Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 517.962.22

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. В. Демиденко, А. А. Бондарь

Аннотация. Изучена задача об экспоненциальной дихотомии для систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами. Установлен критерий экспоненциальной дихотомии в терминах разрешимости специальной краевой задачи для системы дискретных уравнений Ляпунова. Получены оценки параметров дихотомии.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.604

Ключевые слова: разностное уравнение, экспоненциальная дихотомия, мультипликатор, система дискретных уравнений Ляпунова, параметры дихотомии.

§ 1. Введение

В работе мы изучаем задачу об экспоненциальной дихотомии для систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

где $A(n)$ — невырожденные матрицы размера $m \times m$ и матричная последовательность $\{A(n)\}$ N-периодическая, т. е.

$$A(n+N) = A(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Наша цель — изучение условий экспоненциальной дихотомии для систем (1.1) в терминах разрешимости специальных краевых задач для систем дискретных уравнений Ляпунова:

$$H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = K(l), \quad l = 0, 1, \dots, N-1,$$

а также получение оценок параметров дихотомии.

В силу условия периодичности (1.2) справедлив спектральный критерий: *для системы* (1.1) *имеет место экспоненциальная дихотомия тогда и только тогда, когда спектр матрицы монодромии*

$$U_N = A(N-1)\dots A(1)A(0) \tag{1.3}$$

не пересекается с единичной окружностью $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ (см., например, [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–01–00592) и программы Президиума РАН (проект № 0314–2015–0011).

Отметим, что задача о нахождении собственных значений неэрмитовых матриц плохо обусловленная (см., например, [2]). Поэтому при решении на компьютере задач об устойчивости или дихотомии для дифференциальных или разностных уравнений с использованием спектральных критериев можно получить неверные результаты (даже в случае постоянных коэффициентов!). По этой причине при решении важных прикладных задач помимо спектральных зачастую применяют другие критерии. Для автономных дифференциальных и разностных уравнений одними из наиболее эффективных являются критерии, основанные на использовании матричных и дискретных уравнений Ляпунова (см., например, [1–5]).

При исследовании задачи об устойчивости для дифференциальных и разностных уравнений с периодическими коэффициентами в [6–11] были предложены критерии асимптотической устойчивости решений, формулируемые в терминах разрешимости некоторых краевых задач для дифференциального уравнения Ляпунова и систем дискретных уравнений Ляпунова соответственно, а также получены оценки скорости убывания решений на бесконечности. Аналогичные результаты установлены для задачи об экспоненциальной дихотомии для систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (см., например, [10, 12]). Настоящая работа продолжает эти исследования.

Ряд интересных результатов для неавтономных дифференциальных и разностных уравнений содержится в [13].

§ 2. Краевая задача для системы дискретных уравнений Ляпунова

Рассмотрим начальную задачу для системы разностных уравнений (1.1):

$$\begin{cases} x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x_0 = a. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ее решение $\{x_n\}$ можно записать в виде

$$x_n = U_n a, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

где

$$U_n = \begin{cases} A(n-1)\dots A(1)A(0), & n \in \mathbb{Z}^+, \\ I, & n = 0, \\ (A(-1)A(-2)\dots A(n))^{-1}, & n \in \mathbb{Z}^-, \end{cases}$$

— *матрицант* системы (1.1).

Напомним определение экспоненциальной дихотомии для системы разностных уравнений (см., например, [1, 3]).

Определение. Система (1.1) называется *экспоненциально дихотомичной*, если пространство $\mathbb{C}^m$ распадается в прямую сумму двух подпространств:

$$\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^- \oplus \mathbb{C}^+,$$

и выполняются следующие условия:

а) для решений $\{x_n^-\}$ системы (1.1) таких, что $x_0^- \in \mathbb{C}^-$, выполнены оценки

$$\|x_n^-\| \le \mu_1 e^{-\nu_1(n-k)} \|x_k^-\|, \quad n \ge k,$$

с некоторыми постоянными $\mu_1, \nu_1 > 0$;

б) для решений $\{x_n^+\}$ системы (1.1) таких, что $x_0^+ \in \mathbb{C}^+$, выполнены оценки

$$\|x_n^+\| \le \mu_2 e^{-\nu_2(k-n)} \|x_k^+\|, \quad n \le k,$$

с некоторыми постоянными $\mu_2, \nu_2 > 0$;

в) взаимный наклон «движущихся подпространств»

$$\mathbb{C}_n^- = U_n \mathbb{C}^-, \quad \mathbb{C}_n^+ = U_n \mathbb{C}^+, \quad n \in \mathbb{Z},$$

отделен от нуля, т. е. при некотором $\beta > 0$ выполнена оценка

$$Sn(\mathbb{C}_n^-, \mathbb{C}_n^+) = \inf_{\substack{x_n^- \in \mathbb{C}_n^-,\, x_n^+ \in \mathbb{C}_n^+, \\ \|x_n^-\|=1,\, \|x_n^+\|=1}} \|x_n^- + x_n^+\| \ge \beta.$$

Указанные выше положительные константы

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \beta \tag{2.3}$$

называются *параметрами дихотомии.*

В этом параграфе будем предполагать, что спектр матрицы монодромии U_N не пересекается с единичной окружностью Γ. Как отмечено выше, это эквивалентно тому, что система (1.1) экспоненциально дихотомична.

Теорема 1. *Пусть P — проектор на максимальное инвариантное подпространство матрицы монодромии U_N, соответствующее собственным значениям, лежащим внутри единичного круга $B = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, при этом*

$$PU_N = U_N P. \tag{2.4}$$

Тогда для любых эрмитовых матриц $C(l)$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, существует единственное эрмитово решение следующей краевой задачи для системы дискретных уравнений Ляпунова:

$$H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = (U_l^*)^{-1} P^* C(l) P U_l^{-1}$$
$$-(U_l^*)^{-1}(I-P)^* C(l)(I-P)U_l^{-1}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1, \tag{2.5}$$

$$H(0) = H(N), \tag{2.6}$$

$$H(0) = P^* H(0) P + (I-P)^* H(0)(I-P). \tag{2.7}$$

Доказательство. Из вида системы (2.5) следует, что для доказательства теоремы достаточно показать, что краевые условия (2.6), (2.7) позволяют однозначно найти матрицу $H(0)$. Убедимся в этом.

Обозначим правые части системы (2.5) через $K(l)$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, и умножим второе уравнение в (2.5) слева на матрицу $A^*(0)$, а справа на $A(0)$, затем умножим третье уравнение слева на матрицу U_2^*, а справа на матрицу U_2 и т. д. Наконец, последнее уравнение в (2.5) умножим слева на матрицу U_{N-1}^*, а справа на U_{N-1}. Поскольку все матрицы $A(n)$ невырожденные, полученная система матричных уравнений эквивалентна исходной и в силу условия (2.6) имеет вид

$$\begin{cases} H(0) - A^*(0)H(1)A(0) = K(0), \\ A^*(0)H(1)A(0) - U_2^* H(2) U_2 = A^*(0)K(1)A(0), \\ \vdots \\ U_{N-2}^* H(N-2) U_{N-2} - U_{N-1}^* H(N-1) U_{N-1} = U_{N-2}^* K(N-2) U_{N-2}, \\ U_{N-1}^* H(N-1) U_{N-1} - U_N^* H(0) U_N = U_{N-1}^* K(N-1) U_{N-1}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Суммируя все уравнения системы (2.8), получим

$$H(0) - U_N^* H(0) U_N = K(0) + A^*(0)K(1)A(0) \\ + \dots + U_{N-2}^* K(N-2) U_{N-2} + U_{N-1}^* K(N-1) U_{N-1}$$

и, подставляя вместо $K(l)$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, их явные выражения, имеем

$$H(0) - U_N^* H(0) U_N = P^*(C(0) + C(1) + \dots + C(N-1))P \\ - (I-P)^*(C(0) + C(1) + \dots + C(N-1))(I-P). \quad (2.9)$$

Напомним, что спектр матрицы монодромии U_N не пересекается с единичной окружностью Γ, при этом P — проектор на максимальное инвариантное подпространство матрицы монодромии. Поэтому в силу условия (2.4) по теореме Крейна [1, гл. 1] дискретное уравнение Ляпунова (2.9) имеет решение $H(0)$. Нетрудно показать, что при условии (2.7) оно определяется единственным образом (см., например, [10, гл. 2]).

Отметим, что по формуле Крейна [1, гл. 1] решение уравнения (2.9) можно записать в виде сходящегося ряда

$$H(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_N^*)^k P^*(C(0) + C(1) + \dots + C(N-1)) P U_N^k \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (U_N^*)^{-k} (I-P)^*(C(0) + C(1) + \dots + C(N-1))(I-P) U_N^{-k}. \quad (2.10)$$

Все остальные эрмитовы матрицы $H(l)$, $l = 1, \dots, N-1$, определяются из системы (2.5) единственным образом.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и эрмитовы матрицы* $\{C(l)\}$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, *неотрицательно определены, при этом*

$$C(0) + C(1) + \dots + C(N-1) > 0. \quad (2.11)$$

Тогда все матрицы $H(0), H(1), \dots, H(N-1)$, *являющиеся решениями краевой задачи* (2.5)–(2.7), *положительно определены.*

Доказательство. Как было показано, матрица $H(0)$ определяется однозначно и для нее справедлива формула (2.10), из которой в силу условия (2.11) следует $H(0) > 0$. Используя это, убедимся в положительной определенности остальных матриц $H(l)$.

Вначале рассмотрим матрицу $H(N-1)$. Из последнего уравнения (2.8) имеем

$$U_{N-1}^* H(N-1) U_{N-1} = U_N^* H(0) U_N + P^* C(N-1) P - (I-P)^* C(N-1)(I-P)$$

и, используя формулу (2.10), получим

$$U_{N-1}^* H(N-1) U_{N-1} = U_N^* \left[\sum_{k=0}^{\infty} (U_N^*)^k P^*(C(0) + C(1) + \dots + C(N-1)) P U_N^k \right] U_N \\ + U_N^* \left[\sum_{k=2}^{\infty} (U_N^*)^{-k} (I-P)^*(C(0) + C(1) + \dots + C(N-1))(I-P) U_N^{-k} \right] U_N \\ + (I-P)^*(C(0) + C(1) + \dots + C(N-1))(I-P) \\ + P^* C(N-1) P - (I-P)^* C(N-1)(I-P).$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$U_{N-1}^*H(N-1)U_{N-1} \geq U_N^*\left[\sum_{k=0}^{\infty}(U_N^*)^kP^*(C(0)+C(1)+\dots+C(N-1))PU_N^k\right]U_N$$
$$+U_N^*\left[\sum_{k=2}^{\infty}(U_N^*)^{-k}(I-P)^*(C(0)+C(1)+\dots+C(N-1))(I-P)U_N^{-k}\right]U_N.$$

Обозначим символом Q эрмитову матрицу, стоящую в правой части этого неравенства.

Для доказательства того, что $H(N-1)>0$, очевидно, достаточно показать, что для любого вектора $v \neq 0$

$$\langle Qv, v\rangle > 0. \tag{2.12}$$

Доказательство проведем от противного. Предположим, что при некотором $v^0 \neq 0$ имеем $\langle Qv^0, v^0\rangle = 0$. Тогда, учитывая, что P и U_N коммутируют, это равенство можно переписать следующим образом:

$$\langle Qv^0, v^0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\left\langle (C(0)+\dots+C(N-1))U_N^{k+1}Pv^0, U_N^{k+1}Pv^0\right\rangle$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left\langle (C(0)+\dots+C(N-1))U_N^{1-k}(I-P)v^0, U_N^{1-k}(I-P)v^0\right\rangle = 0.$$

Отсюда в силу условия (2.11) имеем

$$U_N^{k+1}Pv^0 = 0,\ k=0,1,\dots,\quad U_N^{1-l}(I-P)v^0 = 0,\ l=2,3,\dots.$$

Ввиду невырожденности матрицы U_N это эквивалентно равенствам

$$Pv^0 = 0, \quad (I-P)v^0 = 0.$$

Но тогда $v^0 = 0$; противоречие. Следовательно, неравенство (2.12) выполнено, поэтому $H(N-1)>0$.

Аналогичным образом, используя уравнения (2.8) с учетом явного вида матриц $\{K(l)\}$, нетрудно получить, что

$$H(N-2)>0,\dots,H(1)>0.$$

Теорема доказана.

В дальнейшем для получения оценок параметров дихотомии (2.3) понадобится

Теорема 3. *Пусть P — проектор, удовлетворяющий условиям теоремы* 1. *Тогда существует единственное положительно определенное N-периодическое решение системы дискретных уравнений Ляпунова:*

$$H(l)-A^*(l)H(l+1)A(l) = (U_l^*)^{-1}(P^*U_l^*U_lP-(I-P)^*U_l^*U_l(I-P))U_l^{-1}, \quad l\in\mathbb{Z}, \tag{2.13}$$

для которого выполнено условие (2.7).

Доказательство. Вначале рассмотрим положительно определенные матрицы $H(l)$, $l=0,1,\dots,N$, являющиеся решением краевой задачи (2.5)–(2.7) при условии, что $C(l) = U_l^* U_l$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$, т. е. эти матрицы удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} H(0) - A^*(0)H(1)A(0) = P^*P - (I-P)^*(I-P), \\ H(1) - A^*(1)H(2)A(1) = (U_1^*)^{-1}(P^*U_1^*U_1P - (I-P)^*U_1^*U_1(I-P))U_1^{-1}, \\ \vdots \\ H(N-1) - A^*(N-1)H(N)A(N-1) \\ \qquad = (U_{N-1}^*)^{-1}(P^*U_{N-1}^*U_{N-1}P - (I-P)^*U_{N-1}^*U_{N-1}(I-P))U_{N-1}^{-1}, \\ H(0) = H(N) > 0, \\ H(0) = P^*H(0)P + (I-P)^*H(0)(I-P). \end{cases} \tag{2.14}$$

Рассмотрим краевую задачу для нахождения эрмитовых матриц $H(l)$, $l = N+1, \ldots, 2N$:

$$\begin{cases} H(N) - A^*(N)H(N+1)A(N) \\ \qquad = (U_N^*)^{-1}(P^*U_N^*U_NP - (I-P)^*U_N^*U_N(I-P))U_N^{-1}, \\ H(N+1) - A^*(N+1)H(N+2)A(N+1) \\ \qquad = (U_{N+1}^*)^{-1}(P^*U_{N+1}^*U_{N+1}P - (I-P)^*U_{N+1}^*U_{N+1}(I-P))U_{N+1}^{-1}, \\ \vdots \\ H(2N-1) - A^*(2N-1)H(2N)A(2N-1) \\ \qquad = (U_{2N-1}^*)^{-1}(P^*U_{2N-1}^*U_{2N-1}P - (I-P)^*U_{2N-1}^*U_{2N-1}(I-P))U_{2N-1}^{-1}, \\ H(N) = H(2N) > 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Учитывая условие (2.7), а также

$$A(n+N) = A(n), \quad U_{N+n} = U_nU_N, \quad U_{N+n}^{-1} = U_N^{-1}U_n^{-1}, \quad H(0) = H(N) > 0,$$

эту краевую задачу можно переписать в виде

$$\begin{cases} H(N) - A^*(0)H(N+1)A(0) = P^*P - (I-P)^*(I-P), \\ H(N+1) - A^*(1)H(N+2)A(1) \\ \qquad = (U_1^*)^{-1}(P^*U_1^*U_1P - (I-P)^*U_1^*U_1(I-P))U_1^{-1}, \\ \vdots \\ H(2N-1) - A^*(N-1)H(2N)A(N-1) \\ \qquad = (U_{N-1}^*)^{-1}(P^*U_{N-1}^*U_{N-1}P - (I-P)^*U_{N-1}^*U_{N-1}(I-P))U_{N-1}^{-1}, \\ H(N) = H(2N) > 0, \\ H(N) = P^*H(N)P + (I-P)^*H(N)(I-P). \end{cases} \tag{2.16}$$

Сравнивая краевые задачи (2.14) и (2.16) и используя однозначную разрешимость задачи (2.14), получаем, что задача (2.16), а следовательно, и задача (2.15) имеют единственное решение $H(N)$, $H(N+1)$, $H(2N)$. Более того,

$$H(l+N) = H(l) > 0, \quad l = 0, 1, \ldots, N.$$

Повторяя k раз аналогичные рассуждения, можно выписать следующую краевую задачу для нахождения матриц $H(l)$, $l = kN+1, \ldots, (k+1)N$:

$$\begin{cases} H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = (U_l^*)^{-1}(P^*U_l^*U_lP \\ \qquad -(I-P)^*U_l^*U_l(I-P))U_l^{-1}, \quad l = kN, \ldots, (k+1)N-1, \\ H(kN) = H((k+1)N). \end{cases} \tag{2.17}$$

В силу N-периодичности $\{A(n)\}$ и свойств матрицанта U_n получим однозначную разрешимость этой задачи, причем

$$H(kN) = H(0) > 0,\ H(kN+1) = H(1) > 0, \dots, H((k+1)N) = H(N) = H(0) > 0.$$

Отсюда ввиду произвольности натурального числа k система дискретных уравнений Ляпунова (2.13) при $l \in \mathbb{Z}^+$ имеет единственное положительно определенное N-периодическое решение, удовлетворяющее условию (2.7).

Точно так же устанавливается однозначная разрешимость краевой задачи (2.17) при любом целом $k < 0$, при этом все матрицы будут положительно определены. Следовательно, система дискретных уравнений Ляпунова (2.13) при $l \in \mathbb{Z}$ имеет единственное положительно определенное решение, удовлетворяющее условию (2.7).

Теорема доказана.

§ 3. Условия экспоненциальной дихотомии

В этом параграфе установим условие экспоненциальной дихотомии системы (1.1), которое формулируется в терминах разрешимости краевой задачи (2.5)–(2.7) для системы дискретных уравнений Ляпунова. Используя решение этой краевой задачи, в дальнейшем получим оценки параметров дихотомии (2.3).

Теорема 4. *Пусть эрмитовы матрицы* $C(0), C(1), \dots, C(N-1)$ *такие, что выполнено условие* (2.11). *Предположим, что существуют матрица* P *такая, что*

$$P^2 = P, \quad PU_N = U_N P,$$

и эрмитово решение $\{H(l)\}$ *краевой задачи* (2.5)–(2.7) *с* $H(0) > 0$. *Тогда для системы разностных уравнений* (1.1) *имеет место экспоненциальная дихотомия, более того,* P *— проектор на максимальное инвариантное подпространство относительно* U_N, *соответствующее собственным значениям матрицы* U_N, *лежащим внутри единичного круга* $B = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

Доказательство теоремы 4 проведем по аналогии с [10, гл. 2]. Рассмотрим $\mathbb{C}_1 = P(\mathbb{C}^m)$ — образ проектора P. Нетрудно показать, что $U_N(\mathbb{C}_1) \subseteq \mathbb{C}_1$. Действительно, для любого вектора $y \in \mathbb{C}_1$ существует $x \in \mathbb{C}^m$ такой, что $Px = y$. Тогда в силу условия $PU_N = U_N P$ имеем

$$U_N y = U_N P x = P U_N x \in \mathbb{C}_1.$$

Рассмотрим матрицу $(I - P)$. Очевидно, $(I - P)$ — проектор, при этом $(I - P)U_N = U_N(I - P)$. Пусть $(I - P)(\mathbb{C}^m) = \mathbb{C}_2$. Рассуждая так же, как и в случае $\mathbb{C}_1$, получим $U_N(\mathbb{C}_2) \subseteq \mathbb{C}_2$. Поскольку $P(I - P) = 0$ и $P + (I - P) = I$, то $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2$, при этом $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ являются инвариантными подпространствами относительно U_N. Покажем, что $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}^-$, $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}^+$.

Пусть $\{t_1, \dots, t_k\}$ — базис в $\mathbb{C}_1$, а $\{t_{k+1}, \dots, t_m\}$ — базис в $\mathbb{C}_2$. Очевидно, что $Pt_i = t_i$ при $i = 1, \dots, k$ и $Pt_i = 0$ при $i = k+1, \dots, m$. Так как $U_N(\mathbb{C}_i) \subseteq \mathbb{C}_i$, $i = 1, 2$, существуют такие матрицы U^k и U^{m-k} размеров $k \times k$ и $(m-k) \times (m-k)$ соответственно, что

$$U_N(t_1 \dots t_k) = (t_1 \dots t_k)U^k, \quad U_N(t_{k+1} \dots t_m) = (t_{k+1} \dots t_m)U^{m-k}.$$

Введем матрицу

$$T = (t_1 \dots t_k \mid t_{k+1} \dots t_m).$$

Тогда, очевидно, имеем

$$U_N = T \begin{pmatrix} U^k & 0 \\ 0 & U^{m-k} \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{3.1}$$

Аналогичным образом получим

$$P = T \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}, \tag{3.2}$$

где I_k — единичная матрица размера $k \times k$.

Учитывая (3.1), (3.2), условие (2.7) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} H(0) = (T^*)^{-1} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^* H(0) T \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \\ + (T^*)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} T^* H(0) T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} T^{-1}. \end{aligned}$$

Введем обозначение $\widetilde{H}(0) = T^* H(0) T$. Тогда

$$\widetilde{H}(0) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{H}(0) \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} \widetilde{H}(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\widetilde{H}(0)$ представима в блочном виде

$$\widetilde{H}(0) = \begin{pmatrix} H_k & 0 \\ 0 & H_{m-k} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где H_l — матрица размера $l \times l$.

Напомним, что $H(0)$ является решением уравнения (2.9). Поэтому с учетом (3.1)–(3.3) имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(0) - \begin{pmatrix} (U^k)^* & 0 \\ 0 & (U^{m-k})^* \end{pmatrix} \widetilde{H}(0) \begin{pmatrix} U^k & 0 \\ 0 & U^{m-k} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^*(C(0) + \cdots + C(N-1)) T \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix} T^*(C(0) + \cdots + C(N-1)) T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Введем обозначение

$$\widetilde{C} = T^*(C(0) + \cdots + C(N-1)) T$$

и по аналогии с $\widetilde{H}(0)$ представим эту матрицу в блочном виде

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} C_k & * \\ * & C_{m-k}, \end{pmatrix},$$

где C_l — матрицы размера $l \times l$, а символом $*$ обозначены блоки соответствующих размеров.

Отметим, что в силу условия (2.11) и невырожденности матрицы T имеем

$$C_k = C_k^* > 0, \quad C_{m-k} = C_{m-k}^* > 0. \tag{3.5}$$

Учитывая введенные обозначения, (3.4) можно переписать следующим образом:

$$\widetilde{H}(0) - \begin{pmatrix} (U^k)^* & 0 \\ 0 & (U^{m-k})^* \end{pmatrix} \widetilde{H}(0) \begin{pmatrix} U^k & 0 \\ 0 & U^{m-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_k & 0 \\ 0 & -C_{m-k} \end{pmatrix}.$$

Тогда по (3.3) матрица H_k является решением дискретного уравнения Ляпунова

$$H_k - (U^k)^* H_k U^k = C_k, \tag{3.6}$$

а матрица H_{m-k} — решение уравнения

$$H_{m-k} - (U^{m-k})^* H_{m-k} U^{m-k} = -C_{m-k}. \tag{3.7}$$

Поскольку $H(0) > 0$, имеем $H_k > 0$, $H_{m-k} > 0$.

Следовательно, в силу (3.5), учитывая знакоопределенность правых частей дискретных уравнений (3.6), (3.7), по критерию Ляпунова получаем, что спектр матрицы U^k принадлежит единичному кругу B, а спектр U^{m-k} — внешности круга. Тогда в силу (3.1) имеют место дихотомия спектра матрицы монодромии и экспоненциальная дихотомия для системы (1.1). Так как набор векторов $\{t_1, \dots, t_k\}$ — базис в $\mathbb{C}_1$, то $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}^-$, а набор векторов $\{t_{k+1}, \dots, t_m\}$ — базис в $\mathbb{C}_2$. Тем самым $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}^+$ и P — проектор на $\mathbb{C}^-$.

Теорема доказана.

Из теорем 1, 2, 4 непосредственно вытекает следующий критерий экспоненциальной дихотомии для систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами (1.1).

Теорема 5. *Пусть неотрицательно определенные эрмитовы матрицы $\{C(l)\}$ удовлетворяют условию* (2.11). *Тогда для экспоненциальной дихотомии системы* (1.1) *необходимо и достаточно существования эрмитовых матриц $H(0), H(1), \dots, H(N-1)$ и матрицы P, удовлетворяющих краевой задаче*

$$\begin{cases} H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = (U_l^*)^{-1}P^*C(l)PU_l^{-1} \\ \qquad -(U_l^*)^{-1}(I-P)^*C(l)(I-P)U_l^{-1}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1, \\ H(0) = H(N) > 0, \\ H(0) = P^*H(0)P + (I-P)^*H(0)(I-P), \\ P^2 = P, \quad PU_N = U_N P. \end{cases} \tag{3.8}$$

Отметим, что в случае постоянных коэффициентов $A(n) = A$ (т. е. $N = 1$, $U_1 = A$) этот критерий совпадает с критерием дихотомии Крейна.

§ 4. Оценки параметров дихотомии

Будем предполагать, что система (1.1) экспоненциально дихотомична. Следовательно, пространство $\mathbb{C}^m$ распадается в прямую сумму

$$\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^- \oplus \mathbb{C}^+,$$

при этом

$$\mathbb{C}^- = P(\mathbb{C}^m), \quad \mathbb{C}^+ = (I-P)(\mathbb{C}^m),$$

где P и $I-P$ — проекторы на максимальные инвариантные подпространства матрицы монодромии U_N, соответствующие собственным значениям U_N, лежащим внутри единичного круга B и вне его соответственно. Тогда любое решение $\{x_n\}$ системы (1.1) представляется в виде

$$x_n = x_n^- + x_n^+, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где
$$x_n^- = U_n x_0^-, \quad x_0^- \in \mathbb{C}^-, \quad x_n^+ = U_n x_0^+, \quad x_0^+ \in \mathbb{C}^+.$$

По определению экспоненциальной дихотомии существуют положительные константы (2.3) такие, что выполняются неравенства
$$\|x_n^-\| \le \mu_1 e^{-\nu_1(n-k)} \|x_k^-\|, \quad n \ge k, \tag{4.1}$$
$$\|x_n^+\| \le \mu_2 e^{-\nu_2(k-n)} \|x_k^+\|, \quad n \le k. \tag{4.2}$$

Наша цель — получить оценки параметров (2.3), используя эрмитовы матрицы $H(0), H(1), \dots, H(N-1)$, являющиеся решением краевой задачи (3.8) при
$$C(l) = U_l^* U_l, \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \tag{4.3}$$

Вначале выпишем явные формулы для матриц $H(l)$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, вытекающие из (2.10), (3.8).

Из формулы (2.10) с учетом (4.3), очевидно, имеем
$$H(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (U_N^*)^k P^* \left(\sum_{i=0}^{N-1} U_i^* U_i \right) P U_N^k + \sum_{k=1}^{\infty} (U_N^*)^{-k} (I-P)^* \left(\sum_{i=0}^{N-1} U_i^* U_i \right) (I-P) U_N^{-k}. \tag{4.4}$$

Формулы для остальных матриц $H(l)$ можно получить, используя теорему 3. Покажем, как это можно сделать для матрицы $H(1)$.

Пусть $\{H(l)\}$ — N-периодическое положительно определенное решение системы (2.13). Тогда матрицы $H(1), \dots, H(N), H(N+1)$ являются решением краевой задачи
$$\begin{cases} H(1) - A^*(1)H(2)A(1) = (U_1^*)^{-1}(P^*U_1^*U_1P - (I-P)^*U_1^*U_1(I-P))(U_1)^{-1}, \\ H(2) - A^*(2)H(3)A(2) = (U_2^*)^{-1}(P^*U_2^*U_2P - (I-P)^*U_2^*U_2(I-P))(U_2)^{-1}, \\ \vdots \\ H(N) - A^*(N)H(N+1)A(N) \\ \qquad = (U_N^*)^{-1}(P^*U_N^*U_NP - (I-P)^*U_N^*U_N(I-P))(U_N)^{-1}, \\ H(1) = H(N+1) > 0. \end{cases}$$

Перепишем эту задачу по аналогии с доказательством теоремы 1 следующим образом. Умножим второе уравнение системы слева на матрицу $A^*(1)$, а справа на матрицу $A(1)$, затем умножим третье уравнение слева на матрицу $A^*(1)A^*(2)$, а справа на матрицу $A(2)A(1)$ и т. д. Наконец, последнее уравнение умножим слева на матрицу $A^*(1)A^*(2)\dots A^*(N-1)$, а справа на $A(N-1)\dots A(2)A(1)$. В силу невырожденности матриц $A(n)$ и определения U_n получим эквивалентную задачу:
$$\begin{cases} H(1) - A^*(1)H(2)A(1) = (U_1^*)^{-1}(P^*U_1^*U_1P - (I-P)^*U_1^*U_1(I-P))(U_1)^{-1}, \\ A^*(1)H(2)A(1) - (A(2)A(1))^*H(3)A(2)A(1) \\ \qquad = (U_1^*)^{-1}(P^*U_2^*U_2P - (I-P)^*U_2^*U_2(I-P))(U_1)^{-1}, \\ \vdots \\ (A(N-1)\dots A(2)A(1))^*H(N)(A(N-1)\dots A(2)A(1)) \\ \qquad -(A(N)A(N-1)\dots A(2)A(1))^*H(1)(A(N)A(N-1)\dots A(2)A(1)) \\ \qquad = (U_1^*)^{-1}(P^*U_N^*U_NP - (I-P)^*U_N^*U_N(I-P))(U_1)^{-1}, \\ H(1) > 0. \end{cases}$$

Суммируя все уравнения системы, придем к уравнению для положительно определенной матрицы $H(1)$:

$$\begin{aligned}H(1) - (A(N)A(N-1)\dots A(2)A(1))^*H(1)(A(N)A(N-1)\dots A(2)A(1))\\ = (U_1^*)^{-1}P^*(U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \dots + U_N^*U_N)PU_1^{-1}\\ - (U_1^*)^{-1}(I-P)^*(U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \dots + U_N^*U_N)(I-P)U_1^{-1}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $A(N) = A(0)$, и вводя обозначения

$$\widetilde{H}(1) = U_1^*H(1)U_1, \tag{4.5}$$

получим дискретное уравнение Ляпунова вида (2.9)

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(1) - U_N^*\widetilde{H}(1)U_N = P^*(U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \dots + U_N^*U_N)P\\ - (I-P)^*(U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \dots + U_N^*U_N)(I-P).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Следовательно, используя формулу Крейна вида (2.10) и учитывая обозначение (4.5), имеем

$$\begin{aligned}H(1) = (U_1^*)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(U_N^*)^kP^*\left(\sum_{i=1}^{N}U_i^*U_i\right)PU_N^k\right)U_1^{-1}\\ + (U_1^*)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(U_N^*)^{-k}(I-P)^*\left(\sum_{i=1}^{N}U_i^*U_i\right)(I-P)U_N^{-k}\right)U_1^{-1}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Используя теорему 3 и проводя аналогичные рассуждения для матриц

$$\widetilde{H}(l) = U_l^*H(l)U_l > 0, \quad l = 2, \dots, N-1,$$

можно получить уравнения Ляпунова вида (4.6)

$$\begin{aligned}\widetilde{H}(l) - U_N^*\widetilde{H}(l)U_N = P^*(U_l^*U_l + U_{l+1}^*U_{l+1} + \dots + U_{N+l-1}^*U_{N+l-1})P\\ - (I-P)^*(U_l^*U_l + U_{l+1}^*U_{l+1} + \dots + U_{N+l-1}^*U_{N+l-1})(I-P).\end{aligned}$$

Тогда по формуле Крейна имеем

$$\begin{aligned}H(l) = (U_l^*)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(U_N^*)^kP^*\left(\sum_{i=l}^{N+l-1}U_i^*U_i\right)PU_N^k\right)U_l^{-1}\\ + (U_l^*)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(U_N^*)^{-k}(I-P)^*\left(\sum_{i=l}^{N+l-1}U_i^*U_i\right)(I-P)U_N^{-k}\right)U_l^{-1}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Из сравнения формул (4.4), (4.7) и (4.8) видно, что положительно определенное решение краевой задачи (3.8) при условии (4.3) записывается по формуле (4.8) при $l = 0, 1, \dots, N$. Следовательно, по теореме 3 N-периодическое положительно определенное решение системы дискретных уравнений Ляпунова (2.13) можно записывать по формуле (4.8) при любом $l \in \mathbb{Z}$.

В дальнейшем первое слагаемое справа в (4.8) будем обозначать через $H^-(l)$, а второе — через $H^+(l)$, т. е. формула (4.8) имеет вид

$$H(l) = H^-(l) + H^+(l), \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

В следующей теореме получим оценки решений системы (1.1) вида (4.1), (4.2).

Теорема 6. *Пусть* $\{H(l)\}$ — N*-периодическое положительно определенное решение системы* (2.13), *удовлетворяющее условию* (2.7). *Положим*

$$h^- = \max\{\|H^-(0)\|, \|H^-(1)\|, \dots, \|H^-(N-1)\|\},$$
$$h^+ = \max\{\|H^+(0)\|, \|H^+(1)\|, \dots, \|H^+(N-1)\|\},$$
$$M^- = \max_{l,m=0,\dots,N} \|H^{-1}(l)\|\|H^-(m)\|,$$
$$M^+ = \max_{l,m=0,\dots,N} \|H^{-1}(l)\|\|H^+(m)\|.$$

Тогда для решений системы (1.1) *справедливы оценки*

$$\|x_n^-\| \le \sqrt{M^-}\left(1 - \frac{1}{h^-}\right)^{\frac{n-k}{2}} \|x_k^-\|, \ n > k, \quad x_n^- = U_n P x_0, \tag{4.10}$$

$$\|x_n^+\| \le \sqrt{M^+}\left(1 + \frac{1}{h^+}\right)^{\frac{n-k}{2}} \|x_k^+\|, \ n < k, \quad x_n^+ = U_n (I-P) x_0. \tag{4.11}$$

Доказательство. Из формул (4.8), (4.9) для любого вектора a имеем

$$\begin{aligned}\langle H(n)a, a\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\left\langle \left(\sum_{i=n}^{N+n-1} U_i^* U_i\right) P U_N^k U_n^{-1} a, P U_N^k U_n^{-1} a \right\rangle \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle \left(\sum_{i=n}^{N+n-1} U_i^* U_i\right) (I-P) U_N^{-k} U_n^{-1} a, (I-P) U_N^{-k} U_n^{-1} a \right\rangle \\ = \langle H^-(n)a, a\rangle + \langle H^+(n)a, a\rangle.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Поэтому, учитывая, что решения системы (1.1) представимы в виде

$$x_n = U_n P x_0 + U_n (I-P) x_0 = x_n^- + x_n^+,$$

а также $PU_N = U_N P$, из (4.12) получим

$$H(n)x_n^- = H^-(n)x_n^-, \quad H(n)x_n^+ = H^+(n)x_n^+. \tag{4.13}$$

Поскольку $\{H(l)\}$ является решением системы дискретных уравнений Ляпунова (2.13), из (4.13) следует

$$\begin{aligned}\langle H(n+1)x_{n+1}^-, x_{n+1}^-\rangle = \langle A^*(n)H(n+1)A(n)x_n^-, x_n^-\rangle \\ = \langle H(n)x_n^-, x_n^-\rangle - \big\langle (U_n^*)^{-1} P^* U_n^* U_n P U_n^{-1} x_n^-, x_n^- \big\rangle \\ = \langle H^-(n)x_n^-, x_n^-\rangle - \|x_n^-\|^2.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Аналогично

$$\langle H(n+1)x_{n+1}^+, x_{n+1}^+\rangle = \langle H^+(n)x_n^+, x_n^+\rangle + \|x_n^+\|^2. \tag{4.15}$$

Учитывая неравенства

$$\langle H^-(n)x_n^-, x_n^-\rangle \le \|H^-(n)\|\|x_n^-\|^2, \quad \langle H^+(n)x_n^+, x_n^+\rangle \le \|H^+(n)\|\|x_n^+\|^2,$$

а также (4.13), в силу (4.14), (4.15) получим

$$\begin{aligned}\langle H(n+1)x_{n+1}^-, x_{n+1}^-\rangle \le \left(1 - \frac{1}{\|H^-(n)\|}\right)\langle H^-(n)x_n^-, x_n^-\rangle \\ = \left(1 - \frac{1}{\|H^-(n)\|}\right)\langle H(n)x_n^-, x_n^-\rangle,\end{aligned}$$

$$\langle H(n+1)x_{n+1}^+, x_{n+1}^+\rangle \geq \left(1 + \frac{1}{\|H^+(n)\|}\right)\langle H^+(n)x_n^+, x_n^+\rangle$$
$$= \left(1 + \frac{1}{\|H^+(n)\|}\right)\langle H(n)x_n^+, x_n^+\rangle.$$

Перепишем последнее неравенство в виде

$$\langle H(n)x_n^+, x_n^+\rangle \leq \left(1 + \frac{1}{\|H^+(n)\|}\right)^{-1}\langle H(n+1)x_{n+1}^+, x_{n+1}^+\rangle.$$

Повторяя последовательно предыдущие рассуждения и учитывая равенства (4.13), при любых $n > k$ приходим к неравенству

$$\langle H(n)x_n^-, x_n^-\rangle \leq \prod_{j=k}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{\|H^-(j)\|}\right)\langle H^-(k)x_k^-, x_k^-\rangle.$$

Отсюда

$$\|x_n^-\|^2 \leq \|H^{-1}(n)\|\|H^-(k)\|\prod_{j=k}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{\|H^-(j)\|}\right)\|x_k^-\|^2, \quad n > k.$$

Аналогичным образом при $n < k$

$$\langle H(n)x_n^+, x_n^+\rangle \leq \prod_{j=n}^{k-1}\left(1 + \frac{1}{\|H^+(j)\|}\right)^{-1}\langle H^+(k)x_k^+, x_k^+\rangle$$

и отсюда

$$\|x_n^+\|^2 \leq \|H^{-1}(n)\|\|H^+(k)\|\prod_{j=n}^{k-1}\left(1 + \frac{1}{\|H^+(j)\|}\right)^{-1}\|x_k^+\|^2, \quad n < k.$$

В силу N-периодичности последовательности $\{H(l)\}$ из полученных оценок, очевидно, вытекают неравенства (4.10), (4.11).

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следуют оценки для параметров дихотомии ν_1, ν_2, μ_1, μ_2.

В заключение приведем теорему, в которой дается оценка для взаимного наклона подпространств

$$\mathbb{C}_n^- = U_n P\mathbb{C}^m, \quad \mathbb{C}_n^+ = U_n(I-P)\mathbb{C}^m.$$

Теорема 7. *Имеет место оценка*

$$Sn(\mathbb{C}_n^-, \mathbb{C}_n^+) \geq \min_{n=0,1,\dots,N-1}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H(n))}{\min\{\|H^-(n)\|, \|H^+(n)\|\}}}, \tag{4.16}$$

где $\lambda_{\min}(H(n)) > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* $H(n)$.

Доказательство. По определению

$$Sn(\mathbb{C}_n^-, \mathbb{C}_n^+) = \inf_{\substack{x_n^- \in \mathbb{C}_n^-,\, x_n^+ \in \mathbb{C}_n^+,\\ \|x_n^-\|=1,\, \|x_n^+\|=1}}\|x_n^- + x_n^+\|.$$

Стало быть, нужно оценить снизу норму

$$\|x_n^- + x_n^+\| \ \text{ при } x_n^- \in \mathbb{C}_n^-, \ x_n^+ \in \mathbb{C}_n^+, \quad \|x_n^-\| = \|x_n^+\| = 1.$$

Используя матрицы $H^-(n)$, $H^+(n)$, имеем

$$\|x_n^- + x_n^+\|^2 \geq \frac{1}{\|H^-(n)\|} \langle H^-(n)(x_n^- + x_n^+), (x_n^- + x_n^+)\rangle, \tag{4.17}$$

$$\|x_n^- + x_n^+\|^2 \geq \frac{1}{\|H^+(n)\|} \langle H^+(n)(x_n^- + x_n^+), (x_n^- + x_n^+)\rangle. \tag{4.18}$$

Из неравенства (4.17), очевидно, следует

$$\|x_n^- + x_n^+\|^2 \geq \frac{1}{\|H^-(n)\|} (\langle H^-(n)x_n^-, x_n^-\rangle + \langle H^-(n)x_n^-, x_n^+\rangle + \langle H^-(n)x_n^+, x_n^-\rangle + \langle H^-(n)x_n^+, x_n^+\rangle).$$

Учитывая формулы (4.12), (4.13), имеем

$$\|x_n^- + x_n^+\|^2 \geq \frac{1}{\|H^-(n)\|} \langle H^-(n)x_n^-, x_n^-\rangle = \frac{1}{\|H^-(n)\|} \langle H(n)x_n^-, x_n^-\rangle \geq \frac{\lambda_{\min}(H(n))}{\|H^-(n)\|}.$$

Из неравенства (4.18) аналогичным образом вытекает

$$\|x_n^- + x_n^+\|^2 \geq \frac{\lambda_{\min}(H(n))}{\|H^+(n)\|}.$$

Из этих неравенств следует (4.16).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Науч. книга, 1997.
3. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.
4. *Булгаков А. Я.* Обоснование гарантированной точности выделения инвариантных подпространств несамосопряженных матриц // Численный анализ. Новосибирск: Наука, 1989. С. 12–93.
5. *Bulgak H.* Pseudoeigenvalues, spectral portrait of a matrix and their connections with different criteria of stability // Error control and adaptivity in scientific computing. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. P. 95–124.
6. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1227–1237.
7. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.
8. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Асимптотическая устойчивость решений возмущенных линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 493–507.
9. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284.
10. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2009.
11. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // J. Comp. Math. Optim. 2010. V. 6, N 1. P. 1–12.

12. *Demidenko G. V.* On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 2016. V. 6, N 1. P. 63–74.

13. *Романовский Р. К., Бельгарт Л. В., Добровольский С. М., Рогозин А. В., Троценко Г. А.* Метод функций Ляпунова для почти периодических систем. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2015.

Статья поступила 31 мая 2016 г.

Демиденко Геннадий Владимирович, Бондарь Анна Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru, nika5995@mail.ru