Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 517.54

О ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

В. Н. Дубинин

Аннотация. При условии связности некоторых лемнискат рациональной функции устанавливается точное неравенство, включающее логарифмическую энергию дискретного заряда, сосредоточенного на нулях и полюсах этой функции, а также модули ее производных в рассматриваемых точках. Равенство в указанной оценке достигается для специально подобранных нулей и полюсов подходящей дроби Золотарева и для специального распределения заряда.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.605

Ключевые слова: рациональная функция, дробь Золотарева, лемниската, логарифмическая энергия.

§ 1. Введение и формулировка результата

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^n$ — совокупность конечных точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ν — дискретный заряд, сосредоточенный в точках $\{z_k\}_{k=1}^n$. Величину

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n} \nu(z_k)\nu(z_l)\log\frac{1}{|z_k-z_l|}$$

называют *логарифмической энергией заряда* ν [1, гл. I, § 4]. В настоящее время имеется немало работ, посвященных оценкам дискретной энергии зарядов для различных ядер как на плоскости, так и в пространствах большего числа измерений (см., например, работу [2] и библиографию в ней). Нас интересует связь между логарифмической энергией нулей и полюсов рациональной функции и модулями ее производных в указанных точках. Пусть f — рациональная функция степени $p \geq 2$, имеющая только простые нули и полюса z_k, $k = 1, \dots, 2p$. Предположим, что заряд ν удовлетворяет условию: $\nu(z_k) = 1$, если z_k — нуль, и $\nu(z_k) = -1$, если z_k — полюс функции f. Известно, что для энергии такого заряда выполняется

$$\sum_{k=1}^{2p}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{2p} \nu(z_k)\nu(z_l)\log\frac{1}{|z_k-z_l|} = -\sum_{k=1}^{2p}\log|f'(z_k)|, \tag{1}$$

где $f'(z_k) := \lim\limits_{z\to z_k}(1/f(z))'$ в случае простого полюса z_k. Эта величина является обратной коэффициенту при $1/(z-z_k)$ в разложении функции f в ряд Лорана

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14–11–00022).

в проколотой окрестности точки z_k. Более общее утверждение дано в [3, теорема 12]. Естественно возникает вопрос об энергии части нулей и полюсов функции f. Если при этом равенство (1) не сохраняется, то о каком неравенстве, связывающем нули, полюса и производные функции f в этих точках, может идти речь? Каково экстремальное расположение нулей и полюсов в предполагаемом неравенстве? Как выглядит соответствующее утверждение для зарядов, не принимающих постоянное значение на множестве нулей (полюсов)? Трудно ожидать здесь содержательные ответы без дополнительных ограничений на функцию f. В данной работе рассматриваются указанные задачи в случае, когда рациональная функция f имеет связные лемнискаты $E_f(t) = \{z : |f(z)| = t\}$ при некоторых значениях t. Мотивация такого ограничения вызвана следующим обстоятельством. Оценку энергии в двух точках можно интерпретировать как двухточечную теорему искажения для рациональных функций. В случае полинома f нами установлена такая теорема при условии, что критические значения f расположены в единичном круге (см. [4]). Там же показана существенность этого ограничения. Заметим, что в случае полинома f указанное требование равносильно связности лемнискаты $E_f(1)$ или связности всех лемнискат $E_f(t)$, $t \geq 1$. Желая получить результат для рациональных функций f, рассмотрим условие связности лемнискат $E_f(t)$ для $t \in [1, \tau]$, где τ — некоторое число.

При фиксированных натуральном $p > 1$ и $0 < \varkappa < 1$ понадобится рациональная функция $Z_p(z) \equiv Z_p(z; \varkappa)$, заданная параметрически:

$$Z_p(\operatorname{sn}(u; k); \varkappa) := \operatorname{sn}(u\mathbf{K}(\varkappa)/\mathbf{K}(k); \varkappa), \quad u \in \mathbb{C},$$

где модуль k определяется из условия

$$\mathbf{K}'(k)\mathbf{K}(\varkappa) = p\mathbf{K}'(\varkappa)\mathbf{K}(k), \quad 0 < k < 1,$$

$\mathbf{K}(\cdot)$, $\mathbf{K}'(\cdot)$ — полные эллиптические интегралы первого рода [5]. Функцию $Z_p(z)$, а также композиции $Z_p(z)$ с дробно-линейными преобразованиями как в области аргумента, так и в области значений $Z_p(z)$ принято называть *дробями Золотарева* [6–8]. Хорошо известна роль дробей Золотарева в теории рациональной аппроксимации и расчетах электрических фильтров [5].

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $p > 1$, $\tau > 1$, и пусть f — рациональная функция степени p, лемнискаты которой $E_f(t)$ суть связные множества для любых $t \in [1, \tau]$[1)]. Пусть $\{z_k\}_{k=1}^n$ — совокупность конечных точек, состоящая из некоторых простых нулей и простых полюсов функции f, $n \leq 2p$ (число нулей и число полюсов в этой совокупности непусто). Предположим, что в точках $\{z_k\}_{k=1}^n$ задан заряд ν, удовлетворяющий следующим условиям: $\nu(z_k) > 0$, если z_k — нуль, $\nu(z_k) < 0$, если z_k — полюс функции f, и $\sum_{k=1}^n \nu(z_k) = 0$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n} \nu(z_k)\nu(z_l)\log\frac{1}{|z_k - z_l|} + \sum_{k=1}^{n}(\nu(z_k))^2\log|f'(z_k)|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n} \nu^*(z_k^*)\nu^*(z_l^*)\log\frac{1}{|z_k^* - z_l^*|} + \sum_{k=1}^{n}(\nu^*(z_k^*))^2\log|F'(z_k^*)|, \quad (2)$$

[1)] Достаточно потребовать связность только двух лемнискат $E_f(1)$ и $E_f(\tau)$.

где $F(z) \equiv F(z;p,\tau) = \Phi(Z_p(z;\varkappa))$,

$$\Phi(v) = \sqrt{\tau}\frac{v\sqrt{\varkappa}+1}{1-v\sqrt{\varkappa}}, \quad \sqrt{\varkappa} = \frac{\sqrt{\tau}-1}{\sqrt{\tau}+1},$$

$\{z_k^*\}_{k=1}^n$ *— совокупность, состоящая из того же числа нулей и числа полюсов, что и совокупность* $\{z_k\}_{k=1}^n$*, но уже функции* F*, причем в* $\{z_k^*\}_{k=1}^n$ *задействованы только первые нули и первые полюса* F *(считаемые слева направо); заряд* ν^* *задан на* $\{z_k^*\}_{k=1}^n$ *и удовлетворяет условиям:* $\{\nu^*(z_k^*)\}_{k=1}^n = \{\nu(z_k)\}_{k=1}^n$, $\nu^*(z_k^*) > 0$*, если* z_k^* *— нуль функции* F*, и* $\nu^*(z_k^*) < 0$*, если* z_k^* *— полюс* F*, причем меньшему значению модуля нуля (полюса) соответствует меньшее значение заряда* ν^**.*

Данный результат можно рассматривать как теорему искажения для рациональных функций (ср. [9, гл. IV, § 2], а также [10, § 8.3, 8.4]). Заметим, что условие $\sum\limits_{k=1}^n \nu(z_k) = 0$ необходимо лишь для придания неравенству (2) симметричной формы. Простые примеры показывают, что неравенство (2) не является, вообще говоря, равенством. Доказательство теоремы 1 осуществляется с помощью некоторой модификации метода симметризации [11], при котором результат симметризации располагается на римановой поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ функции, обратной полиному Чебышева первого рода. Следующий параграф носит вспомогательный характер. В нем показывается, как симметризацию [11] можно распространить на случай, когда результат преобразования принадлежит римановой поверхности функции, обратной подходящей дроби Золотарева.

§ 2. Симметризация

В этом параграфе предполагается, что читатель знаком с содержанием статьи [11]. Не будем повторять все определения и обозначения из [11], связанные с римановыми поверхностями, акцентируя внимание на сходстве и отличии введенного здесь преобразования с симметризацией в [11]. Положим $\gamma(\rho) = \{w : |w| = \rho\}$, $0 \le \rho \le \infty$. Обозначим через $\mathfrak{R}_p(\tau)$, $p \ge 2$, $\tau > 1$, совокупность всех римановых поверхностей $\mathscr{R}$, лежащих над комплексной w-сферой и удовлетворяющих следующим условиям:

1) линейная мера всех дуг на поверхности $\mathscr{R}$, лежащих над любой окружностью $\gamma(\rho)$, с учетом кратности не превосходит $2\pi p\rho$, $0 < \rho < \infty$;

2) для всех ρ, $1 \le \rho \le \tau$, любая замкнутая жорданова кривая на поверхности $\mathscr{R}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$ и не проходящая через точки разветвления $\mathscr{R}$, p-кратно покрывает эту окружность.

Заметим, что если f — рациональная функция степени p, для которой лемнискаты $E_f(t)$, $t \in [1,\tau]$, суть связные множества, то риманова поверхность $\mathscr{R}(f)$ функции, обратной f, принадлежит классу $\mathfrak{R}_p(\tau)$. Важным для нас частным случаем поверхности класса $\mathfrak{R}_p(\tau)$ является риманова поверхность функции, обратной дроби Золотарева $\mathscr{R}(F)$. Рассмотрим одно из представлений этой римановой поверхности. Пусть D_1 есть w-плоскость с разрезом по отрезку $[-\tau,-1]$; $D_2,\dots,D_{p-1}$ суть w-плоскости с разрезами по отрезкам $[-\tau,-1]$ и $[1,\tau]$, и пусть D_p — w-плоскость с разрезом по отрезку $[-\tau,-1]$ в случае четного p и по отрезку $[1,\tau]$ в случае, когда p нечетное. Риманову поверхность $\mathscr{R}(F)$ можно получить склеиванием областей D_k, $k = 1,\dots,p$, следующим образом. Область D_1 склеивается крест-накрест с областью D_2 по берегам разрезов вдоль отрезка $[-\tau,-1]$, область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль отрезка $[1,\tau]$, и т. д. Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль отрезка $[-\tau,-1]$ в случае четного p и вдоль отрезка $[1,\tau]$ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k, рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathscr{R}(F)$, будем обозначать через $\mathscr{D}_k$ соответственно, $k=1,\dots,p$. Обозначим через $\mathscr{L}$ луч, лежащий на листе $\mathscr{D}_1$ над лучом $[0,+\infty]$. Рассматриваем функцию F как отображение сферы $\overline{\mathbb{C}}$ на риманову поверхность $\mathscr{R}(F)$, при котором $F[-1,1]\subset\mathscr{L}$. Данное описание римановой поверхности $\mathscr{R}(F)$ вытекает из представления поверхности $\mathscr{R}(Z_p)$, которое, в свою очередь, несложно получить, зная свойства эллиптического синуса и используя принцип симметрии Римана — Шварца для конформных отображений.

Перейдем к определению круговой симметризации множеств и конденсаторов, которую будем обозначать символом Sym_τ в отличие от Sym в [11]. Пусть $\mathscr{R}$ — произвольная поверхность класса $\mathfrak{R}_p(\tau)$ и $\mathscr{B}$ — открытое множество на $\mathscr{R}$. Симметризация Sym_τ преобразует множество $\mathscr{B}$ в множество $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$, лежащее на поверхности $\mathscr{R}(F)$ и обладающее следующими свойствами. Если при данном ρ, $0\le\rho\le\infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{B}$, то над ней нет также и точек множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$. Если множество $\mathscr{B}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1\le\rho\le\tau$, p-кратно, то множество $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$ также покрывает $\gamma(\rho)$ p-кратно. Если $\mathscr{B}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0\le\rho<1$, $\tau<\rho\le\infty$, l-кратно, $l\le p$, то часть множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1,\dots,\mathscr{D}_l$. В остальных случаях при $1\le\rho\le\tau$ часть множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, является открытой дугой[2)] на $\mathscr{R}(F)$ с центром на луче $\mathscr{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathscr{B}(\rho):=\{W\in\mathscr{B}:|\operatorname{pr}W|=\rho\}$. При $0<\rho<1$ и $\tau<\rho<\infty$ часть $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$ и открытой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k=\Gamma_k(\mathscr{B},\rho)\subset\mathscr{D}_k$, $k=1,\dots,m+1$, $0\le m\le p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{B}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$. Здесь количество окружностей m зависит от меры множества $\mathscr{B}(\rho)$. Если указанная мера меньше $2\pi\rho$, то необходимо $m=0$ и множество окружностей пусто. Результат симметризации $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$ замкнутого множества $\mathscr{E}\subset\mathscr{R}$ также лежит на поверхности $\mathscr{R}(F)$ и определяется следующим образом. Если при данном ρ, $0\le\rho\le\infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{E}$, то над ней нет также и точек множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$. Если множество $\mathscr{E}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1\le\rho\le\tau$, p-кратно, то множество $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$ также p-кратно. Если $\mathscr{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0\le\rho<1$, $\tau<\rho\le\infty$, l-кратно, $l\le p$, то часть множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1,\dots,\mathscr{D}_l$. В остальных случаях часть множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, $1\le\rho\le\tau$, является замкнутой дугой (т. е. дугой, содержащей свои концы) на $\mathscr{R}(F)$ с центром на луче $\mathscr{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathscr{E}(\rho):=\{W\in\mathscr{E}:|\operatorname{pr}W|=\rho\}$ (в случае, когда данная мера равна нулю, соответствующая дуга является точкой на луче $\mathscr{L}$). Часть $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$ над $\gamma(\rho)$, $0<\rho<1$, $\tau<\rho<\infty$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$ и замкнутой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k\subset\mathscr{D}_k$, $k=1,\dots,m+1$, $0\le m\le p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{E}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$ (если указанная мера равна $2\pi\rho m$, где m — целое неотрицательное число, то дуга Γ_{m+1} является точкой).

Непосредственно из определения симметризации видно, что если $\mathscr{E}\subset\mathscr{B}$,

2) В случае $1<\rho<\tau$ это открытая жорданова дуга, а при $\rho=1$ и $\rho=\tau$ данная дуга может иметь точки самоприкасания.

то $\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{E} \subset \mathrm{Sym}_\tau \mathscr{B}$. Результат симметризации открытого множества $\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{B}$ есть множество, открытое в $\mathscr{R}(F)$, и если $\mathscr{E}$ — компакт в $\mathscr{R}$, то $\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{E}$ является компактом в $\mathscr{R}(F)$.

Действительно, любое открытое множество $\mathscr{B} \subset \mathscr{R}$ можно представить как объединение двух открытых множеств $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ таких, что $\mathrm{pr}\,\mathscr{B}_1 \subset \{w : |w| < \tau\}$, а $\mathrm{pr}\,\mathscr{B}_2 \subset \{w : |w| > 1\}$. Обозначим через Ψ инверсию относительно окружности $|w| = \sqrt{\tau}$. Понятно, как действует инверсия над точками римановой поверхности. Из определения симметризации видно, что

$$\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{B}_1 = \mathrm{Sym}\,\mathscr{B}_1, \quad \mathrm{Sym}_\tau \mathscr{B}_2 = \Psi \circ \mathrm{Sym} \circ \Psi(\mathscr{B}_2),$$

где Sym — симметризация из [11]. Осталось заметить, что

$$\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{B} = (\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{B}_1) \cup \mathrm{Sym}_\tau \mathscr{B}_2,$$

и воспользоваться леммой 4.2 из [11], согласно которой результат симметризации открытого множества есть множество открытое. Доказательство компактности $\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{E}$ осуществляется аналогично с привлечением леммы 4.3 из [11]. Изложенное выше позволяет определить симметризацию конденсатора $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ по формуле

$$\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{C} = (\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{B}, \mathrm{Sym}_\tau \mathscr{E}).$$

Следующее утверждение совпадает по форме с теоремой 1.1 в [11].

Теорема 2. *Для любого конденсатора $\mathscr{C}$ на поверхности $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p(\tau)$ справедливо неравенство*

$$\mathrm{cap}\,\mathscr{C} \geq \mathrm{cap}\,\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{C}. \tag{3}$$

Если дополнительно поле конденсатора $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ связное и существует потенциальная функция этого конденсатора, то равенство (3) *достигается только в следующих случаях:*

(i) *поле конденсатора $\mathscr{C}$ совпадает с полем конденсатора $\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{C}$ с точностью до поворота вокруг начала координат;*

(ii) *при некоторых s, t и l, $0 < s < t < \infty$, $1 < l \leq p$, поле конденсатора $\mathscr{C}$ l-кратно накрывает круговое кольцо*[3)] *$s < |w| < \tau$ так, что над каждой граничной окружностью этого кольца расположены либо только граничные точки множества $\mathscr{B}$, либо только граничные точки $\mathscr{E}$.*

Напомним, что доказательство теоремы 1.1 в [11] опирается на построение перестановки вещественнозначной функции, заданной на поверхности $\mathscr{R}$. Результат перестановки определен на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ функции, обратной полиному Чебышева T_p. Указанная перестановка осуществляется над каждой окружностью $\gamma(\rho)$, $0 \leq \rho \leq \infty$, независимо от значений функций над другими окружностями. Конструкция перестановки над окружностями $\gamma(\rho)$, $0 \leq \rho \leq 1$, отличается от перестановки над $\gamma(\rho)$, $\rho \geq 1$, но над окружностью $\gamma(1)$ эти перестановки совпадают. Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1.1 из [11] с той лишь разницей, что перестановку над окружностью $\gamma(\rho)$ при $\rho \geq \tau$ следует заменить суперпозицией инверсии Ψ, перестановки [11] над $\gamma(\rho)$, $\rho \leq 1$, и вновь инверсии Ψ. Поэтому полное доказательство теоремы 2 здесь не приводится. Заметим также, что если поле конденсатора $\mathscr{C}$ лежит над $|w| < \tau$ либо над $|w| > 1$, то теорема 2 непосредственно вытекает из теоремы 1.1 в [11].

[3)] То есть над каждой точкой этого кольца имеется ровно l точек поля с учетом кратности.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Введем следующие обозначения: $\{z_k\}_{k=1}^{s}$ — совокупность части простых нулей функции f, $\{z_k\}_{k=s+1}^{n}$ — часть простых полюсов f из формулировки теоремы 1, $\{z_k^*\}_{k=1}^{s}$, $\{z_k^*\}_{k=s+1}^{n}$ — совокупности соответственно нулей и полюсов функции F, пронумерованных таким образом, чтобы точка $W_k^* := F(z_k^*)$, рассматриваемая на поверхности $\mathscr{R}(F)$, принадлежала листу $\mathscr{D}_{p-k+1}$ при $k = 1, \dots, s$ и $W_k^* \in \mathscr{D}_{k-s}$ при $k = s+1, \dots, n$.

Положим $W_k = f(z_k) \in \mathscr{R}(f)$, $\nu_k = \nu(z_k)$, $\nu_k^* = \nu^*(z_k^*)$, $k = 1, \dots, n$. Наконец, при достаточно малом $r > 0$ обозначим через $\mathscr{U}_k(r)$ ($\mathscr{U}_k^*(r)$) замкнутый однолистный круг на поверхности $\mathscr{R}(f)$ ($\mathscr{R}(F)$), $W_k \in \mathscr{U}_k(r)$ ($W_k^* \in \mathscr{U}_k^*(r)$), лежащий над замкнутым кругом w-плоскости с центром в точке $w = 0$ радиуса r^{1/ν_k} (r^{1/ν_k^*}), $k = 1, \dots, s$, и пусть $\mathscr{U}_k(r)$ ($\mathscr{U}_k^*(r)$) — замкнутый однолистный «круг» на поверхности $\mathscr{R}(f)$ ($\mathscr{R}(F)$), $W_k \in \mathscr{U}_k(r)$ ($W_k^* \in \mathscr{U}_k^*(r)$), лежащий над множеством $|w| \geq 1/r^{1/|\nu_k|}$ ($|w| \geq 1/r^{1/|\nu_k^*|}$), $k = s+1, \dots, n$.

На поверхностях $\mathscr{R}(f)$ и $\mathscr{R}(F)$ рассмотрим конденсаторы

$$\mathscr{C}(r) = \left(\mathscr{R}(f) \setminus \bigcup_{k=1}^{s} \mathscr{U}_k(r),\ \bigcup_{k=s+1}^{n} \mathscr{U}_k(r)\right),$$

$$\mathscr{C}^*(r) = \left(\mathscr{R}(F) \setminus \bigcup_{k=1}^{s} \mathscr{U}_k^*(r),\ \bigcup_{k=s+1}^{n} \mathscr{U}_k^*(r)\right).$$

Заметим, что в условиях теоремы 1 выполняется $\nu_k^* \geq \nu_{k+1}^*$, $k = 1, \dots, s-1$, $\nu_k^* \leq \nu_{k+1}^*$, $k = s+1, \dots, n-1$. Поэтому при малых значениях r выполняются включения

$$\operatorname{pr} \mathscr{U}_{k+1}^*(r) \subset \operatorname{pr} \mathscr{U}_k^*(r), \quad k = 1, \dots, n-1,\ k \neq s.$$

Ввиду изложенного определение симметризации Sym_τ дает

$$\mathscr{C}^*(r) = \mathrm{Sym}_\tau \mathscr{C}(r),$$

стало быть, по теореме 2

$$\operatorname{cap} \mathscr{C}(r) \geq \operatorname{cap} \mathscr{C}^*(r). \tag{4}$$

Из конформной инвариантности емкости получаем

$$\operatorname{cap} \mathscr{C}(r) = \operatorname{cap} C(r), \quad \operatorname{cap} \mathscr{C}^*(r) = \operatorname{cap} C^*(r), \tag{5}$$

где «обобщенные» конденсаторы $C(r)$ и $C^*(r)$ определены следующим образом:

$$C(r) = \big(\overline{\mathbb{C}}, \{f^{-1}(\mathscr{U}_k(r))\}_{k=1}^{n}, \{\delta_k\}_{k=1}^{n}\big),\ C^*(r) = \big(\overline{\mathbb{C}}, \{F^{-1}(\mathscr{U}_k^*(r))\}_{k=1}^{n}, \{\delta_k\}_{k=1}^{n}\big),$$

$\delta_k = 0$, $k = 1, \dots, s$, $\delta_k = 1$, $k = s+1, \dots, n$ (см. [10, § 1.3]). Для вычисления емкостей этих конденсаторов можно воспользоваться асимптотической формулой (2.15) из [10]. Действительно, пластины $f^{-1}(\mathscr{U}_k(r))$ конденсатора $C(r)$ представляют собой «почти круги» с центрами в точках z_k радиуса $(1/|f'(z_k)|)r^{1/|\nu_k|}$, а пластины $F^{-1}(\mathscr{U}_k^*(r))$ конденсатора $C^*(r)$ суть «почти круги» с центрами в точках z_k^* и радиуса $(1/|F'(z_k^*)|)r^{1/|\nu_k^*|}$, $k = 1, \dots, n$. Применяя (2.15) из [10] (где $\delta = 1/2$ и $\nu_k \mapsto 1/|\nu_k|$), приходим к соотношению

$$\operatorname{cap} C(r) = -\frac{\pi}{2\log r}\sum_{k=1}^{n}|\nu_k| + \frac{\pi}{2(\log r)^2}\Bigg\{-\sum_{k=1}^{n}|\nu_k|^2 \log|f'(z_k)| + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n} \nu_k\nu_l \log|z_k - z_l|\Bigg\} + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0.$$

Аналогично

$$\operatorname{cap} C^*(r) = -\frac{\pi}{2\log r}\sum_{k=1}^{n}|\nu_k^*| + \frac{\pi}{2(\log r)^2}\Biggl\{-\sum_{k=1}^{n}|\nu_k^*|^2\log|F'(z_k^*)| + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n}\nu_k^*\nu_l^*\log|z_k^*-z_l^*|\Biggr\} + o\biggl(\Bigl(\frac{1}{\log r}\Bigr)^2\biggr), \quad r\to 0.$$

Поэтому из равенств (5) и неравенства (4) следует неравенство (2). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
2. *Brauchart J. S., Hardin D. P., Saff E. B.* The next-order term for optimal Riesz and logarithmic energy asymptotics on the sphere // Contemp. Math. 2012. V. 578. P. 31–61.
3. *Дубинин В. Н., Ковалев Л. В.* Приведенный модуль комплексной сферы // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 1998. Т. 254. С. 76–94.
4. *Дубинин В. Н.* Об одной экстремальной задаче для комплексных полиномов с ограничениями на их критические значения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 79–89.
5. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
6. *Богатырев А. Б.* Чебышевское представление рациональных функций // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 11. С. 19–40.
7. *Bogatyrev A. B.* How many Zolotarev fractions are there? // arxiv.org/abs/1511.05346. 2015.
8. *Гхашим М. М., Малоземов В. Н., Тамасян Г. Ш.* Дроби Золотарева // Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации (CNSA&NDO). 2016 (www.apmath.spbu.ru/cnsa).
9. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
10. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. Владивосток: Дальнаука, 2009.
11. *Дубинин В. Н.* Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 1. С. 69–96.

Статья поступила 26 апреля 2016 г.

Дубинин Владимир Николаевич
Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8, Владивосток, 690000;
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
dubinin@iam.dvo.ru