Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 512.542

$\mathfrak{F}$–ПРОЕКТОРЫ И $\mathfrak{F}$–ПОКРЫВАЮЩИЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. А. Ведерников, М. М. Сорокина

Аннотация. Пусть ω — непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Введены определения $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппы в конечной группе и изучены свойства этих подгрупп (существование, инвариантность при определенных гомоморфизмах, сопряженность, вложение). Получено развитие известных результатов Гашюца, Шунка, Эриксона и других исследователей.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.603

Ключевые слова: конечная группа, ω-локальная формация, $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор, $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа.

1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Известные результаты Холла [1] и Картера [2] были объединены и расширены в работе Гашюца [3], в которой установлены существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-проекторов ($\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп) в разрешимой группе для насыщенной (локальной) формации $\mathfrak{F}$ (см. также работу Шунка [4], в которой теорема Гашюца была распространена для класса $\mathfrak{F}$, являющегося примитивно замкнутым гомоморфом).

В ряде работ установлены необходимые и достаточные условия, при которых $\mathfrak{F}$-подгруппа M является $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой ($\mathfrak{F}$-проектором) группы G или содержится в ее $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе ($\mathfrak{F}$-проекторе), в частности, выявлены условия, при которых $\mathfrak{F}$-проектор группы является ее $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой (см., например, [5–9]).

В [10, 11] результаты из [3] для локальной формации $\mathfrak{F}$ распространены на произвольные группы с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$. В [12] условие разрешимости $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ ослаблено до $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимости (см. также теорему 15.7 в [13]).

Дальнейшее обобщение результаты из [3, 4, 10–12] получили в работе Эриксона [14] для примитивно замкнутого гомоморфа (класса Шунка), содержащегося в SQ-замкнутом универсуме. В работе Ферстера [15] к исследованию вопросов существования и сопряженности $\mathfrak{F}$-проекторов в группах для класса Шунка $\mathfrak{F}$, содержащегося в SQE_{Φ}-замкнутом универсуме, применен подход, основанный на использовании Q-границы класса Шунка (см. также [16, гл. III, VI]).

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел и ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$. В [17] введено понятие ω-локальной формации (см. также [18, определение 4]). В частности, ω-локальная формация при $\omega = \pi(\mathfrak{F})$ является локальной формацией.

Цель настоящей работы — расширить основные результаты работ [3, 4, 10–12, 14] и дополнить результаты из [5–9] для класса $\mathfrak{F}$, являющегося ω-локальной формацией или ω-примитивно замкнутым гомоморфом.

2. Определения, обозначения и предварительные результаты

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел. Используемые определения и обозначения для групп стандартны, их можно найти в [13, 16, 19]. Приведем лишь некоторые определения для классов групп. Через $\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$) обозначаем соответственно класс всех конечных (нильпотентных и абелевых) групп [16, 19].

Класс $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом* или *Q-замкнутым классом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Гомоморф $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если из $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ вытекает, что $G/A \cap B \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно нормальных подгрупп и из того, что $G = AB$, где A и B — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы в G, следует, что $G \in \mathfrak{F}$. *Формация Фиттинга* — формация, являющаяся классом Фиттинга. Класс $\mathfrak{F}$ называется *наследственным* или *S-замкнутым классом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $H \leq G$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$ [13].

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *насыщенным в* $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой $N \trianglelefteq G$ такой, что $N \leq \Phi(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$; класс $\mathfrak{F}$ называется *примитивно замкнутым в* $\mathfrak{X}$ или, коротко, *P-замкнутым в* $\mathfrak{X}$, если из $G/\operatorname{Core}_G(M) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. При $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ получаем соответственно определения *насыщенного класса* и *примитивно замкнутого* (коротко, *P-замкнутого*) класса. P-замкнутый гомоморф называется *классом Шунка* (см., например, [16, определение II, 2.1]) или *P-гомоморфом.*

Функция $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$ называется *ωF-функцией*, функция $g : \mathbb{P} \to \{$формации групп$\}$ — *$\mathbb{P}F$-функцией*, функция $\delta : \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ — *$\mathbb{P}FR$-функцией.* Формацию $\omega F(f, \delta) = (G : G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ будем называть *ω-веерной формацией с ω-спутником f и с направлением δ*; формацию $F(g, \delta) = (G : G/G_{\delta(p)} \in g(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ — *веерной формацией со спутником g и с направлением δ*; формацию $\omega F(f, \delta)$ — *ω-полной формацией*, если $\delta(p) = \mathfrak{E}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначать через $\omega AF(f) = (G : G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/O_{p'}(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$. В [18] установлено, что каждая формация является ω-полной для некоторого непустого множества ω. Формация $\omega F(f, \delta)$ называется *ω-локальной формацией*, если $\delta(p) = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначается через $\omega LF(f) = (G : G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$. Если $\omega = \pi(\mathfrak{F})$, то ω-локальная формация становится локальной формацией.

Определение 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-максимальной в* G, если $H \in \mathfrak{F}$ и из $H \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = H$.

Определение 2.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-проектором в* G, если для любой нормальной подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе G/N.

Определение 2.3 [20, гл. 1, п. 1.2.8]. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп.

Нормальная подгруппа K группы G называется $\mathfrak{F}$-*корадикальной*, если $G/K \in \mathfrak{F}$ и из $G/N \in \mathfrak{F}$, где $N \leq K$, следует, что $N = K$.

Замечание 2.1. Если класс $\mathfrak{F}$ является формацией, то $\mathfrak{F}$-корадикальная нормальная подгруппа в группе G единственна, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G (см., например, [13]).

Определение 2.4. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — непустые классы групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ назовем ω-*насыщенным в* $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой нормальной подгруппы N группы G такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Замечание 2.2. При $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ получаем определение ω-насыщенного класса групп [17].

Определение 2.5. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — непустые классы групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ назовем ω-*примитивно замкнутым в* $\mathfrak{X}$ или, коротко, ωP-*замкнутым в* $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ из $G/\operatorname{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы G следует, что $G \in \mathfrak{F}$. ωP-замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф коротко будем называть ωP-*гомоморфом в* $\mathfrak{X}$. Будем говорить, что $\mathfrak{F}$ — ωP-*замкнутый класс групп* (ωP-*гомоморф*), если $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{E}$ классом (ωP-гомоморфом в $\mathfrak{E}$).

Замечание 2.3. Если $\omega = \pi(\mathfrak{F})$, то ω-насыщенный в $\mathfrak{X}$ класс (ωP-замкнутый в $\mathfrak{X}$ класс, ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$) $\mathfrak{F}$ становится насыщенным в $\mathfrak{X}$ классом (соответственно P-замкнутым в $\mathfrak{X}$ классом, P-гомоморфом в $\mathfrak{X}$).

Доказательства следующих двух лемм осуществляются простой проверкой соответствующих определений (ср. [19, теорема 5.2]).

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда всякий ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$ является ω-насыщенным в $\mathfrak{X}$ классом.*

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда всякий P-замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф ωP-замкнут в $\mathfrak{X}$. В частности, каждый класс Шунка является ωP-гомоморфом.*

Определение 2.6. Группу G назовем ω-*примитивной*, если в G существует максимальная подгруппа M такая, что $\operatorname{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, а M будем называть ω-*примитиватором* группы G.

Замечание 2.4. Если $\omega = \pi(G)$, то ω-примитивная группа G становится примитивной группой, а M — ее примитиватором [19, гл. 4, п. 4.6]. Считаем, что в единичной группе E не существует максимальной подгруппы. Поэтому E не является ω-примитивной группой.

Лемма 2.3. *Пусть G — ω-примитивная группа с ω-примитиватором M и $F := F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Тогда либо F — ω'-группа, либо $F = F_p \times Q$, где $p \in \omega$, Q — ω'-группа, F_p является единственной минимальной нормальной ω-подгруппой группы G и $G = [F_p]M$.*

Доказательство. Пусть F не является ω'-группой. Тогда F — ωd-группа и F_ω — неединичная нормальная подгруппа группы G. Если $F_\omega \subseteq M$, то по определению 2.6 $F_\omega \subseteq \operatorname{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, что невозможно. Следовательно, $F_\omega \not\subseteq M$, поэтому $G = MF_\omega$.

Пусть $K := M \cap F_\omega$. Тогда $K \lhd M$. Поскольку $F_\omega \not\subseteq M$, то $K \subset F_\omega$ и по [19, теорема 3.12(2)] $K < N_{F_\omega}(K)$. Поэтому $M < N_G(K)$ и, значит, $K \lhd G$.

Тогда $K \subseteq \mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$. Таким образом, $K = 1$. Отсюда следует, что $G = [F_\omega]M$ и по [19, лемма 4.39] F_ω является минимальной нормальной подгруппой в G. Тем самым $F_\omega = F_p$ для некоторого $p \in \omega$. Тогда $F = F_p \times Q$, где Q — ω'-группа и $G = [F_p]M$.

Допустим, что в группе G существует минимальная нормальная ω-подгруппа R, отличная от F_p. Тогда $F_p \times R$ является нормальной ω-подгруппой в группе G и $D = M \cap F_pR \triangleleft M$, причем D является неединичной ω-группой. Так как $D \subseteq C_G(F_p)$, то $F_p \subseteq C_G(D)$ и, значит, $G = F_pM \subseteq N_G(D)$. Следовательно, $D \triangleleft G$. По определению 2.6 $D \subseteq \mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$. Получили противоречие. Следовательно, F_p является единственной минимальной нормальной ω-подгруппой группы G. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть G — ω-примитивная группа, M — ее ω-примитиватор и $O_\omega(G) \neq 1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа G содержит единственную минимальную нормальную ω-подгруппу N, $C_G(N) = N \times \mathrm{Core}_G(M)$ и $G = [N]M$;*

(2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную ω-подгруппу N, $C_G(N) = \mathrm{Core}_G(M)$ и $G = NM$;*

(3) *группа G содержит точно две минимальные нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2, причем $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong N_1N_2 \cap M$, $C_G(N_i) = N_{3-i} \times \mathrm{Core}_G(M)$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Так как $R := O_\omega(G) \neq 1$, в группе G существует минимальная нормальная подгруппа N, содержащаяся в R. По условию G — ω-примитивная группа и M — ее ω-примитиватор. Тогда в силу определения 2.6 $N \cap \mathrm{Core}_G(M) \leq R \cap \mathrm{Core}_G(M) = 1$, значит, $N \not\subseteq M$. Поэтому $G = NM$. Пусть $C := C_G(N)$. Тогда подгруппа C нормальна в G. Поскольку $C \cap M \triangleleft M$ и $N \leq C_G(C \cap M) \leq N_G(C \cap M)$, то $C \cap M \triangleleft G$. Так как $N \cap \mathrm{Core}_G(M) = 1$, то $\mathrm{Core}_G(M) \leq C$ и, значит, $\mathrm{Core}_G(M) \leq C \cap M$. Из $C \cap M \leq \mathrm{Core}_G(M)$ следует, что $C \cap M = \mathrm{Core}_G(M)$.

Пусть $N \subseteq C$. Тогда N — элементарная абелева p-группа для некоторого $p \in \omega$. Пусть $F := F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Так как $N \leq F$, по лемме 2.3 $N = F_p$ — единственная минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, $G = [N]M$ и $C = N \times \mathrm{Core}_G(M)$. Следовательно, G — группа типа (1).

Пусть $N \cap C = 1$ и $C \subseteq M$. Тогда N является прямым произведением попарно изоморфных простых неабелевых ω-групп и $C = \mathrm{Core}_G(M)$. Допустим, что в группе G существует минимальная нормальная ω-подгруппа $L \neq N$. Тогда $L \leq C = \mathrm{Core}_G(M)$ и $L \leq \mathrm{Core}_G(M) \cap R = 1$. Получили противоречие. Следовательно, N — единственная минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, и G — группа типа (2).

Пусть $N \cap C = 1$ и $C \not\subseteq M$. Тогда N является прямым произведением попарно изоморфных простых неабелевых ω-подгрупп, $C \cap M = \mathrm{Core}_G(M)$ и $G = CM = NM$. Пусть G содержит две различные минимальные нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2. Тогда можем считать, что N_1 и N_2 — неабелевы нормальные ω-подгруппы группы G, причем $N_i \not\subseteq M$, $i = 1, 2$. Следовательно, $G = MN_1 = MN_2$, причем $N_1 \cap N_2 = 1$. Допустим, что $D_i := M \cap N_i \neq 1$, $i = 1, 2$. Тогда $D_i \triangleleft M$ и $G = N_{3-i}M \leq N_G(D_i)$. Поэтому $D_i \triangleleft G$, что противоречит минимальности нормальной подгруппы N_i в группе G. Следовательно, $D_i = 1$ для любого $i = 1, 2$. Тем самым $G = [N_1]M = [N_2]M$. Пусть $C_1 := C_G(N_1)$. Тогда $N_2 \leq C_1$ и, значит, $C_1 \not\subseteq M$. Поэтому $G = MC_1$, причем

$M \cap C_1 = \mathrm{Core}_G(M)$. Так как $N_2 \leq C_1$ и $G = MN_2$, по модулярному тождеству $C_1 = N_2(M \cap C_1) = N_2 \times \mathrm{Core}_G(M)$.

Допустим, что G содержит минимальную нормальную ω-подгруппу N_3, отличную от N_1 и N_2. Тогда $C_1 = N_3 \times \mathrm{Core}_G(M) = (N_2 \times N_3)\,\mathrm{Core}_G(M)$. Из $|C_1| = |N_2| \cdot |\,\mathrm{Core}_G(M)| = (|N_2| \cdot |N_3| \cdot |\,\mathrm{Core}_G(M)|)/(|N_2N_3 \cap \mathrm{Core}_G(M)|)$ следует, что $|N_2N_3 \cap \mathrm{Core}_G(M)| = |N_3|$. Стало быть, $T := N_2N_3 \cap \mathrm{Core}_G(M)$ — нормальная ω-подгруппа группы G порядка, равного $|N_3|$. Тогда $T \leq \mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$. Получили противоречие. Тем самым группа G содержит точно две минимальные нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2. Теорема доказана.

Следствие 2.1 (Бэр [21]). *Пусть G — примитивная группа, M — ее примитиватор. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $C_G(N) = N$ и $G = [N]M$;*

(2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $C_G(N) = 1$ и $G = NM$;*

(3) *группа G содержит точно две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, причем $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong N_1N_2 \cap M$, $C_G(N_i) = N_{3-i}$, $i = 1, 2$.*

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой соответствующих определений.

Лемма 2.4. *Пусть $\mathfrak{X}$ — гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустая формация, содержащаяся в $\mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщенна в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ ωP-замкнута в $\mathfrak{X}$.*

3. $\mathfrak{F}^\omega$-проекторы групп

Определение 3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппу H группы G назовем *$\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G*, если для любой нормальной ω-подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе G/N.

Замечание 3.1. Если $\omega = \pi(G)$, то $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G становится $\mathfrak{F}$-проектором в G.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой гомоморф, N — нормальная ω-подгруппа группы G. Если H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G/N и K — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы H, то K является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G.*

Доказательство. Пусть H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G/N и K — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы H. Так как N — нормальная ω-подгруппа группы H, по определению 3.1 подгруппа KN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной в H/N. Поскольку H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G/N и N/N — нормальная ω-подгруппа группы G/N, ввиду определения 3.1 H/N — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/N и по определению 2.1 $H/N \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $KN/N = H/N$ и $H = KN$.

Покажем, что K является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G. Действительно, так как K — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы H, ввиду определений 3.1 и 2.1 $K \in \mathfrak{F}$. Пусть $K \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $U = K$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — гомоморф, то $H/N = KN/N \leq UN/N \cong U/U \cap N \in \mathfrak{F}$. Так как подгруппа H/N $\mathfrak{F}$-максимальна в G/N, то $H/N = UN/N$. Следовательно, $U \leq H$. Тогда из $\mathfrak{F}$-максимальности подгруппы K в H получаем $K = U$ и по определению 2.1 K — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G.

Предположим, что подгруппа K не является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G. Тогда найдется такая нормальная ω-подгруппа A в G, что KA/A не $\mathfrak{F}$-максимальна в G/A. В этом случае в G/A существует подгруппа $B/A \in \mathfrak{F}$ такая, что $KA/A \subset B/A$. Поскольку H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G/N и AN/N — нормальная ω-подгруппа в G/N, то $(H/N \cdot AN/N)/(AN/N) = (HA/N)/(AN/N)$ — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в $(G/N)/(AN/N)$, поэтому HA/NA — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/NA. Так как

$$(B/A \cdot AN/A)/(AN/A) \cong BN/AN \cong B/B \cap AN \cong (B/A)/((B/A) \cap (AN/A)) \in \mathfrak{F}$$

и

$$HA/NA = KNA/NA \leq BN/AN,$$

из $\mathfrak{F}$-максимальности подгруппы HA/NA в G/NA получаем $HA = KNA = BN$. Тогда $B = B \cap AKN = AK(B \cap N) \leq AH$. Поскольку K — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы H и $A \cap H$ — нормальная ω-подгруппа в H, то $K(A \cap H)/(A \cap H)$ — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в $H/A \cap H$. Так как

$$K(A \cap H)/(A \cap H) \cong K/(K \cap H \cap A) = K/K \cap A \cong KA/A$$

и

$$H/H \cap A \cong HA/A,$$

то KA/A — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в HA/A. Следовательно, из $KA/A \leq B/A \leq HA/A$ получаем, что $KA/A = B/A$; противоречие. Таким образом, подгруппа K является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$ и $G \in \mathfrak{X}$. Если G обладает $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой, то в G существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор.*

Доказательство. Пусть N — $\mathfrak{F}$-корадикальная нормальная ω-подгруппа группы $G \in \mathfrak{X}$. Предположим, что G не имеет $\mathfrak{F}^\omega$-проектора, причем G — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда $G \notin \mathfrak{F}$, поэтому $N \neq 1$. Следовательно, $O_\omega(G) \neq 1$. Пусть L — произвольная неединичная нормальная ω-подгруппа группы G. Так как $NL/L \cong N/N \cap L$ — ω-группа и $(G/L)/(NL/L) \cong G/NL \cong (G/N)/(NL/N) \in \mathfrak{F}$, группа G/L имеет $\mathfrak{F}$-корадикальную нормальную ω-подгруппу. Поскольку $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — гомоморф, то $G/L \in \mathfrak{X}$. Так как $|G/L| < |G|$, по индукции в G/L существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор T/L. Тогда по определению 3.1 $((T/L)(NL/L))/(NL/L)$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе $(G/L)/(NL/L)$. Отсюда следует, что $(TN)/(NL)$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в фактор-группе $G/(NL)$. Так как $G/(NL) \in \mathfrak{F}$, то $TN = G$. Поскольку $G/N = TN/N \cong T/T \cap N \in \mathfrak{F}$ и $T \cap N$ — ω-группа, группа T обладает $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой. В силу наследственности класса $\mathfrak{X}$ из $G \in \mathfrak{X}$ получаем, что $T \in \mathfrak{X}$. Если T — собственная подгруппа в G, то ввиду выбора группы G в T существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор K. Тогда по лемме 3.1 K — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G. Получили противоречие. Следовательно, $T = G$. Это означает, что G/L — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор в G/L, поэтому $G/L \in \mathfrak{F}$. Таким образом,

$$\text{для любой неединичной нормальной } \omega\text{-подгруппы } L \text{ группы } G \text{ справедливо } G/L \in \mathfrak{F}. \tag{3.1}$$

Покажем, что G — ω-примитивная группа. Действительно, если $\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) \neq 1$ для любой максимальной подгруппы M из G, то в силу (3.1)

$G/\operatorname{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$. Так как класс $\mathfrak{F}$ является ωP-гомоморфом в $\mathfrak{X}$, отсюда получаем $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, найдется максимальная подгруппа M в G такая, что $\operatorname{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$. Это означает, что G — ω-примитивная группа. Поскольку $O_\omega(G) \neq 1$, по теореме 2.1 группа G имеет не более двух минимальных нормальных ω-подгрупп.

Покажем, что G обладает единственной минимальной нормальной ω-подгруппой. Пусть A — минимальная нормальная ω-подгруппа группы G. По (3.1) $G/A \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $A \cap M = 1$. Тогда $G = MA$. Проверим, что в этом случае M является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G.

Предварительно установим, что M — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Действительно, $M \cong M/1 = M/M \cap A \cong MA/A = G/A \in \mathfrak{F}$, т. е. $M \in \mathfrak{F}$. Пусть $M \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$. Поскольку $M < \cdot G$ и $G \notin \mathfrak{F}$, то $M = U$. Это означает, что M является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G.

Пусть B — произвольная нормальная ω-подгруппа группы G. Покажем, что MB/B — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/B. Если $B = 1$, то утверждение верно. Пусть $B \neq 1$. Если $B \subseteq M$, то $B \subseteq \operatorname{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, что невозможно. Поэтому $B \not\subseteq M$ и, значит, $G = MB$. Ввиду (3.1) $MB/B = G/B \in \mathfrak{F}$. Это означает, что MB/B — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/B. Тем самым установлено, что M является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G. Получили противоречие. Следовательно, $M \cap A \neq 1$, и в силу теоремы 2.1 A является единственной минимальной нормальной ω-подгруппой группы G.

Пусть H — добавление к A в группе G. Согласно [13, лемма 11.1] $G = HA$ и $A \cap H \subseteq \Phi(H)$. Так как A — ω-группа, $H \cap A \subseteq \Phi(H) \cap O_\omega(H)$, причем $H/H \cap A \cong HA/A = G/A \in \mathfrak{F}$. По условию $\mathfrak{F}$ — ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$. По лемме 2.1 $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенным в $\mathfrak{X}$ классом. Поэтому из $H \in \mathfrak{X}$ и $H/H \cap A \in \mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. В G найдется $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа R такая, что $H \subseteq R$. Покажем, что в этом случае R является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G. Пусть S — нормальная ω-подгруппа из G. Проверим, что RS/S — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G/S. Так как $R \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — гомоморф, $RS/S \in \mathfrak{F}$. Пусть $RS/S \leq V/S \leq G/S$ и $V/S \in \mathfrak{F}$. Если $S = 1$, то $RS/S \cong R$, поэтому RS/S — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/S. Пусть $S \neq 1$. Тогда $A \subseteq S$ и, значит, $G = HA = HS = RS$. Следовательно, $RS/S = G/S$ — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/S. Таким образом, R является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G. Получили противоречие. Теорема доказана.

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой соответствующих определений (ср. [19, лемма 5.12]).

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G и N — нормальная ω-подгруппа в G, то HN/N — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G/N.*

Теорема 3.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф и $\mathfrak{F}$ — непустой подкласс класса $\mathfrak{X}$. Если каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ с $O_\omega(G) \neq 1$ обладает $\mathfrak{F}^\omega$-проектором, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *класс $\mathfrak{F}$ ωP-замкнут в $\mathfrak{X}$;*

(2) *если $H \in \mathfrak{F}$ и N — нормальная ω-подгруппа группы H, то $H/N \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ с $O_\omega(G) \neq 1$ имеет по крайней мере один $\mathfrak{F}^\omega$-проектор.

(1) Покажем, что $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$ классом. Допустим, что существует группа $G_1 \in \mathfrak{X} \backslash \mathfrak{F}$ такая, что $G_1/\operatorname{Core}_{G_1}(S) \cap O_\omega(G_1) \in \mathfrak{F}$ для любой

максимальной подгруппы S группы G_1, причем G_1 — группа наименьшего порядка с таким свойством. По условию теоремы в G_1 существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор R. Так как $R \in \mathfrak{F}$, то $R \subset G_1$. Тогда найдется максимальная подгруппа M группы G_1 такая, что $R \subseteq M$. По определению 3.1 $R(\mathrm{Core}_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1))/(\mathrm{Core}_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1))$ — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы $G_1/\,\mathrm{Core}_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1)$. Имеем

$$G_1/\,\mathrm{Core}_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1) = R(\mathrm{Core}_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1))/(\mathrm{Core}_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1))$$

в силу выбора группы G_1. Тогда $G_1 = R(\mathrm{Core}_{G_1}(M) \cap O_\omega(G_1)) \subseteq M$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что класс $\mathfrak{F}$ ωP-замкнут в $\mathfrak{X}$.

(2) Пусть $H \in \mathfrak{F}$ и N — нормальная ω-подгруппа группы H. Покажем, что $H/N \in \mathfrak{F}$. Если $N = 1$, то утверждение верно. Пусть $N \neq 1$. Так как $H \in \mathfrak{X}$, по условию в H существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор. Поскольку $H \in \mathfrak{F}$, то H является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в H и по лемме 3.2 H/N является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в H/N. Следовательно, $H/N \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 3.1 (Эриксон [14]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф и $\mathfrak{F}$ — непустой подкласс класса $\mathfrak{X}$. В любой группе $G \in \mathfrak{X}$ существует $\mathfrak{F}$-проектор тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$ гомоморфом.*

Определение 3.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{F}^\omega$-*покрывающей подгруппой* группы G, если $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V — нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$, следует, что $U = HV$.

Замечание 3.2. Если $\omega = \pi(G)$, то $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G становится $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой в G.

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой соответствующих определений (ср. [19, лемма 5.17]).

Лемма 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы G тогда и только тогда, когда H является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором каждой подгруппы группы G, в которой H содержится.*

Лемма 3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф и G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G и H — максимальная подгруппа группы G, то H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G.*

(2) *Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G и $H \leq K \leq G$, то H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в K.*

(3) *Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G и N — нормальная ω-подгруппа в G, то HN/N является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G/N.*

(4) *Если N — нормальная ω-подгруппа в G и H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/N, то каждая $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа из H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G.*

Доказательство. (1) Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G и H — максимальная подгруппа группы G. Покажем, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G. Пусть $H \leq U \leq G$, V — нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$. Проверим, что $U = HV$. Действительно, из $H \leq U \leq G$ в силу максимальности H в G получаем, что либо $H = U$, либо $U = G$. Если $H = U$, то $U = UV = HV$. Пусть $U = G$. Так как H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы $G = U$ и V — нормальная ω-подгруппа группы G, по определению 3.1 HV/V — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G/V. Поскольку $G/V = U/V \in \mathfrak{F}$, то $HV/V = G/V$, поэтому $HV = G = U$. Таким образом, H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G.

(2) Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G и $H \le K \le G$. Покажем, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в K. В самом деле, если $H \le U \le K$, V — нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$, то по определению 3.2 $U = HV$.

(3) Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G и N — нормальная ω-подгруппа в G. Покажем, что HN/N является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G/N. Согласно лемме 3.3 H является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G. Тогда по лемме 3.2 HN/N — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G/N. Пусть K/N — подгруппа в G/N, содержащая HN/N. Покажем, что HN/N является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в K/N. Действительно, так как $H \le K$, по п. (2) подгруппа H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в K и ввиду леммы 3.3 H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор в K. Отсюда по лемме 3.2 получаем, что HN/N — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор в K/N. Это согласно лемме 3.3 означает, что HN/N является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G/N.

(4) Пусть N — нормальная ω-подгруппа группы G, H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/N и K — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы H. Покажем, что K является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G. Согласно лемме 3.3 K является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в H. Тогда по определению 3.1 KN/N — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в H/N. Так как H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/N, по определению 3.2 $H/N \in \mathfrak{F}$. Поэтому $KN/N = H/N$ и $H = KN$. Из того, что K — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор в H, N — нормальная ω-подгруппа группы G и H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор в G/N, по лемме 3.1 получаем, что подгруппа K является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G.

Пусть $K \le U \le G$, V — нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$. Проверим, что $U = KV$. Так как $H = KN \le UN$, то $H/N = KN/N \le UN/N \le G/N$. Поскольку VN/N — нормальная ω-подгруппа в UN/N и H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/N, по определению 3.2 $UN/N = H/N \cdot VN/N = HVN/N = KVN/N$ и, значит, $UN = KVN$. Так как $K(U \cap N) = U \cap KN = U \cap H$, то

$$U = U \cap UN = U \cap KVN = KV(U \cap N) = (U \cap H)V.$$

Тогда

$$U/V = (U \cap H)V/V = (U \cap H)/(U \cap H \cap V) = (U \cap H)/(V \cap H) \in \mathfrak{F}.$$

Таким образом, $K \le U \cap H \le H$, $V \cap H$ — нормальная ω-подгруппа в $U \cap H$ и $(U \cap H)/(V \cap H) \in \mathfrak{F}$. По определению 3.2 $U \cap H = K(V \cap H)$, поэтому $U = V(U \cap H) = V(V \cap H)K = VK$. Следовательно, K — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп, G — группа, A — нормальная ω-подгруппа группы G. Следуя [16] (см. также [19, гл. 5, п. 5.2]), через $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ обозначим совокупность всех $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов группы G, $\mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ — совокупность всех $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгрупп группы G, $\mathrm{Comp}_G(A)$ — совокупность всех дополнений к подгруппе A в G.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X} \backslash \mathfrak{F}$, A — абелева минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, $G/A \in \mathfrak{F}$. Тогда $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = \mathrm{Comp}_G(A)$.*

Доказательство. Отметим, что согласно теореме 3.1 в группе G существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор, поэтому $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) \neq \oslash$. Применим индукцию по порядку группы G. Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G. Тогда из определений 3.1 и 2.1 следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 3.2 HA/A является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G/A. По условию теоремы $G/A \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $HA/A = G/A$ и $G = HA$. Если $G = H$, то $G \in \mathfrak{F}$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $G \neq H$. Из $G = HA$ получаем, что $A \nsubseteq H$. Так как A — абелева группа, подгруппа $A \cap H$ нормальна в G. Поскольку A — минимальная нормальная подгруппа группы G и $A \nsubseteq H$, то $A \cap H = 1$. Таким образом, $G = [A]H$, и H — максимальная подгруппа в G. По лемме 3.4(1) H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G. Поэтому $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) \subseteq \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$. Из леммы 3.3 следует, что $\mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) \subseteq \mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$. Следовательно, $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$. Из $G = [A]H$ получаем, что $H \in \mathrm{Comp}_G(A)$. Таким образом, $\mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = \mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) \subseteq \mathrm{Comp}_G(A)$.

Пусть $B \in \mathrm{Comp}_G(A)$. Это означает, что $G = [A]B$ и B — максимальная подгруппа группы G. Рассмотрим случай, когда $\mathrm{Core}_G(H \cap B) \cap O_\omega(G) \neq 1$. Пусть N — минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, содержащаяся в $H \cap B$. Так как $(AN/N) \cap (B/N) = (AN \cap B)/N = N(A \cap B)/N = N/N$, то $G/N = [AN/N](B/N)$ и $B/N \in \mathrm{Comp}_{G/N}(AN/N)$. Проверим, что для G/N справедливо условие теоремы. Действительно, так как $N \subseteq H \cap B$, то $A \nsubseteq N$ и ввиду [19, лемма 2.36(3)] AN/N — абелева минимальная нормальная ω-подгруппа в G/N. Далее, поскольку класс $\mathfrak{F}$ является гомоморфом,

$$(G/N)/(AN/N) \cong G/AN \cong (G/A)/(AN/A) \in \mathfrak{F}.$$

Так как $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — гомоморф, $G/N \in \mathfrak{X}$. Покажем, что $G/N \notin \mathfrak{F}$. Согласно лемме 3.2 H/N — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G/N. Если $G/N \in \mathfrak{F}$, то $H/N = G/N$, а значит, $G = H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Поэтому $G/N \notin \mathfrak{F}$. Таким образом, группа G/N удовлетворяет условию теоремы. По индукции $B/N \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G/N)$. Так как $B \cong G/A \in \mathfrak{F}$, то $B \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(B)$ и по лемме 3.4(4) $B \in \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$. Тем самым в случае, когда $\mathrm{Core}_G(H \cap B) \cap O_\omega(G) \neq 1$, получаем $\mathrm{Comp}_G(A) \subseteq \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = \mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$.

Пусть $\mathrm{Core}_G(H \cap B) \cap O_\omega(G) = 1$. Предположим, что $\mathrm{Core}_G(B) \cap O_\omega(G) \neq 1$ и K — минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, содержащаяся в B. Пусть $T := AK \cap H$. Покажем, что подгруппа T нормальна в G. В самом деле, так как $AK = A \times K$ и A — абелева группа, то $A \subseteq C_G(AK)$, поэтому $A \subseteq N_G(T)$. Ввиду $H \subseteq N_G(T)$ получаем $G = HA \subseteq N_G(T)$. Следовательно, T — нормальная ω-подгруппа в G. В силу $\mathrm{Core}_G(H \cap B) \cap O_\omega(G) = 1$ имеем $T \nsubseteq B$. Поскольку B — максимальная подгруппа группы G, то $G = TB$. Из $B \in \mathfrak{F}$ получаем $G/T = BT/T \cong B/B \cap T \in \mathfrak{F}$. Из $H \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$ по лемме 3.2 следует, что $H/T \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G/T)$. Поскольку $G/T \in \mathfrak{F}$, то $G = H$, что невозможно. Следовательно, $\mathrm{Core}_G(B) \cap O_\omega(G) = 1$. Тогда для любой неединичной нормальной ω-подгруппы L группы G справедливо $L \nsubseteq B$ и потому $G = BL$. Так как $B \in \mathfrak{F}$, то $G/L = BL/L \in \mathfrak{F}$. Таким образом, BL/L — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G/L для любой нормальной ω-подгруппы L из G. Согласно определению 3.1 B является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G, поэтому $\mathrm{Comp}_G(A) \subseteq \mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G)$.

Тем самым установлено, что

$$\mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}^\omega}(G) = \mathrm{Comp}_G(A).$$

Теорема доказана.

Поскольку всякий класс Шунка согласно лемме 2.2 является ωP-гомоморфом для любого непустого множества простых чисел ω, при $\omega = \pi(G)$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ из теоремы 3.3 непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 3.2 [19, теорема 5.19]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Шунка, A — минимальная нормальная подгруппа группы G, причем $G \notin \mathfrak{F}$, а $G/A \in \mathfrak{F}$. Если A абелева, то $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Cov}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Comp}_G(A)$.*

Замечание 3.3. Условия, при которых множество всех $\mathfrak{F}$-проекторов и множество всех $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп группы совпадают, также рассматриваются в [16] (см., например, [16, лемма III, 3.9(b)]).

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$, N — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G. Если H — $\mathfrak{F}$-подгруппа в G такая, что $G = HN$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппе группы G. В частности, если H — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G такая, что $G = HN$, то H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то G — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G. В этом случае утверждение верно. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Если $N = 1$, то $H = G$ — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G, и утверждение верно. Пусть $N \neq 1$ и A — минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, содержащаяся в N. Покажем, что для G/A выполняется условие теоремы. Действительно, N/A — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G/A. В силу того, что класс $\mathfrak{X}$ является гомоморфом, $G/A \in \mathfrak{X}$. Так как $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — гомоморф, $HA/A \in \mathfrak{F}$. Поскольку $G = HN$, то $G/A = (HA/A)(N/A)$. Таким образом, по индукции для G/A выполняется заключение теоремы. Это означает, что существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа K/A в группе G/A такая, что $HA/A \subseteq K/A$.

Рассмотрим случай, когда $K < G$. Покажем, что K удовлетворяет условию теоремы. В самом деле, $K \cap N$ — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы K, H — $\mathfrak{F}$-подгруппа в K, $K = G \cap K = HN \cap K = H(N \cap K)$. Ввиду наследственности класса $\mathfrak{X}$ имеем $K \in \mathfrak{X}$. По индукции существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа R группы K, содержащая H. Отсюда согласно лемме 3.4(4) получаем, что R — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G. Таким образом, в данном случае утверждение верно.

Пусть $G = K$. Тогда $G/A = K/A \in \mathfrak{F}$. Так как A — ω-группа, группа G обладает $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой и по теореме 3.1 группа G обладает $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором. Пусть T — $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G. Согласно теореме 3.3 T является дополнением к A в G и T — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G. Так как $G = [A]T$ и A — абелева минимальная нормальная ω-подгруппа в G, то T — максимальная подгруппа в G. Покажем, что подгруппа $N \cap T$ нормальна в G. Действительно, поскольку A нормальна в N и N нильпотентна, то $A \subseteq C_G(N)$ и поэтому $A \subseteq N_G(N \cap T)$. Тогда $G = TA \subseteq N_G(N \cap T)$ и, значит, $N \cap T$ — нормальная ω-подгруппа группы G. Если $N \cap T \neq 1$, то подгруппу A можно выбрать содержащейся в $N \cap T$. Тогда $G = TA = T \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $N \cap T = 1$. Тогда из $A \subseteq N$ и $G = [A]T = [N]T$ получаем, что $N = A$ — минимальная нормальная ω-подгруппа в G. Кроме того, $H \cap N$ — нормальная подгруппа в G. Если $H \cap N = N$, то $N \subseteq H$ и $G = HN = H \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Таким образом, $H \cap N = 1$, и подгруппа H является дополнением к N в G. По теореме 3.3 H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа группы G, содержащая H. Теорема доказана.

При $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 3.4 непосредственно получаем следующие результаты.

Следствие 3.3 (Эриксон [14]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф и $\mathfrak{F}$ — непустой P-гомоморф в $\mathfrak{X}$. Если H — $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G и $G = HF(G) \in \mathfrak{X}$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе группы G.*

Следствие 3.4 (Гашюц, см. [16, лемма III, 3.14]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Шунка, G — группа и N — нильпотентная нормальная подгруппа группы G. Если H — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G такая, что $G = HN$, то H является $\mathfrak{F}$-проектором группы G.*

Следствие 3.5 [13, теорема 15.9(1)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и G — группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если H — $\mathfrak{F}$-подгруппа в G такая, что $G = HF(G)$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе группы G.*

Теорема 3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая ω-локальная формация и N — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G и H, M — подгруппы группы G такие, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$ и $G = HN$. Если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы M. Применим индукцию по порядку группы G. Рассмотрим случай, когда $M < G$. Покажем, что M удовлетворяет условию теоремы. Действительно, $M = M \cap G = M \cap HN = H(M \cap N)$ и $M \cap N$ — нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы M. Следовательно, M удовлетворяет условию теоремы, и по индукции $M \in \mathfrak{F}$.

Пусть $M = G$. Так как H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в $M = G$, согласно [13, определение 8.1] существует максимальная цепь группы G вида $H = H_m \subset H_{m-1} \subset \dots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $m \geq 0$, такая, что H_i — $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа в H_{i-1} для любого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Индукцией по m докажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Если $m = 0$, то $H = G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $m > 0$. По предположению индукции $H_1 \in \mathfrak{F}$. Поскольку H_1 — $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа в G, по [13, определение 8.1] $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H_1$. Так как $H \subseteq H_1$, то $G = H_1N$ и по теореме 3.4 при $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ получаем, что H_1 является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Из определения 3.2 при $U = G$, $V = G^{\mathfrak{F}}$ получаем $G = H_1G^{\mathfrak{F}} = H_1$. Таким образом, $M = G \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 3.6 (Хоукс [8]; см. также [13, теорема 15.10]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом и H, M — подгруппы группы G такие, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$ и $G = HF(G)$. Если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

Теорема 3.6. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, G — $\mathfrak{X}$-группа, обладающая $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть H — $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G. Тогда из определения 3.1 следует, что H является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в группе G. Применяя индукцию по порядку группы G, покажем, что H является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G = H$ и в силу определения 3.2 G — $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G. Таким образом, в этом случае утверждение верно.

Пусть $G \notin \mathfrak{F}$ и L — $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимая $\mathfrak{F}$-корадикальная нормальная ω-подгруппа группы G. Тогда $L \neq 1$. Пусть A — минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, содержащаяся в L, и $\pi := \pi(\mathfrak{F})$. Так как $(G/A)/(L/A) \cong G/L \in \mathfrak{F}$, то G/A обладает π-разрешимой $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой. Поскольку $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ — гомоморф, $G/A \in \mathfrak{X}$. Согласно лемме 3.2 подгруппа HA/A является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G/A и по индукции HA/A — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/A. Пусть $K := HA$.

Пусть A является π-группой. Так как A — π-разрешимая группа, A является элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi$. Покажем, что для группы K выполняются условия теоремы 3.4. Действительно, A — нильпотентная нормальная ω-подгруппа в K и H — $\mathfrak{F}$-подгруппа в K. Так как $\mathfrak{X}$ — наследственный класс, $K \in \mathfrak{X}$. Поскольку H — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G, то H — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в K. По теореме 3.4 H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в K. Так как K/A — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/A, согласно лемме 3.4(4) H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G.

Пусть A — π'-группа. Так как $H \in \mathfrak{F}$, то H является π-группой. Тогда в силу теоремы Шура — Цассенхауза [19, теорема 4.32] $K = H[A]$ и H является S_π-подгруппой группы K, причем любые две S_π-подгруппы группы K сопряжены в K. Покажем, что H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой группы K. Пусть $H \leq U \leq K$ и $U/V \in \mathfrak{F}$, где V — нормальная ω-подгруппа в группе U. Тогда H является S_π-подгруппой группы U, а по [19, лемма 4.34] HV/V — S_π-подгруппа группы U/V. Так как $U/V \in \mathfrak{F}$, то U/V является π-группой. Тогда $HV/V = U/V$ и, значит, $U = HV$. По определению 3.2 H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в K. В силу того, что K/A — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G/A, по лемме 3.4(4) H является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в группе G.

2. Достаточность. Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G. Тогда по лемме 3.3 H является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором группы G. Теорема доказана.

Применяя лемму 2.2, из теоремы 3.6 при $\omega = \pi(G)$ непосредственно получаем

Следствие 3.7 (Эриксон [14]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой P-гомоморф в $\mathfrak{X}$, G — $\mathfrak{X}$-группа, обладающая $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной подгруппой. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа в G.*

Применяя [17, теорема 1] и лемму 2.4, из теоремы 3.6 при $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ получаем

Следствие 3.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая ω-локальная формация, G — группа, $G^{\mathfrak{F}}$ — $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимая ω-группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа в G.*

Ввиду [18, следствие 4.2] получаем результат для локальной формации.

Следствие 3.9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая локальная формация, G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}$-покрывающая подгруппа в G.*

Теорема 3.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая ω-локальная формация и $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой ω-группой. Тогда группа G имеет по* *крайней мере одну $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающую подгруппу (один $\mathfrak{F}^\omega$-проектор) и любые две $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы (два $\mathfrak{F}^\omega$-проектора) из G сопряжены в G.*

Доказательство. Так как согласно [17, теорема 1] $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация, по лемме 2.4 при $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ получаем, что $\mathfrak{F}$ является ωP-гомоморфом. Тогда по теореме 3.1 в группе G существует $\mathfrak{F}^\omega$-проектор. Согласно теореме 3.6 $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G. Таким образом, группа G имеет по крайней мере одну $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающую подгруппу.

Пусть H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы группы G и $\pi := \pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что H_1 и H_2 сопряжены в G. Применим индукцию по порядку группы G. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G = H_1 = H_2$, и, значит, утверждение верно. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$.

Согласно лемме 3.4(3) H_1L/L и H_2L/L — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы в G/L. Проверим, что для G/L выполняются условия теоремы. Действительно, по [13, лемма 1.2(1)] $(G/L)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}L/L$, поэтому $(G/L)^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа. Тогда по индукции H_1L/L и H_2L/L сопряжены в G/L. Следовательно, найдется такой элемент $x \in G$, что $H_1L/L = H_2^xL/L$ и, значит, $H_1L = H_2^xL$. Поскольку H_2 — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G, нетрудно проверить, что H_2^x является $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппой в G. По лемме 3.4(2) H_1 и H_2^x — $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы в H_1L. Так как $H_1L/L \in \mathfrak{F}$, то $(H_1L)^{\mathfrak{F}} \subseteq L$, поэтому $(H_1L)^{\mathfrak{F}}$ — π-разрешимая ω-группа. Если $H_1L < G$, то по индукции существует $y \in H_1L$ такой, что $H_1 = \left(H_2^x\right)^y$, и, значит, H_1 и H_2 сопряжены в G.

Пусть $G = H_1L = H_2^xL$. Если $\mathrm{Core}_G(H_1) \cap O_\omega(G) \neq 1$, то L можно выбрать так, что $L \subseteq H_1$. Тогда $G = H_1L = H_1 \in \mathfrak{F}$ и, значит, $G = H_1 = H_2$. Аналогично если $\mathrm{Core}_G\left(H_2^x\right) \cap O_\omega(G) \neq 1$, то можем считать, что $L \subseteq H_2^x$. Тогда $G = H_2^xL = H_2^x \in \mathfrak{F}$ и $G = H_2^x = H_1$. Следовательно,

$$\mathrm{Core}_G(H_1) \cap O_\omega(G) = \mathrm{Core}_G\left(H_2^x\right) \cap O_\omega(G) = 1.$$

Пусть L является π-группой. Так как L — π-разрешимая группа, L является элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi \cap \omega$. Тогда $L \cap H_1 = L \cap H_2^x = 1$ и $G = [L]H_1 = [L]H_2^x$. Поскольку $G/L = H_1L/L \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq L$, поэтому $L = G^{\mathfrak{F}}$. Так как L — абелева минимальная нормальная подгруппа группы G, то H_1 и H_2^x — максимальные подгруппы в G, причем H_1 и H_2^x $\mathfrak{F}$-абнормальны в G. Согласно [18, теорема 6] $\mathfrak{F}$ — p-локальная формация. Кроме того, $\mathrm{Core}_G(H_1) \cap G^{\mathfrak{F}} = \mathrm{Core}_G\left(H_2^x\right) \cap G^{\mathfrak{F}}$, $G^{\mathfrak{F}}$ — p-разрешимая группа, $|G : H_1|$ и $\left|G : H_2^x\right|$ — p-числа. Тогда по [13, теорема 8.5] подгруппы H_1 и H_2^x сопряжены в G. Тем самым установлено, что H_1 и H_2 сопряжены в G.

Пусть L является π'-группой. Так как по определению 3.2 $H_i \in \mathfrak{F}$, то H_i является π-группой, $i = 1, 2$. Тогда в силу теоремы Шура — Цассенхауза [19, теорема 4.32] $G = [L]H_1 = [L]H_2^x$, H_i является S_π-подгруппой группы G, причем любые две S_π-подгруппы группы G сопряжены в G. Отсюда следует, что H_1 и H_2 сопряжены в G. Теорема доказана.

Замечание 3.4. Авторы признательны рецензенту за пожелания по оформлению работы и за следующий пример.

Пример 3.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\omega \times \mathfrak{A}_2$, где $2 \notin \omega$, $\mathfrak{S}_\omega$ — класс всех разрешимых ω-групп, $\mathfrak{A}_2$ — класс всех абелевых 2-групп и G — диэдральная группа порядка 8. Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией, $\mathfrak{F}$-корадикал K группы G совпадет с $\mathfrak{A}_2$-корадикалом группы G. Следовательно, K — неединичная 2-группа, и, значит, K не является ω-группой, причем

$K \leq \Phi(G)$. Отсюда следует, что группа G не обладает $\mathfrak{F}$-проектором. Так как нормальной ω-подгруппой в группе G является лишь единичная подгруппа, по определению 3.1 каждая $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа в G — $\mathfrak{F}^\omega$-проектор в G. Тогда любая абелева максимальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G. Следовательно, циклическая подгруппа порядка 4 и две элементарные абелевы подгруппы порядка 4 являются $\mathfrak{F}^\omega$-проекторами в группе G. Поэтому условие «быть ω-подгруппой» $\mathfrak{F}$-корадикала в теореме 3.7 существенно.

Следствие 3.10 [13, теорема 15.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда G обладает по крайней мере одной $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой и любые две $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы из G сопряжены в G.*

Следствие 3.11 (Шмигирев [11], Шмид [10]; см. также [13, теорема 15.6]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и G — группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда G обладает по крайней мере одной $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой и любые две $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы из G сопряжены в G.*

Ввиду следствия 3.8 из теоремы 3.7 получаем

Следствие 3.12. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая ω-локальная формация, G — группа и $G^{\mathfrak{F}}$ — $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимая ω-группа. Тогда G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}^\omega$-проектором и любые два $\mathfrak{F}^\omega$-проектора группы G сопряжены в G.*

Из следствий 3.9 и 3.10 непосредственно получаем утверждение для локальной формации.

Следствие 3.13. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-проектором и любые два $\mathfrak{F}$-проектора группы G сопряжены в G.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3. P. 98–105.
2. *Carter R. W.* Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z. 1961. Bd 75. S. 136–139.
3. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. Bd 80, Heft 4. S. 300–305.
4. *Schunck H.* $\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1967. Bd 97, Heft 4. S. 326–330.
5. *Carter R. W., Hawkes T. O.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. V. 5, N 2. P. 175–201.
6. *Bauman S.* A note on covering and avoidance properties in solvable groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 21. P. 173–174.
7. *Beidleman S., Brewster B.* $\mathfrak{F}$-Covering subgroups of finite groups // Boll. Unione Mat. Ital. 1969. V. 3, N 6. P. 987–992.
8. *Hawkes T. O.* On formation subgroups of finite soluble group // J. London Math. Soc. 1968. V. 44, N 2. P. 243–250.
9. *Ведерников В. А.* О $\mathfrak{F}$-проекторах групп // Вопросы алгебры. 1985. Вып. 1. С. 9–22.
10. *Schmid P.* Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math. Z. 1974. Bd 137, Heft 1. S. 31–48.
11. *Шмигирев Э. Ф.* О некоторых вопросах теории формаций // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 213–225.
12. *Шеметков Л. А.* Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 6. С. 684–715.
13. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
14. *Erickson R. P.* Projectors of finite groups // Comm. Algebra. 1982. V. 10. P. 1919–1938.
15. *Förster P.* Projektive Klassen endlicher Gruppen. I. Schunck- und Gaschützklassen // Math. Z. 1984. Bd 186. S. 249–278.

16. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
17. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
18. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.
19. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Высш. шк., 2006.
20. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.
21. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 115–187.

Статья поступила 17 декабря 2015 г.

Ведерников Виктор Александрович
Московский городской пед. университет,
институт математики, информатики и естественных наук,
ул. Шереметьевская, 29, Москва 127521
`vavedernikov@mail.ru`

Сорокина Марина Михайловна
Брянский гос. университет им. академика И. Г. Петровского,
естественно-научный институт,
ул. Бежицкая, 14, Брянск 241036
`mmsorokina@yandex.ru`