогда $R+RM_0$ — идеал в супералгебре A_0+M_0. По доказанному $M_0=RM_0$, $A_0=R+(RM_0)N\cdot(NM_0)$. В силу леммы 9 $(R,M_0,N)=0$. Тогда

$$(RM_0)N\cdot(NM_0)\subseteq R(M_0N)\cdot(NM_0)\subseteq R(NM_0)^2\subseteq R,$$

тем самым $A_0\subseteq R$. Поэтому для идеала I_0+I_1 либо $A_0=I_0$ и $M_0=I_1$, либо $M_0M_0=0$.

Таким образом, если $M_0M_0\neq 0$, то A_0+M_0 — простая супералгебра.

Покажем, что $M_0M_0\neq 0$. Для этого достаточно доказать, что $(A_0,M_0,M_0)\neq 0$. Пусть $(A_0,M_0,M_0)=0$ в супералгебре A_0+M_0. По лемме 11 M_0 — точный A_0-модуль. Тогда $zM_0\neq 0$ для ненулевого $z\in A_0$, поэтому $z(M_0M_0)+zM_0$ — ненулевой идеал в A_0+M_0. По доказанному выше $zM_0=M_0$, и по лемме 9 имеем

$$A_0=(M_0N)^2\subseteq (zM_0\cdot N)(M_0N)\subseteq z(M_0N)(M_0N)\subseteq zA_0.$$

Следовательно, A_0 — поле. По лемме 11 A_1,N,M_0 — A_0-модули ранга 1. Тогда A_1,N,M_0 — одномерные векторные пространства над полем A_0.

Пусть $v\in A_1$, $x\in M_0$, $y\in N$ — ненулевые элементы такие, что $xy=v$. Тогда $A_1=A_0v$. Покажем,что $vM_0=0$. В силу равенства $((NM_0)^2,N,M_0)=0$ имеем

$$(A_0,v,M_0)\subseteq ((NM_0)^2,v,M_0)\subseteq x((NM_0)^2,y,M_0)+((NM_0)^2,x,M_0)y=0,$$

поэтому $(v^2, v, M_0) = 0$ и $(vM_0, v, v) \subseteq (v^2, v, M_0) = 0$. Отсюда $(vM_0)v^2 = 0$, так как $v \in NM_0$, $vM_0 \in N$ и $(vM_0)v = 0$. Поскольку v^2 обратим в поле A_0, то $vM_0 = 0$. Тогда $(A_0v)M \subseteq (A_0v)M_0 \subseteq A_0(vM_0) = 0$, т. е. $A_1M = 0$. Следовательно,

$$(A_1, A_0, M) \subseteq A_1M = 0, \quad (M, A_1, A_0) \subseteq (MA_1)A_0 + MA_1 = 0,$$

тем самым $(A_0, M, A_1) \subseteq (M, A_1, A_0) + (A_1, A_0, M) = 0$. Тогда в силу лемм 8 и 9

$$(A, M, A) \subseteq (A_0, M, A_0) + (A_1, M, A_0) + (A_1, M, A_1) = 0.$$

Получили противоречие с тем, что $(A, M, A) \neq 0$.

Таким образом, $A_0 + M_0$ — простая супералгебра, и $(A_0, M_0, M_0) \neq 0$.

Из лемм 10–12 следует

Теорема 2. *Пусть $J = A + M$ — унитальная простая йорданова супералгебра с ассоциативной ниль-полупростой четной частью. Предположим, что $N = (A, M, A) \neq 0$. Тогда*

1) *четная часть $A = A_0 + A_1$ — Z_2-градуированная алгебра, и A_1 является точным конечно порожденным проективным A_0-модулем ранга 1;*

2) *нечетная часть $M = M_0 \oplus N$ — прямая сумма A_0-модулей, причем $N \otimes_{A_0} M_0 \cong A_1$ — изоморфизм A_0-модулей, а M_0, N являются точными конечно порожденными проективными A_0-модулями ранга 1;*

3) *$A_0 + M_0$ — простая унитальная абелева подсупералгебра в J.*

Следствие. *Пусть $J = A + M$ — унитальная простая йорданова супералгебра с ассоциативной ниль-полупростой четной частью. Предположим, что $N = (A, M, A) \neq 0$. Тогда J вкладывается в простую супералгебру йордановой скобки.*

Доказательство. Предположим, что A_1, N, M_0 — циклические A_0-модули. Тогда $A_1 = A_0v$, $N = A_0n$, $M_0 = A_0x$. В силу теоремы 2 можно считать, что $v = nx$. Положим $\Gamma_0 = A_0$, $\Gamma_1 = A_0n$ и $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$. Тогда ввиду леммы 7 Γ — ассоциативная коммутативная алгебра. По теореме 2 получаем, что

$$J = A_0 + A_1 + M_0 + N = A_0 + A_0n + (A_0n)x + A_0x = \Gamma + \Gamma x.$$

Отсюда следует, что умножение элементов из Γx определяет на Γ йорданову скобку $\{\,,\}$, а именно $\{a, b\} = (-1)^{|b|}(ax)(bx)$, где $a, b \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Пусть $p > 2$ — характеристика основного поля. Тогда $a^p \neq 0$ для ненулевого $a \in A_0$. Пусть $x, y \in M_0$. Тогда $D_{x,y}(a^p) = pa^{p-1}D_{x,y}(a) = 0$. Следовательно, a^pA_0 — ненулевой идеал алгебры A_0, инвариантный относительно множества дифференцирований $\Delta = \{D_{x,y} \mid x, y \in M_0\}$. Так как супералгебра $A_0 + M_0$ проста, $a^pA_0 = A_0$ в силу леммы 2, поэтому A_0 — поле. Стало быть, A_1, N, M_0 — одномерные векторные пространства над полем A_0, т. е. A_1, N, M_0 — циклические A_0-модули.

Пусть характеристика основного поля равна 0. Тогда в силу [20] A_0 не имеет делителей нуля. По теореме 1 $A_0 + M_0$ не имеет A_0-кручений.

Покажем, что A_0-модули A_1 и N не имеют A_0-кручений. Если $a_0a_1 = 0$ для $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$, то $a_0 \cdot a_1A_1 = 0$. Поэтому $a_1A_1 = 0$, если $a_0 \neq 0$. Поскольку $1 = \sum\limits_i (n_im_i)(n_i'm_i')$, где $n_i, n_i' \in N$, $m_i, m_i' \in M_0$, то $a_1 = \sum\limits_i a_1(n_im_i)(n_i'm_i') = 0$.

Пусть $a_0n = 0$ для $a_0 \in A_0$, $n \in N$. По лемме 9 $a_0(nM_0) = (a_0n)M_0 = 0$. Следовательно, $nM_0 = 0$, если $a_0 \neq 0$. В силу леммы 8 и (3)

$$n = \sum_i (n_im_i)(n_i'm_i')n = \sum_i (n_im_i, n_i'm_i', n)$$
$$= \sum_i (n_in, n_i'm_i', m) + \sum_i (nm_i, n_i'm_i', n_i) = 0.$$

Таким образом, J не имеет A_0-кручений.

Пусть P — простой идеал в A_0 и $S = A_0 \setminus P$. Тогда $S^{-1}A_0$ — локальное кольцо с наибольшим идеалом $S^{-1}P$. Как известно, конечно порожденные проективные $S^{-1}A_0$-модули $S^{-1}A_1$, $S^{-1}N$, $S^{-1}M_0$ являются свободными циклическими $S^{-1}A_0$-модулями.

Пусть $S^{-1}J = J \otimes_{A_0} S^{-1}A_0$. Тогда $S^{-1}J$ — йорданова супералгебра с четной частью $A_0 \otimes_{A_0} S^{-1}A_0 + A_1 \otimes_{A_0} S^{-1}A_0 \cong S^{-1}A$ и нечетной $M_0 \otimes_{A_0} S^{-1}A_0 + N \otimes_{A_0} S^{-1}A_0 \cong S^{-1}M$. Ясно, что J — подсупералгебра в $S^{-1}J$. Повторяя рассуждения из теоремы 1, получаем, что супералгебра $S^{-1}J$ проста. В силу ранее доказанного $S^{-1}J$ — простая супералгебра йордановой скобки.

Лемма 13. *Пусть йорданова супералгебра $J = A + M$ удовлетворяет условию теоремы 2. Предположим, что $x \in M$ и $xN = 0$. Тогда $x \in N$.*

Доказательство. Пусть $x \in M$ и $xN = 0$. Тогда $x = n + y$, где $n \in N$, $y \in M_0$. Ввиду леммы 7 $yN = 0$. Так как A_0 — алгебра с единицей, $1 = \sum_i (n_im_i)(n_i'm_i')$, где $n_i, n_i' \in N$, $m_i, m_i' \in M_0$. Тогда в силу леммы 8 и (3) имеем

$$y = \sum_i (n_im_i)(n_i'm_i') \cdot y = \sum_i (n_im_i, n_i'm_i, y) = \sum_i (n_iy, n_i'm_i, m_i) + (ym_i, n_i'm_i, n_i).$$

Поскольку $yN = 0$, то $y = \sum_i (ym_i, n_i'm_i, n_i) = 0$ по лемме 8.

Таким образом, $x \in N$.

Пусть йорданова супералгебра $J = A + M$ удовлетворяет условию теоремы 2. Предположим, что $A_1 = A_0s$, где $s^2 = 1$. По лемме 8 $sN = 0$. Положим $e_1 = \frac{1}{2}(1+s)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1-s)$. Тогда e_1, e_2 — ортогональные идемпотенты, поэтому $M = M_{11} + M_{\frac{1}{2}} + M_{22}$ — албертовское разложение M. Так как $sN = 0$, то $N \subseteq M_{\frac{1}{2}}$. Ввиду свойств албертовского разложения $M_{11}N \subseteq A_{\frac{1}{2}} = 0$. Тогда $M_{11} \subseteq N \subseteq M_{\frac{1}{2}}$ по лемме 13, следовательно, $M_{11} = 0$. Аналогично $M_{22} = 0$. Таким образом, $M = M_{\frac{1}{2}}$, поэтому $sM_0 = 0$.

Для $n \in N$ определим $f_n : M_0 \mapsto A_0$, полагая $f_n(m) = a$, если $nm = as$. По лемме 9 $f_n \in \mathrm{Hom}_{A_0}(M_0, A_0)$ и $nm = f_n(m)s$.

Пусть $x, y \in M_0$, $a \in A_0$. Тогда $(as)x \in N$. Положим $n = (as)x$. В силу того, что $sM_0 = 0$, имеем

$$ny = [(as)x]y = (a, s, x)y = s(a, y, x) - (a, sy, x) = \phi_{a,x}(y)s,$$

поэтому для $n = (as)x$ получаем, что $f_n(y) = \phi_{a,x}(y)$, т. е. $f_n = \phi_{a,x}$. Отметим, что элементы вида $(as)x$ порождают N как A_0-модуль.

Отсюда следует

Теорема 3. *Пусть $J = A + M$ — унитальная простая йорданова супералгебра с ассоциативной ниль-полупростой четной частью. Предположим, что $N = (A, M, A) \neq 0$ и $A_1 = A_0s$, где $s^2 = 1$. Тогда супералгебра J изоморфна супералгебре $J(A_0, M_0, M_0^*)$, где $M_0^* = \mathrm{Hom}_{A_0}(M_0, A_0)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kac V.* Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Commun. Algebra. 1977. V. 5. P. 1375–1400.

2. *Кантор И. Л.* Йордановы и лиевы супералгебры, определенные алгеброй Пуассона // Вторая сибирская школа «Алгебра и анализ». Томск, 1989. С. 55–80.

3. *Racine M., Zelmanov E.* Simple Jordan superalgebras with semisimple even part // J. Algebra. 2003. V. 270, N 2. P. 374–444.

4. *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 701–731.

5. *Martinez C., Zelmanov E.* Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic // J. Algebra. 2001. V. 236, N 2. P. 575–629.

6. *Kac V. G., Martinez C., Zelmanov E.* Graded simple Jordan superalgebras of growth one. Providence, RI: Amer. Math. Soc, 2001. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 150, N 711).

7. *King D., McCrimmon K.* The Kantor construction of Jordan superalgebras // Commun. Algebra. 1992. V. 20, N 1. P. 109–126.

8. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль // Изв. РАН. Сер. мат. 2015. Т. 79, № 3. С. 131–158.

9. *Шестаков И. П.* Супералгебры и контрпримеры // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 187–196.

10. *McCrimmon K.* Speciality and nonspeciality of two Jordan superalgebras // J. Algebra. 1992. V. 149, N 2. P. 326–351.

11. *King D., McCrimmon K.* The Kantor doubling process revisited // Commun. Algebra. 1995. V. 23, N 1. P. 357–372.

12. *Pchelintsev S. V., Shestakov I. P.* Prime $(-1,1)$ and Jordan monsters and superalgebras vector type // J. Algebra. 2015. V. 423. P. 54–86.

13. *Желябин В. Н.* Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 276–310.

14. *Желябин В. Н., Шестаков И. П.* Простые специальные супералгебры с ассоциативной четной частью // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1046–1072.

15. *Желябин В. Н.* Дифференциальные алгебры и простые йордановы супералгебры // Мат. тр. 2009. Т. 12, № 2. С. 41–51.

16. *Желябин В. Н.* Новые примеры простых йордановых супералгебр над произвольным полем характеристики нуль // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4. С. 84–96.

17. *Cantarini N., Kac V. G.* Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras // J. Algebra. 2007. V. 313. P. 100–124.

18. *Шестаков И. П.* Простые супералгебры типа $(-1,1)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 721–739.

19. *Желябин В. Н., Захаров А. С.* Некоторые конструкции для йордановых супералгебр с ассоциативной четной частью // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 2. С. 97–113.

20. *Posner E. C.* Differentiable simple rings // Proc. Am. Math. Soc. 1960. V. 11, N 3. P. 337–343.

21. *Shuen Yuan.* Differentiable simple rings of prime characteristic // Duke Math. J. 1964. V. 31, N 4. P. 623–630.

22. *Медведев Ю. А.* Представления конечно порожденных йордановых PI-алгебр // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 1. С. 64–78.

Статья поступила 15 февраля 2016 г.

Желябин Виктор Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vicnic@math.nsc.ru