Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 517.956.8:517.956.328:517.958:535.4

ОТКРЫТЫЕ ВОЛНОВОДЫ В ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ СОЧЛЕНЕНИЯХ ОБЛАСТЕЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ

Ф. Л. Бахарев, С. А. Назаров

Аннотация. Рассматривается спектральная задача Неймана для оператора Лапласа на двоякопериодической квадратной решетке тонких (диаметром $\varepsilon \ll 1$) круговых цилиндров с узлами — множествами единичного размера. Показано, что путем изменения или удаления одной или нескольких полубесконечных шеренг узлов можно образовать в существенном спектре исходной решетки дополнительные спектральные сегменты — зоны проходимости волн. Соответствующие волновые процессы локализованы в окрестностях упомянутых шеренг, образующих I-, V- и L-образные открытые волноводы. Результат получен при помощи асимптотического анализа собственных чисел модельных задач на разнообразных ячейках периодичности.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.602

Ключевые слова: спектральная задача Неймана, двоякопериодические решетки, лакуны, локализованные волны, открытые волноводы.

§ 1. Введение

1.1. Мотивировка. Из практических наблюдений известно, что в определенных условиях возможна локализация волновых процессов в узких окрестностях бесконечных или полубесконечных шеренг дефектов, инородных включений или иных периодических и цилиндрических вставок. Если возмущение двоякопериодической структуры сосредоточено внутри прямого цилиндра и сохраняет периодичность в направлении его оси (рис. 1(b),(c)), то изучение дополнительных участков существенного спектра, вызванных этим возмущением и провоцирующих локализованные волновые процессы, производится при помощи частичного преобразования Гельфанда и требует анализа точек дискретного спектра и соответствующих экспоненциально затухающих мод образованной модельной задачи с параметром Флоке (ср. п. 1.2). Вместе с тем нарушение периодичности, например, изломанные шеренги на рис. 2(b),(c), — угловые открытые волноводы, делают применение преобразования Гельфанда невозможным и вынуждают использовать усложненные подходы. В [1] был разобран общий метод идентификации существенного спектра двоякопериодической среды с несколькими полубесконечными периодическими шеренгами инородных

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (проект 0.38.237.2014). Работа первого автора выполнена также при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, гранта Правительства РФ (договор 11.G34.31.0026) и ОАО «Газпромнефть».

включений и/или полостей, которые (шеренги) расположены под углом одна к другой. Упрощенное описание соответствующей процедуры представлено в § 4. Каких-либо содержательных конкретных примеров в [1] не приведено. В данной работе при помощи асимптотического анализа из статьи [2], где был изучен спектр периодического волновода, состоящего из семейства идентичных «бусин», нанизанных на тонкую «спицу», проверяется, что при согласовании геометрических характеристик угловых открытых волноводов на рис. 1 в определенных частотных диапазонах возникают решения однородной задачи Неймана для оператора Лапласа — распространяющиеся волны, которые локализованы в трубчатой окрестности углового волновода и экспоненциально затухают при удалении от него. На физическом уровне строгости и без предметных выводов подобные объекты обсуждались в [3, гл. 7].

1.2. Периодическая структура и ее возмущения. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^3$ — открытое связное множество с гладкой границей $\partial\omega$, содержащееся в кубе $\mathbb{Q}_h = (-h/2, h/2)^3$ и включающее интервалы (P_{j-}, P_{j+}) при $j = 1, 2$, где $P_{1\alpha} = (\alpha h/2, 0, 0)$ и $P_{2\alpha} = (0, \alpha h/2, 0)$. Определим целочисленные сдвиги (бусины)

$$\omega(\beta) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - \beta_1, x_2 - \beta_2, x_3) \in \omega\}, \tag{1}$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}^2$ и $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, а также семейство тонких круговых цилиндров (спиц)

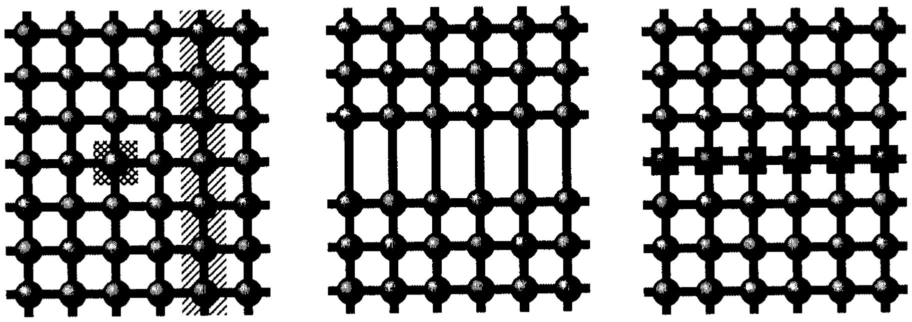
$$\mathscr{N}_\varepsilon(i, j) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i - j|^2 + |x_{3-i}|^2 \le \varepsilon^2\}, \quad i = 1, 2, \ j \in \mathbb{N},$$

с радиусом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, малым параметром. Двоякопериодическую структуру $\Omega(\varepsilon)$ (см. рис. 1(a)) определим соотношением

$$\Omega(\varepsilon) = \Big(\bigcup_{i=1,2} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathscr{N}_\varepsilon(i, j) \Big) \cup \Big(\bigcup_{\beta \in \mathbb{Z}^2} \omega(\beta) \Big).$$

На рис. 1(a) дважды штрихованное и штрихованное множества — ячейка периодичности и бесконечная шеренга ее сдвигов

$$\varpi(\varepsilon) = \Omega(\varepsilon) \cap \{|x_1| < 1/2, |x_2| < 1/2\}, \quad \Pi(\varepsilon) = \Omega(\varepsilon) \cap \{|x_2| < 1/2\}. \tag{2}$$



(a) (b) (c)

Рис. 1. Двоякопериодическая решетка (a) и решетки (b) и (c), периодические в одном направлении.

Опишем два принципиально различающихся способа линейных возмущений двоякопериодической структуры. Первый из них — удаление или замена целой шеренги тел. Пусть $\omega_\bullet$ — другое тело с теми же геометрическими свойствами, что и у тела ω. Аналогично формуле (1) определим множества $\omega_\bullet(\beta)$ и положим

$$\Omega_\circ(\varepsilon) = \Big(\bigcup_{i=1,2}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathscr{N}_\varepsilon(i,j)\Big)\cup\Big(\bigcup_{\beta\in\mathbb{Z}^2,\,\beta_2\neq 0}\omega(\beta)\Big),\quad \Omega_\bullet(\varepsilon)=\Omega_\circ(\varepsilon)\cup\Big(\bigcup_{\beta_1\in\mathbb{Z}}\omega_\bullet(\beta_1,0)\Big).$$

При таком изменении (см. рис. 1(b),(c)) структура сохраняет периодичность вдоль оси абсцисс. По второй формуле (2) определим множества $\Pi_\circ(\varepsilon)$ и $\Pi_\bullet(\varepsilon)$.

Другой способ возмущений — удаление или изменение половины шеренги:

$$\Omega_\circ{}'(\varepsilon)=\Omega_\circ(\varepsilon)\cup\left(\bigcup_{\beta_1=1}^{\infty}\omega(-\beta_1,0)\right),\quad \Omega_\bullet{}'(\varepsilon)=\Omega_\circ{}'(\varepsilon)\cup\left(\bigcup_{\beta_1=0}^{\infty}\omega_\bullet(\beta_1,0)\right).$$

В § 3 имеем дело с более сложными конструкциями — удаление (замена) тел в двух полубесконечных шеренгах, образующих открытый волновод в виде литеры L или V (см. рис. 2(b)(c)). Такие структуры обозначаем соответственно через $\Omega_\circ^L(\varepsilon)$, $\Omega_\bullet^L(\varepsilon)$ или $\Omega_\circ^V(\varepsilon)$, $\Omega_\bullet^V(\varepsilon)$.

1.3. Постановка задач и общие сведения о спектре. Пусть Ω — одна из областей, описанных в п. 1.2. Рассмотрим спектральную задачу Неймана для оператора Лапласа

$$-\Delta_x u(x)=\lambda u(x),\ x\in\Omega,\quad \partial_n u(x)=0,\ x\in\partial\Omega, \tag{3}$$

и ее вариационную формулировку

$$(\nabla_x u,\nabla_x v)_\Omega=\lambda(u,v)_\Omega\quad \forall v\in H^1(\Omega),$$

где $(\cdot,\cdot)_\Omega$ — стандартное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, а пространство Соболева $H^1(\Omega)$ снабжено скалярным произведением

$$\langle u,v\rangle_\Omega=(\nabla_x u,\nabla_x v)_\Omega+(u,v)_\Omega. \tag{4}$$

Задаче (3) отвечает (см. [4, гл. 10]) неограниченный положительный самосопряженный оператор $\mathscr{A}$ в пространстве $L^2(\Omega)$. Оператор $\mathscr{A}$ будем снабжать индексами и аргументами, унаследованными от множества Ω, на котором он рассматривается (ср. п. 2.1).

Спектр $\sigma(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$ в общем случае представляется в виде дизъюнктного объединения существенной $\sigma_{es}(\mathscr{A})$ и дискретной $\sigma_{di}(\mathscr{A})$ компонент:

$$\sigma(\mathscr{A})=\sigma_{di}(\mathscr{A})\cup\sigma_{es}(\mathscr{A}).$$

Поскольку области $\Omega(\varepsilon)$, $\Omega_\circ(\varepsilon)$ и $\Omega_\bullet(\varepsilon)$ периодичны, дискретные спектры соответствующих операторов пусты. Кроме того, очевидны включения

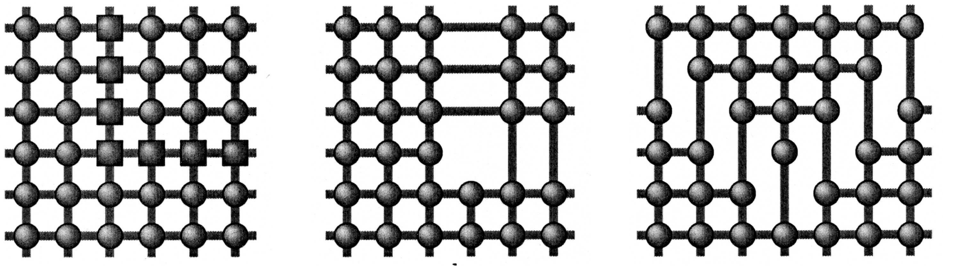
$$\sigma(\mathscr{A}_\circ(\varepsilon))\supset\sigma(\mathscr{A}(\varepsilon)),\quad \sigma(\mathscr{A}_\bullet(\varepsilon))\supset\sigma(\mathscr{A}(\varepsilon)). \tag{5}$$

Основная цель работы — предложить простые условия, при которых включения (5) оказываются строгими.

В § 4, следуя схеме, предложенной в [1], проверяем равенства

$$\sigma_{es}(\mathscr{A}_\circ{}'(\varepsilon))=\sigma_{es}(\mathscr{A}_\circ{}^L(\varepsilon))=\sigma_{es}(\mathscr{A}_\circ(\varepsilon)),\ \sigma_{es}(\mathscr{A}_\bullet{}'(\varepsilon))=\sigma_{es}(\mathscr{A}_\bullet{}^L(\varepsilon))=\sigma_{es}(\mathscr{A}_\bullet(\varepsilon)).$$

Однако в областях с открытыми волноводами не исключено появление дискретного спектра — он обсуждается в п. 3.3.



(a) (b) (c)

Рис. 2. L- и V-образные открытые волноводы.

§ 2. Бесконечная цепочка с локальным дефектом

2.1. Частичное преобразование Гельфанда. Поскольку в этом пункте речь пойдет только об 1-периодичных по первой координате областях $\Omega(\varepsilon)$, $\Omega_\bullet(\varepsilon)$ и $\Omega_\circ(\varepsilon)$, параметр ε и индексы $\bullet$, $\circ$ по возможности не пишем ни в обозначении соответствующих областей, ни в обозначениях операторов.

Применим частичное преобразование Гельфанда (см. [5] и, например, [6; 7, § 3.4])

$$u \mapsto \hat{u}(x,\eta) = U(x,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-i\eta k} u(x_1+k, x_2, x_3). \tag{6}$$

Оно устанавливает изоморфизмы

$$L^2(\Omega) \simeq L^2(0,2\pi; L^2(\Pi)), \quad H^l(\Omega) \simeq L^2\big(0,2\pi; H^l_\eta(\Pi)\big),\ l=1,2,$$

где $L^2(0,2\pi;B)$ — пространство Лебега функций со значениями в банаховом пространстве B, снабженное нормой

$$\|V; L^2(0,2\pi;B)\| = \left(\int\limits_0^{2\pi} \|V(\eta);B\|^2 d\eta\right)^{1/2}.$$

Пространство $H^2_\eta(\Pi)$ состоит из функций $U\in H^2(\Pi)$, удовлетворяющих равенствам

$$U\left(\frac12, x_2, x_3\right) = e^{i\eta} U\left(-\frac12, x_2, x_3\right), \quad \partial_1 U\left(\frac12, x_2, x_3\right) = e^{i\eta}\partial_1 U\left(-\frac12, x_2, x_3\right), \tag{7}$$

в то время как элементы пространства $H^1_\eta(\Pi)$ подчинены только первому условию (7). Через ∂_j обозначена частная производная по переменной x_j.

Преобразование Гельфанда приводит задачу (3) к семейству задач, зависящих от квазиимпульса $\eta\in[0,2\pi]$:

$$-\Delta_x U(x,\eta) = \Lambda(\eta) U(x,\eta),\ x\in\Pi, \quad \partial_n U(x,\eta)=0,\ x\in\partial\Pi\setminus(\Gamma_-\cup\Gamma_+), \tag{8}$$

с условиями квазипериодичности (7); здесь $\Gamma_\pm = \overline{\Pi}\cap\{x_1=\pm1/2\}$.

Оператор $\mathscr{A}(\varepsilon,\eta)$, порожденный задачей (8), (7) на периодическом в направлении оси x_2 множестве $\Pi(\varepsilon)$, имеет лишь существенный спектр лакунарной структуры

$$\sigma(\mathscr{A}(\varepsilon,\eta)) = \sigma_{es}(\mathscr{A}(\varepsilon,\eta)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n(\varepsilon,\eta),$$

при этом

$$\sigma(\mathscr{A}(\varepsilon)) = \bigcup_{\eta\in[0,2\pi]} \sigma(\mathscr{A}(\varepsilon,\eta)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n(\varepsilon), \quad \mathscr{B}_n(\varepsilon) = \bigcup_{\eta\in[0,2\pi]} \mathscr{B}_n(\varepsilon,\eta). \tag{9}$$

2.2. Известные асимптотики. Используя результаты из [2] (см. также [8–10] и др.), укажем асимптотику спектральных сегментов $\mathscr{B}_n(\varepsilon,\eta)$ при $\varepsilon \to 0$. Для формулировки результата рассмотрим две предельные задачи: задачу Неймана на множестве ω

$$-\Delta_x v(x) = \nu v(x),\ x\in\omega, \quad \partial_n v(x) = 0,\ x\in\partial\omega, \tag{10}$$

и задачу Дирихле на промежутке $(0,\ell)$

$$-\partial_z^2 w(z) = \mu w(z),\ z\in(0,\ell), \quad w(0) = w(\ell) = 0. \tag{11}$$

Обозначим через $0=\Lambda_1<\Lambda_2\le\Lambda_3\le\dots$ последовательность, полученную при учете кратностей объединением последовательности $0=\nu_1<\nu_2\le\nu_3\le\dots$ собственных чисел задачи (10) и дважды (как горизонтальные, так и и вертикальные перемычки на рис. 1(a) имеют длину ℓ) учтенной последовательности $\{\pi^2 j^2 \ell^{-2}\}_{j\in\mathbb{Q}}$ собственных чисел задачи (11).

Теорема 1. *Существуют такие величины α_n, $\beta_n(\eta)$ и $\gamma_n(\eta)$, что*

$$\mathscr{B}_n(\varepsilon,\eta) = [\Lambda_n + \alpha_n\varepsilon + \beta_n(\eta)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{5/2}), \Lambda_n + \alpha_n\varepsilon + \gamma_n(\eta)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{5/2})].$$

Эта теорема является аналогом теоремы 2 из [2] с той лишь разницей, что в последней рассматривалась не двоякопериодическая структура, а бесконечный вдоль одной оси волновод. Коэффициенты α_n, β_n и γ_n явно выражаются через собственные функции задач (10) и (11), а также ядро Пуассона $G(x,y,\nu)$ задачи (10). Зависимость от параметра η непрерывная и 2π-периодическая. Точные формулы далее востребованы не будут, однако могут быть получены простой модификацией формул из [2].

Операторы $\mathscr{A}_\bullet(\varepsilon,\eta)$ и $\mathscr{A}_\circ(\varepsilon,\eta)$ — компактные возмущения оператора $\mathscr{A}(\varepsilon,\eta)$, т. е.

$$\sigma_{es}(\mathscr{A}(\varepsilon,\eta)) = \sigma_{es}(\mathscr{A}_\bullet(\varepsilon,\eta)) = \sigma_{es}(\mathscr{A}_\circ(\varepsilon,\eta)),$$

однако не исключено появление у них дискретного спектра. Построим и обоснуем асимптотику при $\varepsilon\to0$ собственных чисел оператора $\mathscr{A}_\bullet(\varepsilon,\eta)$ в лакунах его спектра. В § 3 будут приведены аналогичные результаты для оператора $\mathscr{A}_\circ(\varepsilon,\eta)$, а также другие обобщения результатов.

2.3. Формальная асимптотика. Пусть $\lambda^\bullet$ — собственное число задачи Неймана на множестве $\omega_\bullet$, $u^\bullet$ — соответствующая собственная функция, нормированная в пространстве $L^2(\omega_\bullet)$. Предположим, что точка $\lambda^\bullet$ лежит вне спектра $\sigma_{es}(\mathscr{A}(\varepsilon,\eta))$ и, в частности, $\lambda^\bullet\neq0$. Тогда у задачи (8), (7) на множестве $\Pi_\bullet$ есть собственное число $\Lambda^\bullet(\varepsilon,\eta)$, расположенное в окрестности точки $\lambda^\bullet$. Более точно это утверждение сформулировано в теореме 2. В этом пункте построим асимптотические представления для $\Lambda^\varepsilon(\eta)$ и соответствующей собственной функции $U^\varepsilon(\cdot,\eta)$, а в следующем пункте приведем обоснование. Для простоты рассматриваем простое собственное число $\lambda^\bullet$. Детальный анализ кратного собственного числа в схожей ситуации был проведен в [2].

Примем асимптотический анзац

$$\Lambda^\bullet(\varepsilon,\eta) = \lambda^\bullet + \lambda^{(2)}(\eta)\varepsilon^2 + \tilde\lambda^\varepsilon(\eta).$$

Анзац для функции $U^\varepsilon(\cdot,\eta)$ устроен более сложно. Для его описания введем следующие обозначения: части тонкого цилиндра $\mathscr{N}_\varepsilon(1,j)$, примыкающие к телу $\omega_\bullet$ в точках $P_{1\pm}$, обозначим через $\Theta_{1\pm}$, т. е. $\Theta_{1\pm}=\mathscr{N}_\varepsilon(1,0)\cap\{\pm x_1\in(h/2,h/2+\ell)\}$. Аналогичные части, примыкающие к $\omega_\bullet$ в точках $P_{2\pm}$ и содержащиеся в $\Pi_\bullet(\varepsilon)$, обозначим через $\Theta_{2\pm}$, т. е. $\Theta_{2\pm}=\mathscr{N}_\varepsilon(2,0)\cap\{\pm x_2\in(h/2,h/2+\ell/2)\}$. Асимптотическое разложение функции U^ε конструируется из внешнего разложения $u^\bullet+\varepsilon^2u^{(2)}+\dots$ на $\omega_\bullet$, внешних разложений $w_{j\pm}+\varepsilon w'_{j\pm}+\dots$ на $\Theta_{j\pm}$ при $j=1,2$ и внутренних разложений в окрестностях точек $P_{j\pm}$. Применяем метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [11, 12] и др.) полностью аналогично [2]. Приведем краткую схему построения. Функции $w_{1\pm}$ переменной x_1 находятся из задач

$$-\partial_1^2w_{1\pm}-\lambda^\bullet w_{1\pm}=0\quad\text{на }(h/2,h/2+\ell),$$
$$w_{1\pm}(\pm h/2)=u^\bullet(P_{1\pm}),\quad w_{1\pm}(\pm h/2\pm\ell)=0.$$

Функции $w_{2\pm}$ переменной x_2 имеют вид $w_{2+}(x_2)=w_2(x_2-h/2)$, $w_{2-}(x_2)=e^{-i\eta}w_2(x_2+\ell+h/2)$, где w_2 — решение задачи

$$-\partial_2^2w_2-\lambda^\bullet w_2=0\quad\text{на }(0,\ell),\quad w_2(0)=u^\bullet(P_{2+}),\quad w_2(\ell)=e^{i\eta}u^\bullet(P_{2-}).$$

Функции $w_{1\pm}$ и w_2 выписываются явно:

$$w_{1\pm}(x_1)=\mp u^\bullet(P_{1\pm})\frac{\sin(\sqrt{\lambda^\bullet}(x_1\mp\ell\mp h/2))}{\sin(\sqrt{\lambda^\bullet}\ell)},$$

$$w_2(x_2)=e^{i\eta}u^\bullet(P_{2-})\frac{\sin(\sqrt{\lambda^\bullet}x_2)}{\sin(\sqrt{\lambda^\bullet}\ell)}-u^\bullet(P_{2+})\frac{\sin(\sqrt{\lambda^\bullet}(x_2-\ell))}{\sin(\sqrt{\lambda^\bullet}\ell)}.$$

Внутренние разложения около точек $P_{j\pm}$ имеют вид $u^\bullet(P_{j\pm})+\varepsilon V_{j\pm}(x)+\dots$. При этом величины $V_{j\pm}(x)=v_{j\pm}(\xi_{j\pm})$ зависят от быстрых переменных $\xi_{j\pm}=(\xi_{j\pm}^{(1)},\xi_{j\pm}^{(2)},\xi_{j\pm}^{(3)})$:

$$\xi_{j\pm}^{(1)}=\varepsilon^{-1}(\pm x_j-h/2),\quad \xi_{j\pm}^{(2)}=\mp(-1)^j\varepsilon^{-1}x_{3-j},\quad \xi_{j\pm}^{(3)}=\varepsilon^{-1}x_3,$$

и являются решениями задачи Неймана для уравнения Лапласа на объединении полупространства и полубесконечного кругового цилиндра

$$\Xi=\{\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3):\xi_1<0\text{ или }\xi_1\geq 0,\ |\xi_2|^2+|\xi_3|^2<1\}$$

с заданным поведением на бесконечности:

$$\begin{aligned}v_{j\pm}(\xi)=\pm\partial_jw_{j\pm}(\pm h/2)(\chi_l(\xi)(2|\xi|)^{-1}+\chi_r(\xi)(\xi_1+a_1))\\ \mp(-1)^j\partial_{3-j}u^\bullet(P_{j\pm})(\chi_l(\xi)\xi_2+\chi_r(\xi)a_2)\\ +\partial_3u^\bullet(P_{j\pm})(\chi_l(\xi)\xi_3+\chi_r(\xi)a_3)+\tilde v_{j\pm}(\xi).\end{aligned}\tag{12}$$

При этом χ_l и χ_r — гладкие срезающие функции, равные единице на множествах $\{\xi_1<0,\ |\xi|>3\}$ и $\{\xi_1>3\}$ и нулю вне множеств $\{\xi_1<0,\ |\xi|>2\}$ и $\{\xi_1<2\}$ соответственно. Постоянные a_k, $k=1,2,3$, возникают в разложениях решений (12) по необходимости и определяются исключительно по сечению цилиндров $\mathscr{N}$, круговому в рассматриваемом случае. Остатки $\tilde v_{j\pm}$ удовлетворяют оценкам

$$|\tilde v_{j\pm}(\xi)|+|\xi||\nabla_\xi\tilde v_{j\pm}(\xi)|\leq C|\xi|^{-2},\quad \xi\in\operatorname{supp}\chi_l,$$
$$|\tilde v_{j\pm}(\xi)|+|\nabla_\xi\tilde v_{j\pm}(\xi)|\leq Ce^{-\mu\xi_1},\quad \xi\in\operatorname{supp}\chi_r.$$

Слагаемое $u^{(2)}$ внешнего разложения на $\omega_\bullet$ находится из задачи

$$\begin{gathered}-\Delta_x u^{(2)}(x) - \lambda^\bullet u^{(2)}(x) = \lambda^{(2)} u^\bullet(x), \quad x \in \omega_\bullet, \\ \partial_n u^{(2)}(x) = 0, \quad x \in \partial\omega_\bullet \setminus \{P_{1\pm}, P_{2\pm}\}, \\ u^{(2)}(x) \sim \pm\partial_j w_{j\pm}(\pm h/2)(2|x - P_{j\pm}|)^{-1}, \quad x \to P_{j\pm}.\end{gathered} \tag{13}$$

Обозначим $b_{j\pm} = \pm 2\pi \partial_j w_{j\pm}(\pm h/2)$. Функцию $u^{(2)}$ представим в виде суммы $u^{(2)} = u'' + s$, где

$$s(x) = \sum_{j=1,2,\alpha=\pm} \chi_{j\alpha}(x) b_{j\alpha} \Phi_{j\pm}(x), \quad \Phi_{j\pm}(x) = (4\pi|x - P_{j\pm}|)^{-1}$$

и $\chi_{j\alpha}(x) = \chi(|x - P_{j\alpha}|)$, $\chi \in C_c^\infty[0, +\infty)$,

$$\chi(r) = 1 \text{ при } r < r_0/2, \quad \chi(r) = 0 \text{ при } r > r_0, \quad 0 \le \chi \le 1. \tag{14}$$

Здесь и далее для простоты считаем, что внутри шаров $\mathbb{B}_{r_0}(P_{j\alpha})$ граница множества $\omega_\bullet$ плоская и, в частности, $\partial_n \chi_{j\alpha} = 0$ на $\partial\omega_\bullet$ (см. [2], где рассмотрена общая ситуация).

Замечание 1. Функция u'' — решение задачи

$$-\Delta_x u''(x) - \lambda^\bullet u''(x) = \lambda^{(2)}(\eta) u^\bullet(x) + (\Delta_x + \lambda^\bullet) s(x), \quad x \in \omega_\bullet, \tag{15}$$

$$\partial_n u''(x) = 0, \quad x \in \partial\omega_\bullet. \tag{16}$$

Правая часть уравнения в задаче принадлежит $L^q(\omega_\bullet)$ при $q < 3$. Следовательно, решение u'', если существует, попадает в пространство Соболева $W_q^2(\omega_\bullet)$, в частности, $\nabla_x u'' \in L^p(\omega_\bullet)$ при $p < 6$ и $u'' \in L^\infty(\omega_\bullet)$.

Поскольку $\lambda^\bullet \neq 0$, по альтернативе Фредгольма условием разрешимости задачи (13), как и задачи (15), (16), служит равенство

$$\begin{aligned}\lambda^{(2)}(\eta) = \pi\sqrt{\lambda^\bullet}(\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda^\bullet}\ell)(|u^\bullet(P_{1-})|^2 + |u^\bullet(P_{1+})|^2 + |u^\bullet(P_{2-})|^2 + |u^\bullet(P_{2+})|^2) \\ - 2\cos\eta \operatorname{cosec}(\sqrt{\lambda^\bullet}\ell) u^\bullet(P_{2-}) u^\bullet(P_{2+})).\end{aligned} \tag{17}$$

Далее потребуются следующие асимптотические члены на множествах $\Theta_{j\pm}$. Функции $w'_{1\pm}$ являются решениями задач

$$-\partial_1^2 w'_{1\pm}(x_1) - \lambda^\bullet w'_{1\pm}(x_1) = 0, \quad \pm x_1 \in (h/2, h/2 + \ell),$$

$$w'_{1\pm}(\pm h/2) = \pm\partial_1 w_{1\pm}(\pm h/2) a_1 \pm \partial_2 u^\bullet(P_{j\pm}) a_2 + \partial_3 u^\bullet(P_{j\pm}) a_3, \quad w'_{1\pm}(\pm h/2 \pm \ell) = 0,$$

а функции $w'_{2\pm}$ имеют вид $w'_{2+}(x_2) = w'_2(x_2 - h/2)$, $w'_{2-}(x_2) = e^{-i\eta} w'_2(x_2 + \ell + h/2)$, где w'_2 — решение задачи

$$\begin{gathered}-\partial_2^2 w'_2(x_2) - \lambda^\bullet w'_2(x_2) = 0, \quad x_2 \in (0, \ell), \\ w'_2(0) = \partial_2 w_{2+}(h/2) a_1 - \partial_1 u^\bullet(P_{2+}) a_2 + \partial_3 u^\bullet(P_{2+}) a_3, \\ w'_2(\ell) = e^{i\eta}(-\partial_2 w_{2-}(-h/2) a_1 + \partial_1 u^\bullet(P_{2-}) a_2 + \partial_3 u^\bullet(P_{2-}) a_3).\end{gathered}$$

2.4. Обоснование асимптотики. В интегральном тождестве, обслуживающем задачу (8), (7) на множестве $\Pi_\bullet$,

$$(\nabla_x U, \nabla_x V)_{\Pi_\bullet} = \Lambda(\eta)(U, V)_{\Pi_\bullet}, \tag{18}$$

пробные функции V берутся из подпространства $H^1_\eta(\Pi_\bullet)$ функций из $H^1(\Pi_\bullet)$, удовлетворяющих первому (устойчивому) условию квазипериодичности (7). Скалярное произведение в пространстве $\mathscr{H}(\eta) = H^1_\eta(\Pi_\bullet)$ определим аналогично (4) по формуле $\langle U, V\rangle = (\nabla_x U, \nabla_x V)_{\Pi_\bullet} + (U, V)_{\Pi_\bullet}$. Введем положительный непрерывный оператор $T(\eta)$ с помощью соотношения

$$\langle T(\eta)U, V\rangle = (U, V)_{\Pi_\bullet}, \quad U, V \in \mathscr{H}(\eta).$$

Тогда вариационная задача (18) переписывается в виде

$$\langle U, V\rangle = (\Lambda(\eta) + 1)\langle T(\eta)U, V\rangle.$$

Тем самым оператор $T(\eta)$ является резольвентой оператора $\mathscr{A}_\bullet(\varepsilon, \eta)$ в точке $\Lambda = -1$. Для проверки наличия собственного числа оператора $\mathscr{A}_\bullet(\varepsilon, \eta)$ в $C\varepsilon^{5/2}$-окрестности точки $\lambda^\bullet + \lambda^{(2)}(\eta)\varepsilon^2$ достаточно убедиться в том, что у оператора $T(\eta)$ есть собственное число в $C\varepsilon^{5/2}$-окрестности точки $(1 + \lambda^\bullet + \lambda^{(2)}(\eta)\varepsilon^2)^{-1}$. Доказательство последнего факта опирается на лемму о «почти собственных» числах.

Лемма. *Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, $\mathscr{T}$ — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$, не имеющий точек существенного спектра на отрезке $[b - \tau, b + \tau] \subset (0, +\infty)$. Если существует нетривиальный вектор $\mathscr{U} \in \mathscr{H}$, для которого $\|\mathscr{T}\mathscr{U} - b\mathscr{U}; \mathscr{H}\| \le \tau\|\mathscr{U}; \mathscr{H}\|$, то на промежутке $[b - \tau, b + \tau]$ лежит хотя бы одно собственное число оператора $\mathscr{T}$.*

Соорудим «почти собственную» функцию $\mathscr{U}$ на основе проведенного асимптотического анализа. Для этого введем функции $\chi^a_{j\pm}(x) = \chi(a^{-1}(x - P_{j\pm}))$, где χ — срезающая функция из (14). Пусть еще $\mathscr{X}^a(x) = \sum\limits_{j,\alpha} \chi^a_{j\alpha}(x)$. Здесь и далее символ $\sum\limits_{j,\alpha}$ означает суммирование по $j = 1, 2$ и $\alpha = \pm$. Итак, положим

$$\begin{aligned}\mathscr{U}(x) &= (1 - \mathscr{X}^\varepsilon(x))(u^\bullet(x) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x)) + \sum\nolimits_{j,\alpha} \chi^1_{j\alpha}(x)(u^\bullet(P_{j\alpha}) + \varepsilon V_{j\alpha}(x)) \\ &- \sum\nolimits_{j,\alpha}\bigl(1 - \chi^\varepsilon_{j\alpha}(x)\bigr)\chi^1_{j\alpha}(x)(u^\bullet(P_{j\alpha}) + (x - P_{j\alpha})\nabla_x u^\bullet(P_{j\alpha}) + \alpha\varepsilon^2 b_{j\alpha}\Phi_{j\alpha}(x))\end{aligned}$$

при $x \in \omega_\bullet$,

$$\begin{aligned}\mathscr{U}(x) &= \bigl(1 - \chi^\varepsilon_{j\alpha}(x)\bigr)(w_{j\alpha}(x_j) + \varepsilon w'_{j\alpha}(x_j)) + \chi^1_{j\alpha}(x)(w_{j\alpha}(\alpha h/2) + \varepsilon V_{j\alpha}(x)) \\ &- \bigl(1 - \chi^\varepsilon_{j\alpha}(x)\bigr)\chi^1_{j\alpha}(x)(w_{j\alpha}(\alpha h/2) + (x_j - \alpha h/2)\partial_j w_{j\alpha}(\alpha h/2) + \varepsilon w'_{j\alpha}(\alpha h/2))\end{aligned}$$

при $x \in \Theta_{j\alpha}$ и $\mathscr{U}(x) = 0$ при $x \in \Pi_\bullet \setminus \bigl(\omega_\bullet \cup \bigcup\limits_{j,\alpha}\Theta_{j\alpha}\bigr)$.

Введем еще многочлен Тейлора функции $u^\bullet$:

$$t_{j\alpha}[u^\bullet](x) = u^\bullet(P_{j\alpha}) + (x - P_{j\alpha})\nabla_x u^\bullet(P_{j\alpha}).$$

Предложение 1. *Верно соотношение $\|\mathscr{U} - u^\bullet; L^2(\omega_\bullet)\| = O(\varepsilon^{3/2})$.*

Доказательство. Указанная норма оценивается сверху суммой $L^2(\omega_\bullet)$-норм

$$A_{11} = \bigl\|\chi^\varepsilon_{j\alpha}(u^\bullet - t_{j\alpha}[u^\bullet])\bigr\|, \quad A_{12} = \Bigl\|\varepsilon^2(1 - \mathscr{X}^\varepsilon)\Bigl(u^{(2)} - \sum\nolimits_{j,\alpha} b_{j\alpha}\chi^1_{j\alpha}\Phi_{j\alpha}\Bigr)\Bigr\|,$$

$$A_{13} = \bigl\|\chi^1_{j\alpha}(u^\bullet(P_{j\alpha}) + \varepsilon V_{j\alpha} - t_{j\alpha}[u^\bullet])\bigr\|.$$

Благодаря формуле Тейлора $u^\bullet(x) - t_{j\alpha}[u^\bullet](x) = O(\varepsilon^2)$ на носителе срезки $\chi_{j\alpha}$ имеем

$$A_{11} \le \Bigg(\int\limits_{\operatorname{supp}\chi^\varepsilon_{j\alpha}} |u^\bullet(x) - t_{j\alpha}[u^\bullet](x)|^2\,dx \Bigg)^{1/2} \le C(\varepsilon^4\varepsilon^3)^{1/2} \le C\varepsilon^{7/2}.$$

Норма A_{12} не превосходит величины $C\varepsilon^2$ ввиду замечания 1, а норма A_{13} не превосходит $C\varepsilon^{3/2}$ по лемме 5 из [2]. $\square$

Предложение 2. *Верно соотношение* $\|\nabla_x(\mathscr{U} - u^\bullet); L^2(\omega_\bullet)\| = O(\varepsilon^{3/2})$.

Доказательство. Проверка сводится к обработке таких $L^2(\omega_\bullet)$-норм:

$$A_{21} = \big\|(u^\bullet - t_{j\alpha}[u^\bullet])\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big\|, \quad A_{22} = \big\|\chi^\varepsilon_{j\alpha}\nabla_x(u^\bullet - t_{j\alpha}[u^\bullet])\big\|,$$
$$A_{23} = \Big\|\varepsilon^2\Big(u^{(2)} - \sum\nolimits_{j,\alpha} b_{j\alpha}\chi^1_{j\alpha}\Phi_{j\alpha}\Big)\nabla_x(1 - \mathscr{X}^\varepsilon)\Big\|,$$
$$A_{24} = \Big\|\varepsilon^2(1 - \mathscr{X}^\varepsilon)\nabla_x\Big(u^{(2)} - \sum\nolimits_{j,\alpha} b_{j\alpha}\chi^1_{j\alpha}\Phi_{j\alpha}\Big)\Big\|,$$
$$A_{25} = \big\|\nabla_x\big(\chi^1_{j\alpha}\big(u^\bullet(P_{j\alpha}) + \varepsilon V_{j\alpha} - t_{j\alpha}[u^\bullet]\big)\big\|.$$

Первые две оцениваются с помощью формулы Тейлора для функции $u^\bullet$, а также следующих наблюдений: $\big|\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big| \le C_\chi\varepsilon^{-1}$ и мера множеств $\operatorname{supp}\big|\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big|$ и $\operatorname{supp}\big|\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big|$ имеет порядок ε^3. Следовательно, $A_{21} \le C(\varepsilon^3(\varepsilon^2\varepsilon^{-1})^2)^{1/2} \le C\varepsilon^{5/2}$ и $A_{22} \le C(\varepsilon^3\varepsilon^2)^{1/2} \le C\varepsilon^{5/2}$. Согласно замечанию 1 опять получаем, что $A_{23} + A_{24} \le C\varepsilon^2$. Неравенство для A_{25} является следствием леммы 5 из [2]. $\square$

Предложение 3. *Верно соотношение* $\|\mathscr{U}; H^1(\Theta_{j\alpha})\| = O(\varepsilon)$.

Доказательство. Как и в предложениях 1 и 2, главным членом асимптотики нормы служит выражение $\|w_{j\alpha}; H^1(\Theta_{j\alpha})\| \le C\varepsilon\|w_j; H^1(0,\ell)\|$. $\square$

Следствие. *Верно соотношение* $\|\mathscr{U}; \mathscr{H}(\eta)\| = \sqrt{1 + \lambda^\bullet} + O(\varepsilon)$.

Теперь обработаем норму $\|T(\eta)\mathscr{U} - (1 + \lambda^\bullet + \lambda^{(2)}(\eta)\varepsilon^2)^{-1}\mathscr{U}; \mathscr{H}(\eta)\|$. Для этого достаточно оценить разность

$$(\nabla_x\mathscr{U}, \nabla_x Z)_{\Pi_\bullet} - (\lambda^\bullet + \lambda^{(2)}(\eta)\varepsilon^2)(\mathscr{U}, Z)_{\Pi_\bullet} \tag{19}$$

равномерно относительно всех функций $Z \in \mathscr{H}(\eta)$ с единичной нормой. При преобразовании различных скалярных произведений из выражения (19) используем формулу

$$(\nabla(\chi u), \nabla Z) = (\nabla u, \nabla(\chi Z)) + (u\nabla\chi, \nabla Z) - (\nabla u, Z\nabla\chi). \tag{20}$$

Предложение 4. *Верно соотношение*

$$\begin{aligned}(\nabla_x((1 - \mathscr{X}^\varepsilon)u^\bullet), \nabla_x Z)_{\omega_\bullet} &- \lambda^\bullet((1 - \mathscr{X}^\varepsilon)u^\bullet, Z)_{\omega_\bullet} \\ &- \sum\nolimits_{j,\alpha}\big(\nabla_x\big(\big(1 - \chi^\varepsilon_{j\alpha}\big)\chi^1_{j\alpha}t_{j\alpha}[u^\bullet]\big), \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet} \\ = -\sum\nolimits_{j,\alpha}\big(t_{j\alpha}[u^\bullet]\nabla_x\chi^1_{j\alpha}, \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet} &+ \sum\nolimits_{j,\alpha}\big(\nabla_x t_{j\alpha}[u^\bullet], Z\nabla_x\chi^1_{j\alpha}\big)_{\omega_\bullet} + O(\varepsilon^{5/2}).\end{aligned} \tag{21}$$

Доказательство. В соответствии с тождеством (20) напишем две формулы

$$\begin{aligned}(\nabla_x((1 - \mathscr{X}^\varepsilon)u^\bullet), \nabla_x Z)_{\omega_\bullet} &= (\nabla_x u^\bullet, \nabla_x((1 - \mathscr{X}^\varepsilon)Z))_{\omega_\bullet} \\ &+ (u^\bullet\nabla_x(1 - \mathscr{X}^\varepsilon), \nabla_x Z)_{\omega_\bullet} - (\nabla_x u^\bullet, Z\nabla_x(1 - \mathscr{X}^\varepsilon))_{\omega_\bullet} =: A_{41} + A_{42} + A_{43},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{j,\alpha}\big(\nabla_x\big((1-\chi^\varepsilon_{j\alpha})\chi^1_{j\alpha}t_{j\alpha}[u^\bullet]\big),\nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet}&\\ =\sum\nolimits_{j,\alpha}\big(\nabla_x(t_{j\alpha}[u^\bullet]),\nabla_x\big((1-\chi^\varepsilon_{j\alpha})\chi^1_{j\alpha}Z\big)\big)_{\omega_\bullet}&\\ +\sum\nolimits_{j,\alpha}\big(t_{j\alpha}[u^\bullet]\nabla_x\big((1-\chi^\varepsilon_{j\alpha})\chi^1_{j\alpha}\big),\nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet}&\\ -\sum\nolimits_{j,\alpha}\big(\nabla_x(t_{j\alpha}[u^\bullet]),Z\nabla_x\big((1-\chi^\varepsilon_{j\alpha})\chi^1_{j\alpha}\big)\big)_{\omega_\bullet}&=:A_{44}+A_{45}+A_{46}.\end{aligned}$$

Поскольку $\{\lambda^\bullet,u^\bullet\}$ — собственная пара задачи Неймана в $\omega_\bullet$, имеем $A_{41}=\lambda^\bullet((1-\mathscr{X}^\varepsilon)u^\bullet,Z)_{\omega_\bullet}$. Кроме того, $A_{44}=0$, так как $t_{j\alpha}[u^\bullet]$ — линейная функция и ее нормальная производная аннулируется на $\partial\omega_\bullet\cap\operatorname{supp}\chi^1_{j\alpha}$. Равенства

$$\nabla_x(1-\mathscr{X}^\varepsilon)=-\sum\nolimits_{j,\alpha}\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha},\quad \nabla_x\big((1-\chi^\varepsilon_{j\alpha})\chi^1_{j\alpha}\big)=\nabla_x\chi^1_{j\alpha}-\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha}$$

при достаточно малом ε влекут за собой соотношения

$$A_{42}-A_{45}=-\sum\nolimits_{j,\alpha}\big((u^\bullet-t_{j\alpha}[u^\bullet])\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha},\nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet}-\sum\nolimits_{j,\alpha}\big(t_{j\alpha}[u^\bullet]\nabla_x\chi^1_{j\alpha},\nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet},$$

$$A_{43}-A_{46}=\sum\nolimits_{j,\alpha}\big(\nabla_x(u^\bullet-t_{j\alpha}[u^\bullet]),Z\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big)_{\omega_\bullet}+\sum\nolimits_{j,\alpha}\big(\nabla_x t_{j\alpha}[u^\bullet],Z\nabla_x\chi^1_{j\alpha}\big)_{\omega_\bullet}.$$

Сложив их, получим правую часть (21). Наконец, верны оценки

$$\begin{gathered}\big|\big((u^\bullet-t_{j\alpha}[u^\bullet])\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha},\nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet}\big|\le C(\varepsilon^3((\varepsilon^2\varepsilon^{-1})^2)^{1/2})\|Z;\mathscr{H}(\eta)\|=C\varepsilon^{5/2},\\ \big|\big(r_{j\alpha}\nabla_x(u^\bullet-t_{j\alpha}[u^\bullet])\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha},r^{-1}_{j\alpha}Z\big)_{\omega_\bullet}\big|\le C(\varepsilon^3(\varepsilon\varepsilon\varepsilon^{-1})^2)^{1/2})\big\|r^{-1}_{j\alpha}Z;L^2(u^\bullet)\big\|\le C\varepsilon^{5/2},\end{gathered}\tag{22}$$

являющиеся следствием формулы Тейлора для функции $u^\bullet$, неравенства Гёльдера, а также неравенства Харди для функции Z, причем $r_{j\alpha}(x)=|x-P_{j\alpha}|$. Именно эти источники порождают в средних частях формул (22) степени параметра ε с разными показателями. $\square$

Предложение 5. *Верно соотношение*

$$\begin{aligned}(\nabla_x((1-\mathscr{X}^\varepsilon)u^{(2)}),\nabla_x Z)_{\omega_\bullet}-\lambda^\bullet((1-\mathscr{X}^\varepsilon)u^{(2)},Z)_{\omega_\bullet}-\lambda^{(2)}((1-\mathscr{X}^\varepsilon)u^\bullet,Z)_{\omega_\bullet}&\\ =(s\nabla_x(1-\mathscr{X}^\varepsilon),\nabla_x Z)_{\omega_\bullet}-(\nabla_x s,Z\nabla_x(1-\mathscr{X}^\varepsilon))_{\omega_\bullet}+O(\varepsilon^{1/2}).&\end{aligned}\tag{23}$$

Доказательство. После применения формулы (20) остается проверить, что

$$(u''\nabla_x(1-\mathscr{X}^\varepsilon),\nabla_x Z)_{\omega_\bullet}-(\nabla_x u'',Z\nabla_x(1-\mathscr{X}^\varepsilon))_{\omega_\bullet}=O(\varepsilon^{1/2}).$$

Первое скалярное произведение есть $O(\varepsilon^{1/2})$, поскольку функция u'' ограничена, мера множества интегрирования имеет порядок ε^3, а производная срезки — порядок ε^{-1}. Для оценки второго слагаемого применяем неравенства Гёльдера и Харди:

$$\begin{aligned}&|(\nabla_x u'',Z\nabla_x(1-\mathscr{X}^\varepsilon))_{\omega_\bullet}|\\ &\qquad\le C\sum\nolimits_{j,\alpha}\Bigg(\int\limits_{\operatorname{supp}\chi^\varepsilon_{j\alpha}}\varepsilon^{-2}r^2_{j\alpha}|\nabla_x u''(x)|^2\Bigg)^{1/2}\big\|r^{-1}_{j\alpha}Z;L^2(\omega_\bullet)\big\|\\ &\qquad\qquad\le C\sum\nolimits_{j,\alpha}\big|\operatorname{supp}\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big|^{(p-2)/2p}\|\nabla u'';L^p(\omega_\bullet)\|.\end{aligned}$$

Учитывая, что мера множества $\operatorname{supp}\chi^\varepsilon_{j\alpha}$ имеет порядок ε^3, достаточно положить $p=3$ (ср. замечание 1). $\square$

Предложение 6. *Верно соотношение*

$$(\nabla_x \mathscr{U}, \nabla_x Z)_{\omega_\bullet} - (\lambda^\bullet + \lambda^{(2)}(\eta)\varepsilon^2)(\mathscr{U}, Z)_{\omega_\bullet} = \varepsilon \sum\nolimits_{j,\alpha} \big(\nabla_x V_{j\alpha}, \nabla_x\big(\chi^1_{j\alpha} Z\big)\big)_{\omega_\bullet} + O(\varepsilon^{5/2}). \tag{24}$$

Доказательство. Благодаря равенствам (21) и (23) достаточно оценить сумму следующих выражений:

$$-\big(t_{j\alpha}[u^\bullet]\nabla_x \chi^1_{j\alpha}, \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet} + \big(\nabla_x t_{j\alpha}[u^\bullet], Z\nabla_x \chi^1_{j\alpha}\big)_{\omega_\bullet} =: A_{61},$$
$$\varepsilon^2(s\nabla_x(1-\mathscr{X}^\varepsilon), \nabla_x Z)_{\omega_\bullet} - (\nabla_x s, Z\nabla_x(1-\mathscr{X}^\varepsilon))_{\omega_\bullet} =: A_{62},$$
$$\big(\nabla_x\big(\chi^1_{j\alpha}(u^\bullet(P_{j\alpha}) + \varepsilon V_{j\alpha})\big), \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet} =: A_{63},$$
$$-\varepsilon^2 b_{j\alpha}\big(\nabla_x\big(\big(1-\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big)\chi^1_{j\alpha}\Phi_{j\alpha}\big), \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet} =: A_{64},$$
$$\varepsilon^2\varepsilon^2\lambda^{(2)}(\eta)((1-\mathscr{X}^\varepsilon)u^{(2)}, Z)_{\omega_\bullet} =: A_{65},$$
$$(\lambda^\bullet + \varepsilon^2\lambda^{(2)}(\eta))\big(\chi^1_{j\alpha}(u^\bullet(P_{j\alpha}) + \varepsilon V_{j\alpha}), Z\big)_{\omega_\bullet} =: A_{66},$$
$$-(\lambda^\bullet + \varepsilon^2\lambda^{(2)}(\eta))\big(\big(1-\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big)\chi^1_{j\alpha} t_{j\alpha}[u^\bullet], Z\big)_{\omega_\bullet} =: A_{67},$$
$$-(\lambda^\bullet + \varepsilon^2\lambda^{(2)}(\eta))\varepsilon^2 b_{j\alpha}\big(\big(1-\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big)\chi^1_{j\alpha}\Phi_{j\alpha}, Z\big)_{\omega_\bullet} =: A_{68}.$$

Применим тождество (20) к скалярным произведениям A_{63}, A_{64} и получим

$$\big(\nabla_x\big(\chi^1_{j\alpha}(u^\bullet(P_{j\alpha}) + \varepsilon V_{j\alpha})\big), \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet} = \varepsilon\big(\nabla_x V_{j\alpha}, \nabla_x\big(\chi^1_{j\alpha} Z\big)\big)_{\omega_\bullet}$$
$$+ \big((u^\bullet(P_{j\alpha}) + \varepsilon V_{j\alpha})\nabla_x\chi^1_{j\alpha}, \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet} - \varepsilon\big(\nabla_x V_{j\alpha}, Z\nabla_x\chi^1_{j\alpha}\big)_{\omega_\bullet} =: B_{61} + B_{62} + B_{63},$$

$$\begin{aligned} -\,&\varepsilon^2 b_{j\alpha}\big(\nabla_x\big(\big(1-\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big)\chi^1_{j\alpha}(2|\cdot - P_{j\alpha}|)^{-1}\big), \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet} \\ &= -\varepsilon^2 b_{j\alpha}\big(\big(\Phi_{j\alpha}\nabla_x\chi^1_{j\alpha}, \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet} - \big(\nabla_x\Phi_{j\alpha}, Z\nabla_x\chi^1_{j\alpha}\big)_{\omega_\bullet}\big) \\ &+ \varepsilon^2 b_{j\alpha}\big(\big(\Phi_{j\alpha}\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha}, \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet} - \big(\nabla_x\Phi_{j\alpha}, Z\nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big)_{\omega_\bullet}\big) =: B_{64} + B_{65}. \end{aligned}$$

В последней формуле учтено, что $\big(\nabla_x\Phi_{j\alpha}, \nabla_x\big(\big(1-\chi^\varepsilon_{j\alpha}\big)\chi^1_{j\alpha} Z\big)\big)_{\omega_\bullet} = 0$ ввиду расположения носителей срезающих функций. Слагаемое B_{61} есть в правой части (24), а выражение B_{65} в сумме с A_{62} дает нуль, поскольку $\chi_{j\alpha} = 1$ при $x \in \nabla_x\chi^\varepsilon_{j\alpha}$. Сгруппируем слагаемые B_{62} и B_{63} с соответствующими слагаемыми из B_{64}, а также с выражениями из A_{61} и получим

$$\big((u^\bullet(P_{j\alpha}) + \varepsilon V_{j\alpha} - t_{j\alpha}[u^\bullet] - \varepsilon^2 b_{j\alpha}(2|\cdot - P_{j\alpha}|)^{-1})\nabla_x\chi^1_{j\alpha}, \nabla_x Z\big)_{\omega_\bullet}, \tag{25}$$
$$\big(\nabla_x(u^\bullet(P_{j\alpha}) + \varepsilon V_{j\alpha} - t_{j\alpha}[u^\bullet] - \varepsilon^2 b_{j\alpha}(2|\cdot - P_{j\alpha}|)^{-1}), Z\nabla_x\chi^1_{j\alpha}\big)_{\omega_\bullet}, \tag{26}$$

причем оба выражения (25) и (26) обладают мажорантой $C\varepsilon^{5/2}$ благодаря лемме 5 из [2]. Аналогичное рассуждение годится и для суммы слагаемых A_{66}, A_{67} и A_{68}. Величина A_{65} мала благодаря сомножителю ε^4 и включению $u^{(2)} \in L^2(\omega_\bullet)$. $\square$

Предложение 7. *Верно соотношение*

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{j,\alpha}(\nabla_x\mathscr{U}, \nabla_x Z)_{\Theta_{j\alpha}} &- (\lambda^\bullet + \lambda^{(2)}(\eta)\varepsilon^2)(\mathscr{U}, Z)_{\Theta_{j\alpha}} \\ &= \varepsilon\sum\nolimits_{j,\alpha}\big(\nabla_x V_{j\alpha}, \nabla_x\big(\chi^1_{j\alpha} Z\big)\big)_{\Theta_{j\alpha}} + O(\varepsilon^{5/2}). \end{aligned} \tag{27}$$

Доказательство. Проверка вполне аналогична проверке предложения 6, надо лишь учесть малость сечения цилиндров $\Theta^\varepsilon_{j\alpha}$ и квазипериодичность функции $\mathscr{U}$. $\square$

Предложение 8. *Верно неравенство*

$$\|T(\eta)\mathscr{U} - (1 + \lambda^\bullet + \lambda^{(2)}(\eta)\varepsilon^2)^{-1}\mathscr{U}\,; \mathscr{H}(\eta)\| \le C\varepsilon^{5/2}.$$

Доказательство. Достаточно сложить оценки (24) и (27) и заметить, что

$$\big(\nabla_x V_{j\alpha}, \nabla_x\big(\chi^1_{j\alpha} Z\big)\big)_{\omega_\bullet} + \big(\nabla_x V_{j\alpha}, \nabla_x\big(\chi^1_{j\alpha} Z\big)\big)_{\Theta_{j\alpha}} = 0$$

ввиду гармоничности функции $V_{j\alpha}$, расположения носителя функции $\chi^1_{j\alpha}$ и финитности функции $\chi^1_{j\alpha} Z$. $\square$

2.5. Формулировка результата и обсуждение. Заключительное утверждение об асимптотике является следствием предложения 8 и леммы о «почти собственных» числах.

Теорема 2. *Предположим, что простое собственное число $\lambda^\bullet$ задачи* (10) *не принадлежит последовательности $\{\Lambda_j\}_{j\ge 1}$, $u^\bullet$ — соответствующая собственная функция, нормированная в $L^2(\omega_\bullet)$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и всех $\eta \in [0, 2\pi)$ у задачи* (8), (7) *в $\Pi_\bullet$ есть собственное число $\Lambda^\bullet(\varepsilon, \eta)$, удовлетворяющее оценке*

$$|\Lambda^\bullet(\varepsilon, \eta) - \lambda^\bullet - \varepsilon^2\lambda^{(2)}(\eta)| \le C\varepsilon^{5/2},$$

где поправочный член $\lambda^{(2)}(\eta)$ найден по формуле (17).

Таким образом, в условиях теоремы 2 разность $\sigma_{es}(\mathscr{A}_\bullet(\varepsilon))\setminus\sigma_{es}(\mathscr{A}(\varepsilon))$ содержит не менее одной дополнительной зоны проходимости $\mathscr{B}(\varepsilon) = [B_-(\varepsilon), B_+(\varepsilon)]$, причем

$$B_-(\varepsilon) = \lambda^\bullet + \varepsilon^2 \min_{\eta\in[0,2\pi)} \lambda^{(2)}(\eta) + O(\varepsilon^{5/2}), \quad B_+(\varepsilon) = \lambda^\bullet + \varepsilon^2 \max_{\eta\in[0,2\pi)} \lambda^{(2)}(\eta) + O(\varepsilon^{5/2}).$$

Если $u^\bullet(P_{2-})u^\bullet(P_{2+}) \ne 0$, то формула (17) гарантирует, что длина сегмента $\mathscr{B}$ положительна и имеет порядок ε^2.

Отметим обстоятельство, упростившее асимптотический анализ: ширина множества $\omega_\bullet$ в направлениях x_1 и x_2 совпадает с шириной множества ω. От этого условия можно отказаться. Следует лишь принять во внимание, что изменение длин перемычек между бусинами вдоль одной шеренги также может приводить к появлению дополнительных зон проходимости. Отчасти этот эффект обсуждается в п. 3.1.

§ 3. Разнообразные открытые волноводы

3.1. Удаление шеренги тел. Удаление целой шеренги бусин (рис. 1(b)) или двух полушеренг (рис. 2(b)) также порождает дополнительные сегменты в существенных спектрах операторов $\mathscr{A}_\circ(\varepsilon)$ и ${\mathscr{A}_\circ}^L(\varepsilon)$, так как оператор $\mathscr{A}_\circ(\varepsilon, \eta)$ при $\eta \in [0, 2\pi)$ может приобрести (и приобретает) дискретный спектр, отвечающий захваченным волнам, локализованным в окрестностях «удлиненных» тонких перемычек в решетке $\Pi_\circ(\varepsilon)$ или ${\Pi_\circ}^L(\varepsilon)$.

Теорема 3. *Предположим, что при некотором $k \in \mathbb{N}$ собственное число $\lambda^\circ_k = \pi^2 k^2(\ell + 1)^{-2}$ задачи Дирихле на интервале $(0, \ell + 1)$ не принадлежит последовательности $\{\Lambda_j\}_{j\ge 1}$. Тогда при достаточно малых ε и при всех $\eta \in [0, 2\pi)$ у задачи* (8), (7) *в $\Pi_\circ$ есть собственное число $\Lambda^\circ(\varepsilon, \eta)$, удовлетворяющее оценке*

$$\big|\Lambda^\circ_k(\varepsilon, \eta) - \lambda^\circ_k\big| \le C\varepsilon.$$

Доказательство проводится по схеме из [2], которая также позволяет построить младшие члены асимптотики величины $\Lambda_k^\circ(\varepsilon, \eta)$.

Теорема 3, как и теорема 2, обеспечивает появление дополнительных зон проходимости в спектрах операторов $\mathscr{A}_\circ(\varepsilon)$ и ${\mathscr{A}_\circ}^L(\varepsilon)$, причем симметрия области ${\Omega_\circ}^L(\varepsilon)$ опять гарантирует их двукратное вхождение в $\sigma_{es}\big({\mathscr{A}_\circ}^L(\varepsilon)\big)$. Путем уменьшения множества ω (т. е. увеличения собственного числа ν_2 задачи (10)) первый дополнительный сегмент, расположенный в малой окрестности точки $\lambda_1^\circ = \pi^2(\ell+1)^{-2}$, можно поместить в первую лакуну спектра $\sigma_{es}(\mathscr{A}(\varepsilon))$. Увеличение множества ω позволяет расположить дополнительный сегмент внутри лакуны с любым заданным наперед номером.

3.2. V-образный волновод. Приведенный асимптотический анализ приспосабливается к геометрически более сложным открытым волноводам в двоякопериодической решетке $\Omega(\varepsilon)$ и требует лишь незначительных изменений. Например, при исследовании спектра V-образного волновода, изображенного на рис. 2(c), следует произвести поворот координат на угол $\pi/4$ и сжатие в $\sqrt{2}$ раз. Полученный таким образом волновод будет напоминать структуру на рис. 2(b) (в обоих случаях удалены две перпендикулярные полушеренги тел и часть перемычек). Непопадание числа $\lambda_k^\circ = \pi^2 k^2(\ell+1)^{-2}$ на непрерывный спектр $\sigma_{es}(\mathscr{A}(\varepsilon))$ по-прежнему гарантирует образование дополнительного спектрального сегмента в $\sigma_{es}\big({\mathscr{A}_\circ}^V(\varepsilon)\big)$.

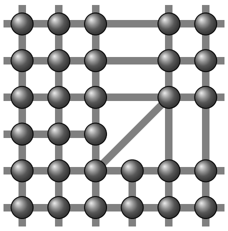


Рис. 3. L-образный открытый волновод с длинной перемычкой, порождающей изолированные собственный числа.

3.3. Дискретный спектр. Теоремы 2 и 3 обеспечивают строгость включений (5) из-за появления дополнительных зон проходимости локализованных волн. Определим область $\widehat{\Omega}_\circ^L(\varepsilon)$, отличающуюся от области ${\Omega_\circ}^L(\varepsilon)$ на рис. 2(b) диагональной перемычкой с радиусом ε и длиной $2(\sqrt{2}-h)$, соединяющей узлы с центрами $(0,0)$ и $(2,2)$ (рис. 3). Ввиду компактности возмущения равенство $\sigma_{es}\big(\widehat{\mathscr{A}_\circ^L}(\varepsilon)\big) = \sigma_{es}\big({\mathscr{A}_\circ}^L(\varepsilon)\big)$ сомнений не вызывает. Следующий результат получается при помощи асимптотического анализа из [2], а обоснование асимптотики проводится, например, по схеме из [13].

Теорема 4. *Предположим, что при некотором $k \in \mathbb{N}$ собственное число $\hat{\lambda} = \pi^2 k^2 (2\sqrt{2}-h)^{-2}$ задачи Дирихле на интервале $(0, 2\sqrt{2}-h)$ не принадлежит ни последовательности $\{\Lambda_j\}_{j\geq 1}$, ни последовательности $\{\pi^2 j^2(\ell+1)^{-2}\}_{j\geq1}$. Тогда при достаточно малом ε у задачи (3) в $\widehat{\Omega}_\circ^L(\varepsilon)$ есть собственное число $\widehat{\Lambda}(\varepsilon)$, удовлетворяющее оценке*

$$|\widehat{\Lambda}(\varepsilon) - \hat{\lambda}| \leq C\varepsilon.$$

§ 4. Дополнение

Опишем предложенную в публикации [1] процедуру вывода формулы

$$\sigma_{es}({\mathscr A_\bullet}^L(\varepsilon)) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr B_n(\varepsilon)\right) \cup \Bigl(\bigcup_{\eta\in[0,2\pi)}\sigma_{di}(\mathscr A_\bullet(\varepsilon,\eta))\Bigr)$$

для существенного спектра задачи (3) в области ${\Omega_\bullet}^L(\varepsilon)$, изображенной на рис. 2(a). При этом $\mathscr B_n(\varepsilon)$ — сегменты из (9), а $\sigma_{di}(\mathscr A_\bullet(\varepsilon,\eta))$ — дискретный спектр модельной задачи (8), зависящей от параметра Флоке η.

Сингулярная последовательность Вейля в точке $\lambda\in\sigma_{es}(\mathscr A_\bullet(\varepsilon))$ строится по стандартной схеме, на которую не влияет отсутствие (задача в $\Omega_\bullet(\varepsilon)$) или наличие (задача в ${\Omega_\bullet}^L(\varepsilon)$) открытого углового волновода. Если $\lambda=\Lambda(\eta)\in\sigma_{di}(\mathscr A_\bullet(\varepsilon,\eta))$ и $U(\cdot,\eta)$ — соответствующая собственная функция, принадлежащая пространству $H^1(\Pi_\bullet(\varepsilon))$, а значит, экспоненциально затухающая при $x_2\to\pm\infty$, то локализованная волна Флоке $w(x,\eta)=e^{i\eta x_1}U(x,\eta)$ порождает сингулярную последовательность Вейля $u_N=\|X_N w; L^2(\Omega_\bullet(\varepsilon))\|^{-1}X_N w$, где $N\in\mathbb N$ и $X_N\in C^\infty(\mathbb R)$ — срезающая функция с графиком на рис. 4. В самом деле,

$$\|X_N w; L^2(\Omega_\bullet(\varepsilon))\| = O(2^{N/2}), \quad \|(\Delta_x+\lambda)X_N w; L^2(\Omega_\bullet(\varepsilon))\| = O(1),$$

а значит, $u_N \rightharpoondown 0$ слабо в $L^2(\Omega_\bullet(\varepsilon))$, так как $\operatorname{supp}u_N\cap\operatorname{supp}u_{N'}=\varnothing$ при $N\neq N'$. Понятно, что второй рукав волновода, на котором $u_N=0$, не сказывается на свойствах последовательности $\{u_N\}$.

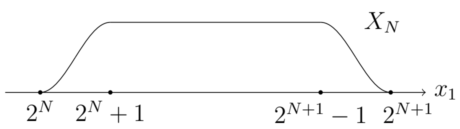


Рис. 4. График срезающей функции X_N.

Принципиально новым моментом в [1] является доказательство следующего факта: любая точка $\lambda\notin\sigma_{es}\bigl({\mathscr A_\bullet}^L(\varepsilon)\bigr)$ принадлежит полю регулярности оператора. Рассмотрим неоднородную задачу Неймана в вариационной постановке:

$$(\nabla_x u,\nabla_x v)_{{\Omega_\bullet}^L(\varepsilon)} - \lambda(u,v)_{{\Omega_\bullet}^L(\varepsilon)} = f(v) \quad \forall v\in H^1\bigl({\Omega_\bullet}^L(\varepsilon)\bigr), \tag{28}$$

где f — (анти)линейный непрерывный функционал на $H^1\bigl({\Omega_\bullet}^L(\varepsilon)\bigr)$. Для проверки упомянутого факта достаточно построить правый регуляризатор (параметрикс), т. е. такой оператор $\mathscr R^L_\bullet(\varepsilon) : H^1\bigl({\Omega_\bullet}^L(\varepsilon)\bigr)^* \to H^1\bigl({\Omega_\bullet}^L(\varepsilon)\bigr)$, что $\bigl({\mathscr A_\bullet}^L(\varepsilon)-\lambda\bigr)\mathscr R^L_\bullet(\varepsilon)-\mathrm{Id}$ — компактный оператор в $H^1\bigl({\Omega_\bullet}^L(\varepsilon)\bigr)^*$. Это делается в несколько приемов.

1°. Считая, что измененные бусины располагаются в решетке на рис. 2(a) вдоль положительных полуосей x_1 и x_2, введем срезающую функцию $\mathscr X_L$, обращающуюся в нуль на их цилиндрической окрестности $\mathscr V=\{x:\operatorname{dist}(x,\mathrm L)<1\}$, где $\mathrm L=\{x: x_1x_2=0, x_1+x_2\geq 0\}$, и равную единице при $\operatorname{dist}(x,\mathrm L)>2$. «Умножим» f на срезку $\mathscr X_L$ и найдем решение $u_0\in H^1(\Omega(\varepsilon))$ аналогичной (28) задачи с правой частью $f_0(v)=f(\mathscr X_L v)$ в двоякопериодической области $\Omega(\varepsilon)$ (напоминаем, что точка λ лежит вне спектра этой задачи). Произведение $\mathscr X_L u_0$ аннулируется на $\mathscr V$ и поэтому попадает в $H^1\bigl({\Omega_\bullet}^L(\varepsilon)\bigr)^*$.

2°. Разность $u^\bullet = u - \mathscr{X}_L u_0$ должна удовлетворять прежней задаче (28) с новой правой частью

$$f_\bullet(v) = f((1-\mathscr{X}_L)v) - (u_0\nabla_x \mathscr{X}_L, \nabla_x v)_{\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon)} + (\nabla_x u_0, v\nabla_x \mathscr{X}_L)_{\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon)}, \qquad (29)$$

причем носитель функционала (29) расположен внутри $\mathscr{V}$.

Рассмотрим горизонтальный рукав (вертикальный на рис. 2(a) анализируется так же). Умножим функционал (29) на срезку $\chi_1^\infty(x) = \chi^\infty(x_1)$, где $\chi^\infty \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi^\infty(t) = 1$ при $t > 2$ и $\chi^\infty(t) = 0$ при $t < 1$. Поскольку функционал $f_{\bullet 1} = f_\bullet(\chi_1^\infty \cdot\ )$ равен нулю при $x_1 < 1$, можно перейти к задаче (28) в области $\Omega_\bullet(\varepsilon)$, 1-периодической вдоль оси x_1. Применим к ней преобразование Гельфанда (6) и получим задачу в $\Pi_\bullet(\varepsilon)$ с параметром Флоке $\eta \in [0, 2\pi)$ и правой частью $\widehat{f_{\bullet 1}}$, имеющей по построению компактный носитель. По предположению точка λ не принадлежит спектру $\sigma(\mathscr{A}_\bullet(\varepsilon,\eta))$ этой задачи, т. е. она имеет решение $\widehat{u_{\bullet 1}}(\cdot;\eta) \in H^1(\Pi_\bullet(\varepsilon))$. Убедимся в том, что решение экспоненциально затухает при $x_2 \to \pm\infty$.

3°. Следуя [6] (см. также [7, § 3.4]), введем весовое пространство Соболева $W^1_\beta(\Pi_\bullet(\varepsilon))$ с нормой $\|e^{\beta x_2}\hat{u}; H^1(\Pi_\bullet(\varepsilon))\|$ и его подпространство $W^1_\beta(\Pi_\bullet(\varepsilon);\eta)$, выделяемое первым условием квазипериодичности (7). Благодаря компактности носителя функционала $\widehat{f_{\bullet 1}}(\cdot;\eta)$ он попадает в $W^1_\gamma(\Pi_\bullet(\varepsilon);\eta)^*$ при любом весовом показателе $\gamma \in \mathbb{R}$. Согласно общим результатам [6] (см. также [7, гл. 3, 5]) из условия $\lambda \notin \sigma(\mathscr{A}_\bullet(\varepsilon,\eta))$, означающего однозначную разрешимость задачи в $\mathscr{H}^1(\Pi_\bullet(\varepsilon);\eta) = W^1_0(\Pi_\bullet(\varepsilon);\eta)$, вытекает, что та же задача однозначно разрешима в $W^1_\beta(\Pi_\bullet(\varepsilon);\eta)$ при $|\beta| < \beta_0$ и малом $\beta_0 > 0$ (общим для всех $\eta \in [0, 2\pi)$). Таким образом, $\widehat{u_{\bullet 1}}(\cdot;\eta) \in W^1_\beta(\Pi_\bullet(\varepsilon);\eta)$ при некотором $\beta > 0$. Применив обратное преобразование Гельфанда, получаем решение $u_{\bullet 1}$ задачи (28) в $\Omega_\bullet(\varepsilon)$ и правой частью $f_{\bullet 1}$, причем $e^{\beta|x_2|}u_{\bullet 1} \in H^1(\Omega_\bullet(\varepsilon))$. В итоге произведение $\chi_1 u_{\bullet 1} \in H^1(\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon))$ является решением задачи (28) с правой частью

$$f_{\bullet 1}((1-\chi_1)v) + [\Delta_x, \chi_1]u_{\bullet 1} = f^f_{\bullet 1} + f^u_{\bullet 1},$$

у которой первое слагаемое обладает компактным носителем, а для второго справедливо включение

$$e^{\beta|x_2|} f^u_{\bullet 1} \in L^2(\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon)), \quad \operatorname{supp} f^u_{\bullet 1} \subset \{x : x_1 \in [1,2]\}. \qquad (30)$$

4°. Итак, необработанным остался фрагмент правой части

$$f_3 = f((1-\mathscr{X}_L)\cdot) + f^f_{\bullet 1} + f^f_{\bullet 2},$$

у которого по построению носитель компактен. Классический результат [14] предоставляет функцию $u_3 \in H^1(\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon))$ с опять-таки компактным носителем, для которой

$$(\nabla_x u_3, \nabla_x v)_{\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon)} - \lambda(u_3, v)_{\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon)} = (f_3, v)_{\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon)} + (\tilde{f}, v)_{\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon)}, \quad v \in H^1(\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon)),$$

причем

$$\tilde{f} \in L^2(\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon)), \quad \operatorname{supp}\tilde{f} \subset \operatorname{supp} u_3. \qquad (31)$$

5°. Положим

$$\mathscr{R}^L_\bullet(\varepsilon)f = \mathscr{X}_L u_0 + \chi_1 u_{\bullet 1} + \chi_2 u_{\bullet 2} + u_3 \in H^1(\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon)).$$

Имеем $(\mathscr{A}_\bullet{}^L(\varepsilon) - \lambda)\mathscr{R}^L_\bullet(\varepsilon)f - f = f^u_{\bullet 1} + f^u_{\bullet 2} + f_3$, а значит, согласно формулам (30) и (31) оператор $(\mathscr{A}_\bullet{}^L(\varepsilon) - \lambda)\mathscr{R}^L_\bullet(\varepsilon) - \mathrm{Id}$ в $H^1(\Omega_\bullet{}^L(\varepsilon))^*$ компактный. Именно это и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cardone G., Nazarov S. A., Taskinen J.* Spectra of open waveguides in periodic media // J. Funct. Anal. 2015. V. 269, N 8. P. 2328–2364.

2. *Бахарев Ф. Л., Назаров С. А.* Лакуны в спектре волновода, составленного из областей с различными предельными размерностями // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 4. С. 732–751.

3. *Carini J. P., Londergan J. T., Murdock D. P.* Binding and scattering in two-dimensional systems: Applications to quantum wires, waveguides, and photonic chrystals. Berlin: Springer-Verl., 1999. (Lect. Notes Phys.).

4. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. СПб: Лань, 2010.

5. *Гельфанд И. М.* Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.

6. *Назаров С. А.* Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 101–112.

7. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.

8. *Арсеньев А. А.* О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 3. С. 718–724.

9. *Beale J. T.* Scattering frequencies of resonators // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26, N 4. P. 549–563.

10. *Гадыльшин Р. Р.* О собственных частотах тел с тонкими отростками. II. Асимптотики // Мат. заметки. 1994. Т. 55, № 1. С. 20–34.

11. *Ван-Дайк М. Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.

12. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

13. *Назаров С. А.* Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1086–1101.

14. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. P. 623–727.

Статья поступила 12 ноября 2015 г.

Бахарев Федор Львович
Санкт-Петербургский гос. университет,
математико-механический факультет, кафедра математической физики,
Университетский проспект, 28, Санкт-Петербург, Старый Петергоф 198504
`f.bakharev@spbu.ru, fbakharev@yandex.ru`

Назаров Сергей Александрович
Санкт-Петербургский гос. университет,
математико-механический факультет, кафедра теории упругости,
Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург 199034;
Санкт-Петербургский гос. политехнический университет им. Петра Великого,
лаборатория «Механика новых наноматериалов»,
ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург 195251;
Институт проблем машиноведения РАН,
лаборатория «Математические методы механики материала»,
ВО, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург 199178
`s.nazarov@spbu.ru, srgnazarov@yahoo.co.uk`