Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6

УДК 512.544.33

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ MR–ГРУПП

М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников

Аннотация. Понятие степенной R-группы, где R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей, введено Р. Линдоном. А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников уточнили понятие R-группы, введя дополнительную аксиому. В частности, новое понятие степенной MR-группы является непосредственным обобщением понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В данной статье изложены основы теории многообразий нильпотентных MR-групп и проведено сравнение различных определений нильпотентности в этой категории.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.601

Ключевые слова: линдонова R-группа, холлова R-группа, MR-группа, многообразие MR-групп, α-коммутатор, тензорное пополнение, нильпотентная MR-группа.

К 70-летию Николая Семеновича Романовского

Понятие степенной R-группы (R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей) введено Р. Линдоном в [1]. В работе А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова [2] введена новая категория степенных R-групп (MR-групп) как естественное обобщение на некоммутативный случай понятия R-модуля. Систематическое изучение MR-групп начато в [3–8]. Отметим, что результаты этих работ оказались весьма полезны при решении известных проблем Тарского. Настоящая работа посвящена теории многообразий нильпотентных MR-групп. Кроме того, в категории MR-групп вводятся различные аналоги понятия n-ступенно нильпотентной группы и доказывается их совпадение при $n = 1, 2$. Вопрос о совпадении этих понятий при $n > 2$ остается открытым.

§ 1. Основные понятия теории степенных MR-групп

Напомним основные определения (см. [1, 2]). Пусть $L_{gr} = \{\,\cdot\,, {}^{-1}, e\}$ — групповой язык (сигнатура), где $\cdot$ — бинарная операция умножения, ${}^{-1}$ — унарная операция обращения, e — константный символ для единицы группы. Обогатим групповой язык L_{gr} до языка $L^*_{gr} = L_{gr} \cup \{f_\alpha(g) \mid \alpha \in \mathrm{R}\}$, где $f_\alpha(g)$ — унарная алгебраическая операция.

Определение 1 [1]. Множество G будем называть *линдоновой* R-*группой*, если на нем определены операции $\cdot$, ${}^{-1}$, e, $\{f_\alpha(g) \mid \alpha \in \mathrm{R}\}$ и выполнены следующие аксиомы (ниже мы используем соглашение: для краткости выражение $f_\alpha(g)$ записываем в виде g^α):

Результаты § 3 и 4 получены при финансовой поддержке гранта РФФИ (код проекта 14–01–00068). Остальные результаты работы получены при финансовой поддержке гранта РНФ (проект № 14–11–00085).

1) аксиомы группы;

2) для всех $g, h \in G$ и всех элементов $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ выполняются равенства

$$g^1 = g, \quad g^0 = e, \quad e^\alpha = e; \tag{1}$$

$$g^{\alpha+\beta} = g^\alpha g^\beta, \quad g^{\alpha\beta} = (g^\alpha)^\beta; \tag{2}$$

$$(h^{-1}gh)^\alpha = h^{-1}g^\alpha h. \tag{3}$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_\mathrm{R}$ категорию линдоновых R-групп. Поскольку аксиомы, приведенные выше, являются тождествами языка L^*_{gr}, класс $\mathfrak{L}_\mathrm{R}$ — многообразие алгебраических систем языка L^*_{gr}, поэтому из общих теорем универсальной алгебры следует, что можно говорить об R-гомоморфизмах, свободных R-группах и т. д. Если G — нильпотентная группа и в ней выполнены аксиомы (1)–(3), то G будем называть *нильпотентной* R-*группой.*

Существуют абелевы линдоновы R-группы, не являющиеся R-модулями (см. [9], где подробно исследована структура свободной абелевой R-группы). Авторы работы [2] добавили к аксиомам Линдона дополнительную аксиому (квазитождество):

$$\forall\, g, h \in G,\ \alpha \in \mathrm{R} \quad [g, h] = 1 \longrightarrow (gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha. \tag{4}$$

Определение 2 [2]. Группу G будем называть MR-*группой*, если на G определена операция g^α для всех $g \in G$, $\alpha \in \mathrm{R}$ и при этом выполнены аксиомы (1)–(4).

Обозначим через $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ класс всех R-групп, удовлетворяющих аксиомам (1)–(4). Ясно, что этот класс является квазимногообразием в языке L^*_{gr} и в нем снова есть понятия свободной MR-группы, R-гомоморфизма и т. д. Кроме того, выполнено свойство: каждая абелева MR-группа является R-модулем, и наоборот.

Большинство естественных примеров степенных групп лежат в классе $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$:

1) произвольная группа является $\mathbb{Z}$-группой;

2) делимая абелева группа из $\mathfrak{L}_\mathbb{Q}$ является $\mathbb{Q}$-группой;

3) группа периода n является $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-группой;

4) модуль над кольцом R является абелевой MR-группой;

5) свободная степенная R-группа по Линдону является MR-группой;

6) произвольная степенная нильпотентная R-группа над биномиальным кольцом R, введенная Ф. Холлом в [10], является MR-группой.

Пусть $G \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$. Введем следующие обозначения:

$$x^\mathrm{R} = \{x^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{R}\},\ x \in G, \quad X^\mathrm{R} = \bigcup_{x \in X} x^\mathrm{R},\ X \subseteq G.$$

Определение 3 [2]. Подгруппа $H \le G$ называется MR-*подгруппой*, если $H^\mathrm{R} = H$. Подгруппа H MR-*порождена* множеством $X \subset G$, если H — наименьшая MR-подгруппа G, содержащая X. Обозначаем $H = \langle X \rangle_\mathrm{R}$.

Определение 4 [2]. Гомоморфизм R групп $\varphi : G \to G'$ называется R-*гомоморфизмом*, если

$$(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^\alpha \quad \forall\, g \in G,\ \alpha \in \mathrm{R}.$$

Определение 5 [2]. Пусть $G \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$. Для $g, h \in G$, $\alpha \in \mathrm{R}$ элемент $(g, h)_\alpha = h^{-\alpha} g^{-\alpha} (gh)^\alpha$ назовем α-*коммутатором* элементов g и h.

Очевидно, что при $\alpha = -1$ α-коммутатор $(g,h)_\alpha$ совпадает с обычным коммутатором $[h^{-1}, g^{-1}]$. Это приводит к определению $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-идеала.

Определение 6 [2]. Нормальная MR-подгруппа $H \trianglelefteq G$ называется $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-*идеалом*, если $(g,h)_\alpha \in H$ для любых $g \in G$, $h \in H$, $\alpha \in \mathrm{R}$.

Предложение 1 [2]. *Пусть $G \in \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$. Тогда*

1) *если $\varphi : G \to G'$ — R-гомоморфизм групп из $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$, то* $\operatorname{Ker}\varphi$ — $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$*-идеал в G;*

2) *если H — $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-идеал в G, то $G/H \in \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$.*

В [2] показано, что определяющую роль при изучении степенных MR-групп играет операция тензорного пополнения. Она естественно обобщает на некоммутативный случай понятие расширения кольца скаляров для модулей. Тензорное пополнение используется при определении свободных конструкций в категории $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$, включая понятие свободной MR-группы.

Определение 7 [2]. Пусть $G \in \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$, $\mu : \mathrm{R} \to \mathrm{S}$ — гомоморфизм колец. Тогда S-группа G^{S} называется *тензорным* S-*пополнением* R-группы G, если G^{S} удовлетворяет следующему универсальному свойству:

1) существует R-гомоморфизм $\lambda : G \to G^{\mathrm{S}}$ такой, что $\lambda(G)$ S порождает G^{S}, т. е. $\langle \lambda(G) \rangle_{\mathrm{S}} = G^{\mathrm{S}}$;

2) для любой S-группы H и R-гомоморфизма $\varphi : G \to H$, согласованного с μ (т. е. такого, что $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^{\mu(\alpha)}$), существует S-гомоморфизм $\psi : G^{\mathrm{S}} \to H$, делающий коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi"'] & G^{\mathrm{S}} \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad (\lambda\psi = \varphi).$$

Отметим, что если G — абелева MR-группа, то $G^{\mathrm{S}} \cong G \bigotimes\limits_{\mathrm{R}} \mathrm{S}$ — тензорное произведение R-модуля G на кольцо S. В [2] доказано, что для любой MR-группы G и любого гомоморфизма $\mu : \mathrm{R} \to \mathrm{S}$ тензорное пополнение G^{S} всегда существует и оно единственное с точностью до изоморфизма.

Сформулируем понятие свободной MR-группы. Пусть R — кольцо с единицей и X — произвольное множество.

Определение 8 [2]. MR-группа $F_{\mathrm{R}}(X)$ с множеством MR-порождающих X называется *свободной* MR-*группой с базой* X, если для каждой MR-группы G произвольное отображение $\varphi_0 : X \to G$ продолжается до R-гомоморфизма $\varphi : F_{\mathrm{R}}(X) \to G$. Множество X называется *множеством свободных* MR-*порождающих* $F_{\mathrm{R}}(X)$. Мощность $|X|$ называется *рангом группы* $F_{\mathrm{R}}(X)$.

В [2] доказано, что для любых X и R свободная MR-группа существует, единственна с точностью до R-изоморфизма и $F_{\mathrm{R}}(X) \cong (F(X))^{\mathrm{R}}$, где $F(X)$ — абсолютно свободная группа с базой $X(\mu = \mathrm{id}_{\mathrm{R}})$.

§ 2. Многообразия MR-групп

Многообразия тесно связаны со свободными группами, поскольку тождества — это элементы свободных групп. Пусть $X = \{x_i \mid i \in I\}$ — бесконечный счетный алфавит, R — кольцо с единицей, $F_{\mathrm{R}}(X)$ — свободная MR-группа с базой X. Элемент $w(x_1, \dots, x_n) \in F_{\mathrm{R}}(X)$ называется R-*словом* в алфавите X.

Если $G \in \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ и $g_1, \dots, g_n \in G$, то отображение $x_i \longmapsto g_i$ продолжается до R-гомоморфизма $\varphi : F_{\mathrm{R}}(X) \to G$. Образ $w(x_1, \dots, x_n)^{\varphi} = w(g_1, \dots, g_n) \in G$ будем называть *значением* слова w при подстановке $x_1 = g_1, \dots, x_n = g_n$.

Будем использовать следующие обозначения: $w(x_1, \dots, x_n) = w(\bar{x})$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $w(g_1, \dots, g_n) = w(\bar{g})$, $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)$, $w(G) = \{w(\bar{g}) \mid \bar{g} \in G^n\}$.

Определение 9. R-слово $w(\bar{x})$ называется *тождеством* в группе $G \in \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$, если $w(G) = e$.

Определение 10. Пусть W — произвольное множество R-слов в алфавите X. Тогда W определяет многообразие MR-групп

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(W) = \{G \in \mathfrak{M}_{\mathrm{R}} \mid w(G) = e \; \forall \, w \in W\}.$$

Определение 11. R-слово $u(\bar{x})$ называется *следствием* множества слов $W \subseteq F_{\mathrm{R}}(X)$, если $u(G) = e$ для любой группы $G \in \mathfrak{N}$.

Определение 12. $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-идеал в G, порожденный множеством значений всех слов из множества W, называется *W-вербальным* идеалом в G. Далее W-вербальный идеал обозначается через $W(G)$.

Предложение 2. *Вербальный идеал в $F_{\mathrm{R}}(X)$, порожденный множеством слов $W \subseteq F_{\mathrm{R}}(X)$, состоит в точности из всех следствий множества W в $F_{\mathrm{R}}(X)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{W}$ — множество всех следствий из W. Ясно, что $W \subset \overline{W} \subset W(F_{\mathrm{R}}(X))$ (это включение верно потому, что $G = F_{\mathrm{R}}(X)/W(F_{\mathrm{R}}(X))$ — MR-группа из $\mathfrak{N}(W)$ и только элементы из $W(F_{\mathrm{R}}(X))$ являются тождествами в этой группе). Более того, $\overline{W}$ — нормальная MR-подгруппа, так как $\overline{W}$ замкнуто относительно произведения, взятия обратного, возведения в степень из R и эндоморфизмов (в частности, инвариантно относительно сопряжений). Осталось показать, что $\overline{W}$ есть $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-идеал в $F_{\mathrm{R}}(X)$. Если $[u(\bar{x}), v(\bar{x})] \in \overline{W}$, то в любой MR-группе $G \in \mathfrak{N}(W)$ и при любых $g_i \in G$ $[u(\bar{g}), v(\bar{g})] = e$, а значит, для любого $\alpha \in \mathrm{R}$ имеем $(u(\bar{g}), v(\bar{g}))_{\alpha} = e$, т. е. $(u(\bar{g}), v(\bar{g}))_{\alpha} \in \overline{W}$, а это означает, что $\overline{W}$ — $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-идеал в $F_{\mathrm{R}}(X)$. $\square$

Определение 13. Группа $F_{W,\mathrm{R}}(X) \in \mathfrak{N}(W)$ называется *свободной группой с базой X в многообразии* $\mathfrak{N}$, если $F_{W,\mathrm{R}}(X)$ MR-порождается множеством X и для любой группы $G \in \mathfrak{N}$ каждое отображение $\varphi_0 : X \to G$ имеет единственное продолжение до R-гомоморфизма $\varphi : F_{W,\mathrm{R}}(X) \to G$.

Теорема 1. *Группа $F_{W,\mathrm{R}}(X)/W(F_{W,\mathrm{R}}(X))$ является свободной группой в многообразии* MR*-групп $\mathfrak{N}$, заданном множеством слов W.*

Доказательство. Ясно, что группа $G = F_{\mathrm{R}}(X)/W(F_{\mathrm{R}}(X))$ принадлежит $\mathfrak{N}$ и MR-порождается множеством X. Пусть $H \in \mathfrak{N}$ и $\varphi_0 : X \to H$ — произвольное отображение. Так как $F_{\mathrm{R}}(X)$ — свободная MR-группа, φ_0 продолжается до R-гомоморфизма $\varphi_1 : F_{\mathrm{R}}(X) \to H$. Ясно, что $W(F_{\mathrm{R}}(X)) \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_1$ (поскольку $H \in \mathfrak{N}$) и, значит, φ_1 индуцирует $\varphi : G \to H$, продолжающий φ_0:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & F_{\mathrm{R}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & G \arrow[dl, "\varphi"] \\
 & B &
\end{tikzcd} \quad \square$$

Теорема 2 (Биркгоф). *Класс* MR-*групп* $\mathfrak{N}$ *является* MR-*многообразием тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{N}$ *замкнут относительно взятия* MR-*подгрупп, декартовых произведений и* R-*гомоморфных образов.*

Доказательство этой теоремы дословно повторяет классическое доказательство (см. [11, 15.2.1]), только гомоморфизмы рассматриваются в категории $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$. $\square$

Замечание. При определении многообразий MR-групп мы следуем монографии [12], где есть объяснение, как понимать многообразие групп внутри квазимногообразия групп. В подходящей сигнатуре класс $\mathfrak{L}_{\mathrm{R}}$ является многообразием R-групп, а класс $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ — квазимногообразием R-групп и включение $\mathfrak{L}_{\mathrm{R}} \supseteq \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ строгое. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое многообразие R-групп из $\mathfrak{L}_{\mathrm{R}}$. Рассмотрим пересечение $\mathfrak{N}_{\mathrm{R}} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$. Согласно определению из [12, гл. 2, § 2.5] этот класс является биркгофовым классом, т. е. в нем справедливы известные теоремы Биркгофа. В частности, для этого класса существуют теория определяющих соотношений, понятие MR-подгруппы и понятие MR-фактор-группы. Поэтому естественно класс $\mathfrak{N}_{\mathrm{R}}$ назвать *многообразием* MR-*групп внутри квазимногообразия групп* $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$.

Для подробного изучения вербальных подгрупп понадобится

Предложение 3. *Пусть* H *— произвольная нормальная* MR-*подгруппа* MR-*группы* G, *и пусть* $\overline{H}$ *— наименьший* $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-*идеал, содержащий* H. *Тогда* $\overline{H}$ *есть объединение следующей возрастающей цепочки* MR-*подгрупп*

$$H = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_n \leq \cdots,$$

где $H_{i+1} = \langle H_i,\ (g_1, g_2)_\alpha \mid [g_1, g_2] \in H_i,\ \alpha \in \mathrm{R}\rangle_{\mathrm{R}}$.

Доказательство. По определению $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-идеала все H_i содержатся в $\overline{H}$. Непосредственно проверяется, что все H_i являются нормальными MR-подгруппами в G, а потому нормальной подгруппой является и $\overline{H}$. Также непосредственно проверяется по построению, что $\overline{H}$ является $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-идеалом. $\square$

§ 3. Коммутант и абелевы многообразия степенных MR-групп

Пусть G — произвольная MR-группа. Положим

$$(G, G)_{\mathrm{R}} = \langle (g, h)_\alpha \mid g, h \in G,\ \alpha \in \mathrm{R}\rangle_{\mathrm{R}}.$$

MR-подгруппу $(G, G)_{\mathrm{R}}$ будем называть R-*коммутантом* группы G.

Предложение 4. *Для любой* MR-*группы* G *верны следующие утверждения:*

1) R-*коммутант* G *является вербальной* MR-*подгруппой, определяемой словом* $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$;

2) R-*коммутант — это наименьший* $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-*идеал, фактор-группа по которому абелева.*

Доказательство. 1. По предложению 2 любая вербальная подгруппа в категории $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$, порожденная множеством слов W, определяется следующим образом: прежде всего вычисляются все значения слов из W в группе G, затем всеми значениями MR-порождается подгруппа в G и, наконец, берется MR-идеальное замыкание полученной подгруппы. В нашем конкретном случае значениями слова $x^{-1}y^{-1}xy$ являются все обычные коммутаторы группы G. Пусть

$H = [G,G]_{\mathrm{R}}$ — MR-порождение обычного коммутанта. По предложению 3 $\overline{H} = H_1$, ибо все коммутаторы уже содержатся в H. Поэтому $\overline{H}$ порождается α-коммутаторами (напомним, что обычные коммутаторы также являются α-коммутаторами при $\alpha = -1$). Отсюда следует, что $\overline{H} = (G,G)_{\mathrm{R}}$ и что R-коммутант является вербальной MR-подгруппой.

2. Фактор-группа $G/(G,G)_{\mathrm{R}}$ является абелевой степенной MR-группой, а значит, R-модулем. Если N — любой $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-идеал такой, что G/N является R-модулем, то N содержит $[G,G]_{\mathrm{R}}$, а потому и $(G,G)_{\mathrm{R}}$. $\square$

Как не раз отмечено, обычный коммутатор является (-1)-коммутатором. Какие еще α-коммутаторы порождают R-коммутант как вербальную MR-подгруппу? Ответим на этот вопрос в случае, когда R — поле.

Теорема 3. *Пусть* R — *поле. Тогда α-коммутатор порождает* R-*коммутант как вербальную* MR-*подгруппу при условии* $\alpha \neq 0, 1$.

Перед доказательством теоремы сформулируем и докажем

Предложение 5. *В любой степенной* MR-*группе G для любых $g, f \in G$ и $\alpha, \beta \in$ R справедливы следующие тождества для α-коммутаторов:*

$$[g^\alpha, f] = [g,f]^\alpha (g, [g,f])_\alpha, \tag{5}$$

$$(g,f)^\beta_\alpha (f^\alpha, (g,f)_\alpha)_\beta (g^\alpha, f^\alpha (g,f)_\alpha)_\beta = (g,f)^\alpha_\beta (f^\beta, (g,f)_\beta)_\alpha (g^\beta, f^\beta (g,f)_\beta)_\alpha. \tag{6}$$

Кроме того, справедливо квазитождество

$$(g,f)_{-1} = 1 \longrightarrow (g,f)_\alpha = 1. \tag{7}$$

Доказательство. Докажем, что тождество (5) следует из аксиомы 3. В самом деле, аксиома 3 утверждает, что $(f^{-1}gf)^\alpha = f^{-1}g^\alpha f$ для всех $f, g \in G$, $\alpha \in$ R. Перепишем это равенство, учитывая, что

$$f^{-1}g^\alpha f = g^\alpha g^{-\alpha} f^{-1} g^\alpha f = g^\alpha [g^\alpha, f],$$

$$(f^{-1}gf)^\alpha = (gg^{-1}f^{-1}gf)^\alpha = ([g,f])^\alpha = g^\alpha [g,f]^\alpha (g,[g,f])_\alpha.$$

Сокращая на g^α, получаем необходимый результат.

Докажем тождество (6). Положим $g = fh$. В силу коммутативности кольца R имеем $(g^\alpha)^\beta = (g^\beta)^\alpha$. Распишем подробнее это равенство:

$$\begin{aligned}((fh)^\alpha)^\beta = (f^\alpha h^\alpha (f,h)_\alpha)^\beta &= f^{\alpha\beta} (h^\alpha (f,h)_\alpha)^\beta (f^\alpha, h^\alpha (f,h)_\alpha)_\beta \\ &= f^{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} (f,h)^\beta_\alpha (h^\alpha (f,h)_\alpha)_\beta (f^\alpha, h^\alpha (f,h)_\alpha)_\beta,\end{aligned}$$

$$((fh)^\beta)^\alpha = f^{\beta\alpha} h^{\beta\alpha} (f,h)^\alpha_\beta (h^\beta, (f,h)_\beta)_\alpha (f^\beta, h^\beta (f,h)_\beta)_\alpha.$$

Сокращая обе части на $f^{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$, получаем (6).

Так как $[g,f] = (f^{-1}, g^{-1})_{-1}$, квазитождество (7) есть аксиома 4 в определении степенной MR-группы. $\square$

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим α-коммутатор $(x,y)_\alpha$. Если $\alpha = 0, 1$, то $(x,y)_\alpha = 1$ и такой α-коммутатор не может порождать R-коммутант. Предположим, что $\alpha \neq 0, 1$, и обозначим через $\gamma^\alpha_1(G)$ вербальную MR-подгруппу, порожденную $(x,y)_\alpha$. Ясно, что $\gamma^\alpha_1(G) \subseteq \gamma_1(G)$, где $\gamma_1(G)$ есть R-коммутант группы G. В фактор-группе $G/\gamma^\alpha_1(G)$ тождество (6) принимает вид

$$(g^\alpha, f^\alpha)_\beta = (g,f)^\alpha_\beta \quad \text{для любого } \beta \in \mathrm{R}.$$

Переписывая последнее тождество при $\beta = -1$, приходим к равенству

$$[f^{-\alpha}, g^{-\alpha}] = [f^{-1}, g^{-1}]^{\alpha}.$$

В силу тождества (5), примененного дважды, получим

$$[f^{-1}, g^{-1}]^{\alpha^2} = [f^{-1}, g^{-1}]^{\alpha} \quad \text{или} \quad [f^{-1}, g^{-1}]^{\alpha} = e.$$

Так как R — поле, $[f^{-1}, g^{-1}] = e$ для всех $f, g \in G$. Следовательно, фактор-группа $G/\gamma_1^{\alpha}(G)$ является абелевой MR-группой, а потому $\gamma_1^{\alpha}(G) = \gamma_1(G)$. $\square$

Опишем абелевы многообразия степенных групп. Для этого прежде всего выясним структуру свободной абелевой степенной группы.

Теорема 4. *Свободная абелева* MR*-группа с базой X является свободным* R*-модулем и* R*-изоморфна фактор-группе свободной* MR*-группы с базой X по ее* R*-коммутанту.*

Доказательство. Первая часть теоремы хорошо известна в теории модулей, так как произвольная абелева MR-группа является R-модулем. Докажем, что

$$F_{\mathrm{R}}(X)/(F_{\mathrm{R}}(X), F_{\mathrm{R}}(X))_{\mathrm{R}} \cong \bigoplus_{x \in X} (X^{\mathrm{R}}).$$

По предложению 4 R-коммутант любой MR-группы является вербальной MR-подгруппой, определяемой словом $x^{-1}y^{-1}xy$, а потому по теореме 1 фактор-группа $F_{\mathrm{R}}(X)/(F_{\mathrm{R}}(X), F_{\mathrm{R}}(X))_{\mathrm{R}}$ является свободной группой с базой X в многообразии групп, определяемых тождеством $x^{-1}y^{-1}xy = e$. Последнее многообразие является многообразием абелевых MR-групп. $\square$

В силу теоремы 4 описание многообразий абелевых степенных MR-групп эквивалентно описанию всех вербальных MR-подгрупп в свободном R-модуле. Заметим, что в абелевом случае вербальная MR-подгруппа, порожденная множеством R-слов W, порождается значениями всех R-слов $w \in W$. Кроме того, любое слово в свободном R-модуле имеет вид $x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$, где x_i — элементы базиса R-модуля, $\alpha_i \in \mathrm{R}$.

Предложение 6. *Пусть H — вербальная* MR*-подгруппа, порожденная множеством* R*-слов W. Тогда H порождается множеством* R*-слов $W_0 = \{x^{\alpha_i} \mid i \in I\}$.*

Доказательство. Пусть $w \in W$ имеет вид $x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$. Так как вербальная MR-подгруппа H выдерживает все эндоморфизмы, положим $x_i = x_i$ и $x_j = 1$ при $j \neq i$. Отсюда получаем, что элемент $x_i^{\alpha_i}$ принадлежит H, и ясно, что такими элементами она порождается. $\square$

В дальнейшем будем предполагать, что любая вербальная MR-подгруппа в свободном R-модуле порождена множеством R-слов W_0. Поставим в соответствие многообразию $\mathfrak{N}$, порожденному множеством R-слов W, двусторонний идеал $J_W = \mathrm{id}(\alpha_i \mid i \in I)$.

Предложение 7. *В вышеприведенных обозначениях вербальная* MR*-подгруппа H совпадает с модулем $J_W M$, где M — свободный* R*-модуль.*

Доказательство. Пусть δ — произвольный элемент из J_W. Тогда

$$\delta = \sum_{i=1}^{t} \beta_i \alpha_i \gamma_i,$$

где β_i, γ_i — произвольные элементы кольца R. Пусть $x \in M$, тогда $x^{\alpha_i} \in H$. Отсюда следует, что $x^{\alpha_i\gamma_i} \in H$. Сделаем подстановку $x \to x^{\beta_i}$. Так как вербальная подгруппа замкнута относительно подстановок, то $x^{\beta_i\alpha_i\gamma_i} \in H$, а отсюда $x^{\delta} \in H$. Следовательно, $J_W M \subseteq H$. Поскольку ясно, что $J_W M$ — вербальная MR-подгруппа, получаем $J_W M = H$. □

Теорема 5. *Существует взаимно однозначное соответствие между решеткой двусторонних идеалов кольца* R *и решеткой вербальных* MR-*подгрупп свободного* R-*модуля.*

Доказательство. Как следует из доказательства предложения 7, двусторонний идеал J_W не зависит от выбора множества слов W, определяющего вербальную подгруппу H, и однозначно определяется этой MR-подгруппой. Верно и обратное: двустороннему идеалу J кольца R соответствует вербальная MR-подгруппа JM. Нетрудно проверяется, что это соответствие взаимно однозначно и сохраняет решеточные операции. □

Следствие 1. *При* $\mathrm{R} = \mathbb{Z}$ *любое собственное подмногообразие абелевых групп есть многообразие абелевых групп периода* n, $n \geq 2$.

Доказательство сразу следует из теоремы 5, так как любой идеал кольца $\mathbb{Z}$ имеет вид $n\mathbb{Z}$. □

Теорема 6. *Любое множество* R-*слов* V *в алфавите* X *эквивалентно множеству* R-*слов*

$$W = \{x^{\alpha_i},\ u_j \mid i \in I,\ j \in J\},$$

где u_j — *слова из* R-*коммутанта группы* $F_{\mathrm{R}}(X)$.

Доказательство. Запишем каждое слово $w \in W$ в виде $w = x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k} u$, где все индексы $i_1, \dots, i_k$ различны, а u — элемент из R-коммутанта. Обозначим через S двусторонний идеал кольца R, порожденный элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ по всем словам $w \in W$. Пусть $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ — любое множество порождающих S как двустороннего идеала. Тогда это множество и слова вида u по всем $w \in W$ искомые. □

§ 4. Ряды коммутантов и нильпотентные многообразия

В § 3 определено понятие R-коммутанта MR-группы G. Будем называть его *первым* R-*коммутантом* и обозначать через $G^{(1,\mathrm{R})}$. R-коммутант от $G^{(1,\mathrm{R})}$ будем называть *вторым* R-*коммутантом* и обозначать через $G^{(2,\mathrm{R})}$, и т. д. Возникает убывающий ряд R-коммутантов

$$G = G^{(0,\mathrm{R})} \geq G^{(1,\mathrm{R})} \geq \cdots \geq G^{(n,\mathrm{R})} \geq \cdots. \tag{8}$$

Определение 14. Степенную MR-группу G будем называть *разрешимой*, если существует натуральное число n такое, что $G^{(n,\mathrm{R})} = e$.

Индукцией по n нетрудно доказывается, что обычный n-й коммутант $G^{(n)}$ содержится в $G^{(n,\mathrm{R})}$. Поэтому n-ступенно разрешимая группа в категории $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ является n-ступенно разрешимой в категории групп.

Перейдем к определению нижнего центрального ряда в категории степенных MR-групп. Первым членом этого ряда будет R-коммутант группы G, который в этом случае обозначим через $G_{(1,\mathrm{R})}$. Пусть уже определен n-й член нижнего центрального ряда $G_{(n,\mathrm{R})}$. Тогда $G_{(n+1,\mathrm{R})} = id([G, G_{(n,\mathrm{R})}])$, т. е. $G_{(n+1,\mathrm{R})}$ —

это $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-идеал, порожденный взаимным коммутантом G и $G_{(n,\mathrm{R})}$. Возникает нижний центральный ряд

$$G = G_{(0,\mathrm{R})} \geq G_{(1,\mathrm{R})} \geq \dots \geq G_{(n,\mathrm{R})} \geq \cdots . \tag{9}$$

Определение 15. Степенную MR-группу G будем называть *нижне* R-*нильпотентной*, если существует такое натуральное число n, что $G_{(n,\mathrm{R})} = e$. Наименьшее число n с таким свойством называется *ступенью* R-*нильпотентности.*

Так как обычный член нижнего центрального ряда $G_{(n)}$ содержится в $G_{(n,\mathrm{R})}$, n-ступенно нижне нильпотентная группа в категории $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ является нильпотентной группой ступени $\leq n$ в категории групп. Из определения рядов (8), (9) и определения вербальной MR-подгруппы непосредственно следует, что для любых натурального числа n и кольца R группы $G^{(n,\mathrm{R})}$ и $G_{(n,\mathrm{R})}$ являются вербальными MR-подгруппами.

В связи с этими определениями возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. *Верно ли что*

$$G^{(n,\mathrm{R})} = id(G^{(n)}), \quad G_{(n,\mathrm{R})} = id(G_{(n)}),$$

где $G^{(n)}$ — n-й член обычного ряда коммутантов, а $G_{(n)}$ — n-й член нижнего центрального ряда.

Этот вопрос может быть переформулирован следующим образом:

(а) *порождается ли вербальная подгруппа $G^{(n,\mathrm{R})}$ словом*

$$v_n = [v_{n-1}(\bar{x}), v_{n-1}(\bar{y})], \quad \text{где } v_1 = [x, y]?$$

(б) *порождается ли вербальная подгруппа $G_{(n,\mathrm{R})}$ коммутатором $[x_1, \dots, x_n]$?*

Вопрос 2. (а) *Будет ли n-ступенно нильпотентная* MR-*группа n-ступенно нижне* R-*нильпотентной группой?*

(б) *Будет ли n-ступенно разрешимая* MR-*группа n-ступенно* R-*разрешимой?*

Ряды (8), (9) можно продолжить для любого ординала α. Если α — не предельный ординал, то $G^{(\alpha,\mathrm{R})}$ получается из $G^{(\alpha-1,\mathrm{R})}$, а $G_{(\alpha,\mathrm{R})}$ — из $G_{(\alpha-1,\mathrm{R})}$ описанным выше способом. Если же α — предельный ординал, то

$$G^{(\alpha,\mathrm{R})} = \bigcap_{\beta<\alpha} G^{(\beta,\mathrm{R})}, \quad G_{(\alpha,\mathrm{R})} = \bigcap_{\beta<\alpha} G_{(\beta,\mathrm{R})}.$$

Вопрос 3. *Пусть $F = F_{\mathrm{R}}(X)$ — свободная* MR-*группа с базой X. Для любого ли кольца* R *существуют ординалы α и β, зависящие от* R, *такие, что $F^{(\alpha,\mathrm{R})} = e$ и $F_{(\alpha,\mathrm{R})} = e$?*

Обозначим класс нижне R-нильпотентных групп ступени n через $\underline{\mathfrak{N}}_{n,\mathrm{R}}$. Введем также и другие определения нильпотентности в категории степенных MR-групп. Для этого индукцией по n определим понятие простого $\bar{\alpha}$-коммутатора веса n, где $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. Если $n = 2$, то $\bar{\alpha} = (\alpha)$ — это α-коммутатор $(g_1, g_2,)_\alpha$ элементов g_1, g_2 из G, определенный выше. Пусть при $n \geq 2$ простые $\bar{\alpha}$-коммутаторы веса n уже определены. Тогда простой $(\bar{\alpha}, \alpha_n)$-коммутатор есть элемент $(x, g_n)_{\alpha_n}$, где x — простой $\bar{\alpha}$-коммутатор. Далее, пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — множество букв. Обозначим через W_n множество $\{(\dots((x_1, x_2)_{\alpha_1}, x_3)_{\alpha_2}, \dots, x_{n+1})_{\alpha_n} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{R}\}$ всех простых $\bar{\alpha}$-коммутаторов веса $n+1$ от букв $x_1, \dots, x_{n+1}$. Многообразие групп, определяемое множеством R-слов W_n, обозначим через $\mathfrak{N}_{n,R}$. Группы этого многообразия будем называть *нильпотентными* MR-группами ступени нильпотентности n. Для краткости вербальную MR-подгруппу, порожденную множеством слов W, будем обозначать через $\gamma_{n,R}$.

Введем еще одно определение нильпотентности. Обозначим через $\overline{\mathfrak{N}}_{n,\mathrm{R}}$ многообразие групп, определяемое словом $v_n = [\dots[[x_1, x_2], x_3], \dots, x_{n+1}]$. Группы этого многообразия будем называть *верхне нильпотентными* ступени n. Соответствующую вербальную MR-подгруппу будем обозначать через $\bar{\gamma}_{n,\mathrm{R}}$. Ясно, что имеют место включения $\underline{\mathfrak{N}}_{n,\mathrm{R}} \subseteq \mathfrak{N}_{n,\mathrm{R}} \subseteq \overline{\mathfrak{N}}_{n,\mathrm{R}}$. Выясним более точный характер этих включений для малых значений n.

Теорема 7. *При $n = 1, 2$ все три определения нильпотентности совпадают.*

Доказательство. Пусть $n = 1$. Так как по предложению 4 R-коммутант $G_{(1,\mathrm{R})}$ группы G является вербальной MR-подгруппой, порожденной коммутатором $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, то $G_{(1,\mathrm{R})} = \gamma_{1,\mathrm{R}}(G) = \bar{\gamma}_{1,\mathrm{R}}$. Отсюда следует, что все три определения абелевости степенных MR-групп совпадают.

Пусть $n = 2$. Докажем, что $\gamma_{2,\mathrm{R}}(G) = \bar{\gamma}_{2,\mathrm{R}}$. Эта равенство достаточно доказать только для групп из многообразия $\overline{\mathfrak{N}}_{2,\mathrm{R}}$, т. е. для групп, 2-ступенно нильпотентных в категории групп. Пусть $G \in \overline{\mathfrak{N}}_{2,\mathrm{R}}$. Из коммутаторных соотношений для любой группы из этого класса и любого $\alpha \in \mathrm{R}$ имеем $[x^\alpha, y] = [x, y]^\alpha$. Для доказательства равенства $\gamma_{2,\mathrm{R}}(G) = \bar{\gamma}_{2,\mathrm{R}}(G)$ достаточно доказать, что $\gamma_{2,\mathrm{R}}(G) = e$. Другими словами, любой простой $\bar{\alpha}$- коммутатор веса 3 равен e. Для доказательства последнего утверждения достаточно проверить, что любой $\bar{\alpha}$-коммутатор вида $(x_1, x_2)_\alpha$ принадлежит центру $Z(G)$ группы G. Действительно,

$$
\begin{aligned}
[(x_1, x_2)_\alpha, y] &= \left[x_2^{-\alpha} x_1^{-\alpha} (x_1 x_2)^\alpha, y\right] = \left[x_2^{-\alpha}, y\right]\left[x_1^{-\alpha}, y\right][(x_1 x_2)^\alpha, y] \\
&= [x_2, y]^{-\alpha}[x_1, y]^{-\alpha}[x_1 x_2, y]^\alpha = [x_2, y]^{-\alpha}[x_1, y]^{-\alpha}[x_1, y]^\alpha[x_2, y]^\alpha = e.
\end{aligned}
$$

Проверка того, что $G_{(2,\mathrm{R})}(G) = \gamma_{(2,\mathrm{R})}(G)$, простая, так как $G_{(2,\mathrm{R})} = \mathrm{id}([G_{(1,\mathrm{R})}, G])$ и $G_{(1,\mathrm{R})}$ как MR-подгруппа порождается α-коммутаторами, а последние лежат в центре G. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lyndon R. C.* Groups with parametric exponents // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 96. P. 518–533.
2. *Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Степенные группы. I. Основы теории и тензорные пополнения // Сиб. мат журн. 1994. Т. 35, № 5. С. 1106–1118.
3. *Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N.* Exponential groups. II. Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups // Int. J. Algebra Comput. 1996. V. 6, N 6. P. 687–711.
4. *Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V.* Discriminating completions of hyperbolic groups // Dedicated to John Stallings on the occasion of his 65th birthday. Geom. Dedicata. 2002. V. 92. P. 115–143.
5. *Амаглобели М. Г., Бокелавадзе Т. З.* Степенные группы. Группы точные при тензорном пополнении // Вестн. Омск. ун-та. 2009. Т. 2. С. 35–46.
6. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* Свободные 2-ступенно нильпотентные R-группы // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 4. С. 410–413.
7. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* Расширения централизаторов в нильпотентных группах // Сиб. мат журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 8–20.
8. *Amaglobeli M., Remeslennikov V.* Algorithmic problems for class-2 nilpotents MR-groups // Georgian Math. J. 2015. V. 22, N 4. P. 441–449.
9. *Baumslag G.* Free abelian X-groups // Illinois J. Math. 1986. V. 30, N 2. P. 235–245.
10. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.
11. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. СПб: Лань, 2009.

12. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. книга, 1999.

Статья поступила 5 апреля 2016 г.

Амаглобели Михаил Георгиевич
Тбилисский гос. университет им. Ив. Джавахишвили,
пр. Чавчавадзе, 1, Тбилиси 0128, Грузия
mikheil.amaglobeli@tsu.ge

Ремесленников Владимир Никанорович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Омский гос. технический университет,
пр. Мира, 11, Омск 644050
remesl@ofim.oscsbras.ru