Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.518+517.54

ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТЬ СНИЗУ КОЭФФИЦИЕНТА ИСКАЖЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ $(\theta, 1)$–ВЕСОВЫМ (p, q)–ИСКАЖЕНИЕМ

С. К. Водопьянов, А. О. Молчанова

Аннотация. Доказано, что при некоторых дополнительных условиях локально равномерный предел отображений с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением также будет отображением с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением. Кроме того, получено свойство полунепрерывности снизу коэффициента искажения.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.506

Ключевые слова: отображение с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением, полунепрерывность снизу, отображение с конечным искажением.

Введение

Основы теории отображений с ограниченным искажением были заложены в 60-е гг. прошлого века в работах Ю. Г. Решетняка. Он исследовал отображения f класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяющие условию

$$|Df(x)|^n \leq K_f J(x, f)$$

для некоторого числа $1 \leq K_f < \infty$, где $Df(x)$ — матрица Якоби, а $J(x, f)$ — ее определитель. Описание свойств этого класса и подробную библиографию можно найти в монографии [1] (см. также [2, 3]). Отображения с ограниченным искажением являются естественным обобщением аналитических функций. В частности, справедлив аналог классического результата теории функций о том, что предел равномерно сходящейся последовательности аналитических функций также будет аналитической функцией. А именно, справедлива

Теорема 1 [1, § 9.2]. *Пусть последовательность отображений с ограниченным искажением $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится локально в $L_n(\Omega)$ к отображению φ_0. Предположим также, что последовательность коэффициентов искажения $\{K_{\varphi_j}\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена. Тогда φ_0 является отображением с ограниченным искажением и*

$$K_{\varphi_0} \leq \varliminf_{j\to\infty} K_{\varphi_j}. \tag{1}$$

Позже в [3] было приведено модифицированное доказательство более слабого сравнительно с теоремой 1 утверждения.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке проекта № 0314–2015–0011 по программе Президиума РАН «Современные проблемы теоретической математики» в ИМ СО РАН в 2016–2018 гг., работа второго автора — при частичной поддержке гранта РФФИ (код проекта № 14–01–00552).

© **2016 Водопьянов С. К., Молчанова А. О.**

Теорема 2 [3, § 8.6]. *Пусть последовательность отображений с ограниченным искажением* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *сходится локально равномерно к отображению* φ_0. *Предположим также, что последовательность коэффициентов искажения* $\{K_{\varphi_j}\}_{j=1}^{\infty}$ *ограничена. Тогда* φ_0 *является отображением с ограниченным искажением и справедливо неравенство* (1).

Класс отображений с ограниченным искажением более широкий, чем, например, класс диффеоморфизмов. Теорема 2 показывает, что семейства отображений с ограниченным искажением замкнуты относительно локально равномерной сходимости, в то время как предел диффеоморфизмов может не быть даже гомеоморфизмом. Свойство (1) полунепрерывности снизу коэффициента искажения оказывается чрезвычайно полезным для анализа задач математической физики. Кроме того, отображения с ограниченным искажением обладают и другими свойствами, которые очень важны, в частности, в теории упругости. Например, такое отображение непрерывно (запрещены разрывы твердого тела), переводит множество нулевой меры в множество нулевой меры (вещество не может появляться и исчезать), а также если отображение с ограниченным искажением инъективно вблизи границы, то оно является гомеоморфизмом и обратное отображение имеет ограниченное искажение (возможность обратимых деформаций). К сожалению, во многих задачах нелинейной теории упругости условие ограниченности искажения слишком обременительно. Последнее приводит к необходимости расширить класс отображений, обладающих аналогичными свойствами. Например, можно рассматривать отображения f класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такие, что

$$|Df(x)|^n \leq K_f(x) J(x,f) \quad \text{для почти всех } x \in \Omega,$$

где $1 \leq K_f(x) < \infty$ почти всюду в Ω. Другими словами, частные производные отображения f обращаются в нуль почти всюду на множестве нулей якобиана. Впервые некоторые важные свойства этого класса отображений были получены в [4]. В [5] такие отображения названы *отображениями с конечным искажением*. Для этого класса также справедливо следующее свойство замкнутости.

Теорема 3 [5, § 8.9]. *Пусть последовательность отображений с конечным искажением* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ *сходится слабо в* $W^1_P(\Omega)$ *к отображению* φ_0. *Предположим также, что*

$$K_{\varphi_j}(x) \leq M_j(x) \quad \text{почти всюду в } \Omega,$$

а последовательность измеримых функций $1 \leq M_j(x) < \infty$ *сходится в кусочном смысле к измеримой функции* $1 \leq M(x) < \infty$. *Тогда* φ_0 *имеет конечное искажение и*

$$K_{\varphi_0}(x) \leq M(x) \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

Здесь $W^1_P(\Omega)$ обозначает пространство Соболева — Орлича, где функция Орлича $P = P(t)$ удовлетворяет условиям расходимости $\bigl(\int\limits_1^{\infty} t^{-n-1} P(t)\, dt = \infty\bigr)$ и выпуклости (функция $t \mapsto P(t^{\frac{2n-1}{2n^2}})$ выпукла). В этом случае $W^1_P(\Omega)$ содержит $W^1_n(\Omega)$ и близко по своим свойствам к $W^1_n(\Omega)$.

Описание возникающих в теории упругости классов отображений и их связь с отображениями с конечным искажением можно найти в [5–7]. В [8, 9] рассматриваются допустимые деформации с конечным искажением, причем операторная функция искажения $K_{\varphi,n}(x) = \frac{|D\varphi(x)|}{J(x,\varphi)^{1/n}}$ не превосходит некоторой заданной функции $M(x) \in L_\varkappa(\Omega)$, где $\varkappa > n(n-1)$. Для существования решения задачи минимизации функционала энергии на этом классе необходимо следующее свойство замкнутости.

Лемма 4 [8]. *Пусть последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ отображений с конечным искажением сходится слабо в $W_n^1(\Omega)$ к отображению φ_0, причем $J(x,\varphi_k) \geq 0$ п. в. в Ω. Предположим также, что существует такая функция $M(x) \in L_\varkappa(\Omega)$, $\varkappa > n(n-1)$, для которой справедливо*

$$K_{\varphi_k,n}(x) \leq M(x) \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N} \text{ и для п. в. } x \in \Omega.$$

Тогда для предельного отображения φ_0 выполнено

$$K_{\varphi_0,n}(x) \leq M(x) \quad \text{для п. в. } x \in \Omega.$$

Метод доказательства этой леммы можно применить для получения аналогичных результатов для более широких классов отображений (см. теоремы 11, 12 настоящей работы).

Существуют также другие обобщения и вариации свойства замкнутости. Например, в [10] изучается замкнутость классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно, в [11] приведено доказательство замкнутости, основанное на полунепрерывности квазивыпуклых функций, а в [12] изучается замкнутость множеств гомеоморфизмов класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}$ на плоскости.

Структура настоящей работы следующая: в разд. 1 приведены необходимые определения и утверждения, в разд. 2 сформулирована и доказана теорема для гомеоморфных отображений, в разд. 3 приведено обобщение теоремы для непрерывных, открытых и дискретных отображений.

1. Предварительные сведения

На области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ стандартным образом (см., например, [13]) определяются пространства гладких финитных функций $C_0^\infty(\Omega)$, пространства Лебега интегрируемых функций $L_p(\Omega)$, $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, пространства Соболева $L_p^1(\Omega)$, $W_p^1(\Omega)$, $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, пространство абсолютно непрерывных функций на почти всех линиях $ACL(\Omega)$ и весовые пространства $L_p(\Omega,\theta)$, $L_p^1(\Omega,\theta)$. Всюду далее будем считать, что неотрицательная локально суммируемая функция (*весовая* функция) $\theta : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, $0 < \theta(x) < \infty$ почти всюду, удовлетворяет условию

$$\frac{1}{|B|}\int\limits_B \theta(x)^{\frac{1}{1-q}}\,dx < \infty \tag{2}$$

для всех шаров $B \Subset \Omega$. Ясно, что условие (2) выполнено, если вес θ удовлетворяет A_q-условию Макенхаупта.

Напомним, что отображение $f : \Omega \to \Omega'$ называется *дискретным*, если множество $f^{-1}(y)$ дискретно для всех $y \in \Omega'$, и f *открыто*, если образ любого открытого множества открыт. *Точкой ветвления* отображения f называется такая точка x, что ни в какой окрестности U точки x сужение $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Символом B_f будем обозначать множество точек ветвления отображения f.

Определение 5. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным (θ,σ)-весовым (p,q)-искажением,* $1 \leq q \leq p < \infty$, если

1) f непрерывно, открыто и дискретно;

2) $f \in ACL(\Omega)$;

3) отображение f имеет *конечное искажение*: $Df(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $J(x,f) = 0$, за исключением, быть может, множества точек нулевой меры;

4) функция локального (θ,σ)-весового q-искажения

$$K_q^{\theta,\sigma}(x,f) = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{q}}|Df(x)|}{\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))|J(x,f)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x,f) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

принадлежит классу $L_\varkappa(\Omega)$, $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$ при $p = q$).

Обозначим $K_{q,p}^{\theta,\sigma}(f;\Omega) = \|K_q^{\theta,\sigma}(y,f) \mid L_\varkappa(\Omega)\|$.

Замечание. Понятие отображения с ограниченным (θ,σ)-весовым (p,q)-искажением введено в [14]. В настоящей работе не требуются условия $J(x,f) \geq 0$ почти всюду в Ω и $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, так как они не нужны для доказательства полунепрерывности коэффициента искажения. Заметим также, что условие $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$ в [14] можно заменить любым другим условием, которое гарантирует регулярность функции Полецкого [15, 16]. Например, f принадлежит $W^1_{s,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для некоторого показателя $s \geq n-1$, не зависящего от q, причем в случае $s = n-1$ необходимы некоторые дополнительные условия на интегрируемость функции искажения [17], или f может принадлежать подходящему классу Соболева — Орлича [18].

Класс отображений с ограниченным (θ,σ)-весовым (p,q)-искажением тесно связан с вопросом описания ограниченных операторов однородных пространств Соболева (см., например, [14, 15, 19]).

Теорема 6 [14]. *Гомеоморфизм $f : \Omega \to \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$f^* : L^1_p(\Omega',\sigma) \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega,\theta), \quad 1 \leq q \leq p < \infty,$$

однородных весовых пространств Соболева по правилу $f^*(g) = g \circ f$ тогда и только тогда, когда

1) $f \in ACL(\Omega)$;

2) f имеет конечное искажение;

3) функция локального (θ,σ)-весового q-искажения $K_q^{(\theta,\sigma)}(\cdot,f)$ принадлежит $L_\varkappa(\Omega)$, где $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $1 \leq q \leq p < \infty$ ($\varkappa = \infty$ при $q = p$).

При этом норма $\|f^*\|$ эквивалентна величине $K_{q,p}^{\theta,\sigma}(f;\Omega)$, т. е. для некоторой константы $\alpha_{p,q} > 0$ справедливо неравенство

$$\alpha_{p,q}\|K_q^{\theta,\sigma}(\cdot,f) \mid L_\varkappa(\Omega)\| \leq \|f^*\| \leq \|K_q^{\theta,\sigma}(\cdot,f) \mid L_\varkappa(\Omega)\|.$$

Для отображения $f : \Omega \to \Omega'$ класса $ACL(\Omega)$ существует множество $\Sigma_f \subset \Omega$ нулевой меры такое, что вне этого множества отображение f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Если отображение f не гомеоморфно, то в некоторых случаях удобнее рассматривать функцию искажения, определенную в образе

$$H_q^{\theta,\sigma}(y,f) = \begin{cases} \sigma^{-\frac{1}{p}}(y)\Big(\sum\limits_{\substack{x \in f^{-1}(y)\setminus\Sigma_f,\\ J(x,f)\sigma(f(x))\neq 0}} \frac{\theta(x)|Df(x)|^q}{|J(x,f)|}\Big)^{\frac{1}{q}}, \\ 0, \quad \text{если } \{x \in f^{-1}(y) \setminus \Sigma_f : J(x,f)\sigma(f(x)) \neq 0\} = \varnothing. \end{cases}$$

Заметим, что теорема 6 выводится из следующего следствия теоремы 2.3 из [19].

Теорема 7. *Пусть Ω, Ω' — области в $\mathbb{R}^n$. Непрерывное отображение $f : \Omega \to \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор*

$$f^* : L^1_p(\Omega', \sigma) \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega, \theta), \quad 1 < q \le p < \infty,$$

тогда и только тогда, когда

1) f может быть изменено на множестве меры нуль так, что $f \in ACL(\Omega)$;

2) f имеет конечное искажение;

3) функция локального искажения $H_q^{(\theta,\sigma)}(\cdot, f)$ принадлежит $L_\varkappa(\Omega')$, где $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$ при $q = p$).

Кроме того, для некоторой константы $\alpha_{p,q} > 0$ справедливо неравенство

$$\alpha_{p,q} \big\| H_q^{(\theta,\sigma)}(\cdot, f) \mid L_\varkappa(\Omega') \big\| \le \|f^*\| \le \big\| H_q^{(\theta,\sigma)}(\cdot, f) \mid L_\varkappa(\Omega') \big\|.$$

Для формулировки основного результата также понадобится понятие кусочной сходимости, введенное в [20, 21].

Определение 8. Будем говорить, что последовательность измеримых функций f_k *сходится к измеримой функции f в кусочном* (“biting”) *смысле*, если существует счетный набор измеримых множеств E_ν таких, что $\Omega = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$ и функции f, f_k принадлежат классу $L_1(E_\nu)$ для всех k и ν, а также

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_\nu} \varphi f_k = \int\limits_{E_\nu} \varphi f$$

для любой функции $\varphi \in L_\infty(E_\nu)$.

Лемма 9 [20, 21]. *Каждая ограниченная в $L_1(\Omega)$ последовательность отображений $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в кусочном смысле к $f \in L_1(\Omega)$.*

Также понадобится следующее утверждение.

Лемма 10. *Пусть ограниченная в $L^1_q(\Omega, \theta)$ последовательность непрерывных функций $u_k \in L^1_q(\Omega, \theta)$, $k \in \mathbb{N}$, сходится локально равномерно к u_0. Тогда если вес θ удовлетворяет условию (2), то $u_0 \in L^1_q(\Omega, \theta)$ и существует подпоследовательность последовательности u_k, $k \in \mathbb{N}$, сходящаяся слабо в $L^1_q(\Omega, \theta)$ к u_0.*

Доказательство. Последовательность Du_k ограничена $L_q(\Omega, \theta)$. Тогда в силу слабой компактности пространства $L_q(\Omega, \theta)$, переходя к подпоследовательности, можно считать, что Du_k сходится слабо к некоторой вектор-функции $g \in L_q(\Omega, \theta)$. По теореме Мазура существуют выпуклые комбинации $w_m = \sum\limits_{l=m}^{N(m)} \lambda_l^m Du_l$, где $\sum\limits_{l=m}^{N(m)} \lambda_l^m = 1$, $\lambda_l^m \ge 0$, $m \le l \le N(m)$, сходящиеся сильно в $L_q(\Omega, \theta)$. Из условия (2) выводим, что

$$\int\limits_B |w_m(x) - g(x)| \theta^{\frac{1}{q}}(x) \theta^{-\frac{1}{q}}(x)\, dx$$
$$\le \Big(\int\limits_B |w_m(x) - g(x)|^q \theta(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{1}{|B|} \int\limits_B \theta^{\frac{1}{1-q}}(x)\, dx \Big)^{\frac{q-1}{q}} |B|^{\frac{q-1}{q}}$$
$$\le C_{B,\theta} \, \|w_m - g \mid L_q(\Omega, \theta)\|,$$

т. е. последовательность w_m сходится сильно к g в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Заметим также, что так как последовательность $\{u_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, сходится локально равномерно к u_0, выпуклые комбинации $\sum\limits_{l=m}^{N(m)} \lambda_l^m u_l$ также сходятся локально равномерно к u_0.

Остается проверить, что $Du_0 = g$. Для пробной функции $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int\limits_\Omega w_m \eta\, dx = \int\limits_\Omega \sum_{l=m}^{N(m)} \lambda_l^m Du_l \eta\, dx = -\int\limits_{\Omega\cap \operatorname{supp}\eta} \sum_{l=m}^{N(m)} \lambda_l^m u_l D\eta\, dx.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\int\limits_\Omega g\eta\, dx = -\int\limits_{\Omega\cap \operatorname{supp}\eta} u_0 D\eta\, dx = -\int\limits_\Omega u_0 D\eta\, dx.$$

2. Полунепрерывность снизу коэффициента искажения $K_q^{(\theta,1)}$ для гомеоморфных отображений

Пусть Ω, Ω' — области в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию конуса.

Теорема 11. *Пусть последовательность сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\varphi_k : \Omega \to \Omega'$, с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением, $1 < q \le p < \infty$, локально равномерно сходится к гомеоморфизму $\varphi_0 : \Omega \to \Omega'$. Предположим также, что*

1) *существует ограниченная в $L_\varkappa(\Omega)$ последовательность функций $M_k \in L_\varkappa(\Omega)$, $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, такая, что*

$$K_q^{(\theta,1)}(x,\varphi_k) \le M_k(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$, если $q < p$;

2) *существует ограниченная последовательность $M_k > 0$ такая, что*

$$K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_k;\Omega) \le M_k,$$

если $q = p$.

Тогда существует функция $M \in L_\varkappa(\Omega)$ такая, что некоторая подпоследовательность функций $M_k^\varkappa$ сходится в кусочном смысле к $M^\varkappa$. Более того, предельное отображение φ_0 тоже сохраняет ориентацию и является отображением с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением, причем

1) *$K_q^{(\theta,1)}(x,\varphi_0) \le M(x)$ для почти всех $x \in \Omega$, если $q < p$;*

2) *$K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_0;\Omega) \le \varliminf\limits_{k\to\infty} K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_k;\Omega)$, если $q = p$.*

Замечание 1. В случае, когда $M_k(x) = M(x) \in L_\varkappa(\Omega)$ для всех k, доказательство теоремы 11 становится проще, в частности, нет необходимости рассматривать кусочную сходимость.

Замечание 2. Вместо кусочной сходимости последовательности $\{M_k^\varkappa\}$, $k \in \mathbb{N}$, в теореме 11 можно требовать, чтобы ограниченная в $L_\varkappa(\Omega)$ последовательность функций $\{M_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяла условию

$$\int\limits_{B(x_0,r)} M_k^\varkappa(x)\, dx \to \int\limits_{B(x_0,r)} M^\varkappa(x)\, dx$$

для почти всех точек $x_0 \in \Omega$ и почти всех r таких, что $B(x_0, r) \subset \Omega$.

Доказательство. Существование функции $M^{\varkappa}$ непосредственно следует из леммы 9. Будем считать, что последовательность $M_k^{\varkappa}$ сходится в кусочном смысле к $M^{\varkappa}$ (множества из определения 8 обозначим через E_ν).

Убедимся, что предельное отображение φ_0 является отображением с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением. Для этого покажем, что отображение φ_0 индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi_0^* : L_p^1(\Omega') \cap W_{\infty,\mathrm{loc}}^1(\Omega') \to L_q^1(\Omega,\theta)$, $1 < q \le p < \infty$.

Так как каждое отображение φ_k является отображением с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением, по теореме 6 гомеоморфизм $\varphi_k : \Omega \to \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi_k^* : L_p^1(\Omega') \cap W_{\infty,\mathrm{loc}}^1(\Omega') \to L_q^1(\Omega,\theta)$, $1 < q \le p < \infty$, где $\varphi_k^*(f) = f \circ \varphi_k$ для $f \in L_p^1(\Omega') \cap W_{\infty,\mathrm{loc}}^1(\Omega')$. Кроме того, нормы операторов φ_k^* ограничены в совокупности:

$$\|\varphi_k^*\| \le \left\|K_q^{\theta,1}(\cdot,\varphi_k) \mid L_\varkappa(\Omega)\right\| \le \begin{cases} \|M_k(\cdot) \mid L_\varkappa(\Omega)\| \le \widetilde{M} < \infty, & \text{если } q < p, \\ M_k \le \widetilde{M} < \infty, & \text{если } q = p. \end{cases}$$

Рассмотрим $f \in L_p^1(\Omega') \cap C_0^\infty(\Omega')$. Так как $\|\varphi_k^*\| \le \widetilde{M}$, последовательность $u_k = \varphi_k^* f = f \circ \varphi_k$ ограничена в $L_q^1(\Omega,\theta)$, более того, $u_k(x)$ сходится локально равномерно к $u_0(x) = f(\varphi_0(x))$. По лемме 10 получаем, что $u_0 \in L_q^1(\Omega,\theta)$, и можно считать, что u_k сходится слабо в $L_q^1(\Omega,\theta)$ к u_0 при $k \to \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}\left\|f \circ \varphi_0 \mid L_q^1(\Omega,\theta)\right\| &= \left\|u_0 \mid L_q^1(\Omega,\theta)\right\| \le \varliminf_{k\to\infty} \left\|u_k \mid L_q^1(\Omega,\theta)\right\| \\ &= \varliminf_{k\to\infty} \left\|\varphi_k^* f \mid L_q^1(\Omega,\theta)\right\| \le \varliminf_{k\to\infty} \|\varphi_k^*\| \cdot \left\|f \mid L_p^1(\Omega')\right\| \le \widetilde{M} \cdot \left\|f \mid L_p^1(\Omega')\right\|.\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что φ_0 индуцирует ограниченный оператор композиции, а значит, по теореме 6 отображение φ_0 является отображением с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением.

Получим оценку коэффициента искажения предельного отображения φ_0. Возьмем неотрицательную функцию $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$. Применяя неравенство Гёльдера и учитывая, что $\frac{q}{\varkappa} + \frac{q}{p} = 1$, для любого E_ν выводим

$$\begin{aligned}\int\limits_{E_\nu} \theta(x)|D\varphi_j(x)|^q \eta(x)\,dx &= \int\limits_{E_\nu} \frac{\theta(x)|D\varphi_j(x)|^q}{|J(x,\varphi_j)|^{\frac{q}{p}}} |J(x,\varphi_j)|^{\frac{q}{p}} \eta(x)\,dx \\ &= \Bigg(\int\limits_{E_\nu} \left(K_q^{(\theta,1)}(x,\varphi_j)\right)^{\varkappa} \eta(x)\,dx\Bigg)^{\frac{q}{\varkappa}} \Bigg(\int\limits_{E_\nu} |J(x,\varphi_j)|\eta(x)\,dx\Bigg)^{\frac{q}{p}} \\ &\le \Bigg(\int\limits_{E_\nu} M^{\varkappa}(x)\eta(x)\,dx\Bigg)^{\frac{q}{\varkappa}} \Bigg(\int\limits_{\Omega} |J(x,\varphi_j)|\eta(x)\,dx\Bigg)^{\frac{q}{p}}, \quad \text{если } q < p, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \theta(x)|D\varphi_j(x)|^q \eta(x)\,dx &= \int\limits_{\Omega} \frac{\theta(x)|D\varphi_j(x)|^q}{|J(x,\varphi_j)|} |J(x,\varphi_j)| \eta(x)\,dx \\ &\le \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \frac{\theta(x)|D\varphi_j(x)|^q}{|J(x,\varphi_j)|}\right) \int\limits_{\Omega} |J(x,\varphi_j)|\eta(x)\,dx\end{aligned}$$

$$= \bigl(K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_j;\Omega)\bigr)^q \int\limits_\Omega |J(x,\varphi_j)|\eta(x)\,dx, \quad \text{если } q=p. \quad (4)$$

Для точки $x_0 \in \Omega$ рассмотрим функцию $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \eta(x) \le 1$, которая принимает значение 0 вне шара $B(x_0,r)$ и значение 1 внутри шара $B(x_0,r-\varepsilon)$. Подставив η в неравенства (3), (4) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} |D\varphi_j(x)|^q\theta(x)\,dx$$
$$\le \Bigl(\int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} M^\varkappa(x)\,dx\Bigr)^{\frac{q}{\varkappa}} \Bigl(\int\limits_{B(x_0,r)} |J(x,\varphi_j)|\,dx\Bigr)^{\frac{q}{p}}, \quad \text{если } q<p,$$

$$\int\limits_{B(x_0,r)} |D\varphi_j(x)|^q\theta(x)\,dx \le \bigl(K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_j;\Omega)\bigr)^q \int\limits_{B(x_0,r)} |J(x,\varphi_j)|\,dx, \quad \text{если } q=p.$$

В силу теоремы 6 отображения φ_k, $k \in \mathbb{N}$, принадлежат классу $L^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega,\theta)$ и нормы $\bigl\|\varphi_k \mid L^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega,\theta)\bigr\|$, $k \in \mathbb{N}$, ограничены в совокупности. Так как $q>1$, из $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что $D\varphi_k$ сходятся слабо в $L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega,\theta)$ к $D\varphi_0$. Тогда в силу полунепрерывности нормы при слабой сходимости левую часть неравенства можно оценить как

$$\int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} |D\varphi_0(x)|^q\theta(x)\,dx \le \varliminf_{j\to\infty} \int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} |D\varphi_j(x)|^q\theta(x)\,dx.$$

Ясно, что

$$\int\limits_{B(x_0,r)} |J(x,\varphi_j)|\,dx \le |\varphi_j(B(x_0,r)|.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим все сферы $S(x_0,t)$ с центром в точке x_0, лежащие внутри шара $B(x_0,r)$, такие, что $|\varphi_j(S(x_0,t))| \ge \frac{1}{k}$. Таких сфер может быть не более чем $k|\varphi_j(B(x_0,r))|$, т. е. конечное число, так как мера шара $|\varphi_j(B(x_0,r))|$ конечна. Объединение по всем $k \in \mathbb{N}$ дает не более чем счетное множество. Отсюда следует, что образы сфер $\varphi_j(S(x_0,r))$, $j \in \mathbb{N}$, имеют n-мерную меру нуль для почти всех $r \in (0,R)$, где R такое, что $B(x_0,R) \subset \Omega$. Тогда

$$|\varphi_j(B(x_0,r))| \to |\varphi_0(B(x_0,r))|$$

при $j \to \infty$ для почти всех $r \in (0,R)$.

Итак, переходя к нижнему пределу при $j \to \infty$, имеем

$$\int\limits_{B(x_0,r)} |D\varphi_0(x)|^q\theta(x)\chi_{E_\nu}(x)\,dx$$
$$\le \Bigl(\int\limits_{B(x_0,r)} M^\varkappa(x)\chi_{E_\nu}(x)\,dx\Bigr)^{\frac{q}{\varkappa}} |\varphi_0(B(x_0,r))|^{\frac{q}{p}}, \quad \text{если } q<p,$$

$$\int\limits_{B(x_0,r)} |D\varphi_0(x)|^q\theta(x)\,dx \le \varliminf_{j\to\infty} \bigl(K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_j;\Omega)\bigr)^q |\varphi_0(B(x_0,r))|, \quad \text{если } q=p.$$

Разделив на меру шара $B(x_0,r)$, получим неравенство

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)}|D\varphi_0(x)|^q\theta(x)\chi_{E_\nu}(x)\,dx$$
$$\le\Bigg(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)}M^{\varkappa}(x)\chi_{E_\nu}(x)\,dx\Bigg)^{\frac{q}{\varkappa}}\bigg(\frac{|\varphi_0(B(x_0,r))|}{|B(x_0,r)|}\bigg)^{\frac{q}{p}},\quad \text{если } q<p,$$

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)}|D\varphi_0(x)|^q\theta(x)\,dx\le\varliminf_{j\to\infty}\big(K^{(\theta,1)}_{q,q}(\varphi_j;\Omega)\big)^q\frac{|\varphi_0(B(x_0,r))|}{|B(x_0,r)|},\ \text{если } q=p.$$

Так как φ_0 — аппроксимативно дифференцируемый гомеоморфизм, якобиан характеризует локальное искажение меры (см., например, [15, равенство (2.5)]):

$$\frac{|\varphi_0(B(x_0,r))|}{|B(x_0,r)|}\to|J(x,\varphi_0)|\quad\text{при } r\to0 \text{ почти всюду в } \Omega.$$

Воспользовавшись этими свойствами, для п. в. $x\in\Omega$ получим

$$\theta(x)|D\varphi_0(x)|^q\chi_{E_\nu}(x)\le M^q(x)\chi_{E_\nu}(x)|J(x,\varphi_0)|^{q/p},\quad \text{если } q<p.$$

Поскольку $\Omega=\bigcup E_\nu$, для любого $x\in\Omega$ найдется номер N такой, что $x\in E_N$. Тогда $\chi_{E_N}(x)=1$ и справедливо

$$\theta(x)|D\varphi_0(x)|^q\le M^q(x)|J(x,\varphi_0)|^{q/p}.$$

При $p=q$ имеем поточечное неравенство

$$\theta(x)|D\varphi_0(x)|^q\le\varliminf_{j\to\infty}\big(K^{(\theta,1)}_{q,q}(\varphi_j;\Omega)\big)^q|J(x,\varphi_0)|.$$

Отсюда

$$K^{\theta,1}_{q,q}(\varphi_0;\Omega)=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\big|K^{\theta,1}_q(x,\varphi_0)\big|\le\varliminf_{j\to\infty}\big(K^{(\theta,1)}_{q,q}(\varphi_j;\Omega)\big).$$

Следовательно, предельное отображение φ_0 является отображением с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением. Так как свойство сохранения ориентации наследуется при локально равномерной сходимости[1)], можно заключить, что φ_0 сохраняет ориентацию. $\square$

3. Полунепрерывность снизу коэффициента искажения $K_q^{(\theta,1)}$ для непрерывных, открытых и дискретных отображений

Теорему 11 можно обобщить для последовательности непрерывных, открытых и дискретных отображений, удовлетворяющих некоторому условию на функцию искажения. В этом случае отображение может иметь точки ветвления, в которых поведение отображения φ «непредсказуемо» в случае нетривиальных весовых функций.

[1)] Действительно, сохранение ориентации следует из того факта, что для любой области $D\Subset\Omega$ начиная с некоторого номера k степень отображения $\mu(y,\varphi_0,D)$ равна $\mu(y,\varphi_k,D)$ в точке $y\notin\varphi_0(D)\setminus\varphi_0(\partial D)$.

Теорема 12. *Пусть последовательность непрерывных, открытых, дискретных и сохраняющих ориентацию отображений* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\varphi_k : \Omega \to \Omega'$, *с ограниченным* $(\theta, 1)$*-весовым* (p, q)*-искажением,* $1 < q \le p < \infty$, *локально равномерно сходится к непрерывному, открытому и дискретному отображению* $\varphi_0 : \Omega \to \Omega'$. *Предположим также, что*

1) *существует ограниченная в* $L_\varkappa$ *последовательность функций* $M_k \in L_\varkappa(\Omega)$, $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *такая, что*

$$K_q^{(\theta,1)}(x, \varphi_k) \le M_k(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$, *если* $q < p$;

2) *существует ограниченная последовательность* $M_k > 0$ *такая, что*

$$K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_k; \Omega) < M_k,$$

если $q = p$.

Тогда существует функция $M \in L_\varkappa(\Omega)$ *такая, что некоторая подпоследовательность функций* $M_k^\varkappa$ *сходится в кусочном смысле к* $M^\varkappa$. *Более того, предельное отображение* φ_0 *также сохраняет ориентацию и является отображением с ограниченным* $(\theta, 1)$*-весовым* (p, q)*-искажением, причем*

1) $K_q^{(\theta,1)}(x, \varphi_0) \le M(x)$ *для почти всех* $x \in \Omega \setminus (B_{\varphi_0} \cap \{J(x, \varphi_0) \ne 0\})$, *если* $q < p$;

2) $K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_0; \Omega \setminus (B_{\varphi_0} \cap \{J(x, \varphi_0) \ne 0\})) \le \varliminf\limits_{k\to\infty} K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_k; \Omega)$, *если* $q = p$.

Доказательство. Пусть $D \Subset \Omega$ и $\varphi_k : D \to D'_k$. Заметим, что в силу локально равномерной сходимости отображений φ_k и компактности замыканий D'_k, D'_0 образы границы $\varphi_k(\partial D)$ лежат в ε-окрестности N_ε образа границы $\varphi_0(\partial D)$ для любого ε. Кроме того, для точек $y \notin N_\varepsilon(\varphi_0(\partial D))$ степени отображений φ_k становятся одинаковыми при достаточно больших k, а значит, по [3, предложение 4.10] начиная с некоторого номера k количество прообразов будет равномерно ограничено на каждой компоненте связности $G' \subset \varphi_0(D) \setminus \varphi_0(\partial D)$. Для достаточно маленького шара $U \subset D$ такого, что $\varphi_0(U)$, $\varphi_k(U) \Subset G'$, $k \in \mathbb{N}$, справедливо

$$\|N(y, \varphi_k, U) \mid L_\infty(\varphi_k(U))\| = \sup_{y\in\varphi_k(U)} \#\{x \in B : \varphi_k(x) = y\} < N.$$

Аналогично доказательству теоремы 11 получаем, что φ_0 индуцирует ограниченный оператор композиции, действующий из $L^1_p(\varphi_0(U)) \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\varphi_0(U))$ в $L^1_q(U, \theta)$, а значит, по теореме 7 отображение φ_0 принадлежит $ACL(U)$ и имеет конечное искажение на множестве U. Отсюда следует, что φ_0 принадлежит $ACL_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и имеет конечное искажение в области Ω.

Чтобы получить оценку на коэффициент искажения предельного отображения φ_0, будем рассматривать интегрирование по $U \subset \Omega \setminus B_{\varphi_0}$. Для неотрицательной функции $\eta \in C_0^\infty(U)$ выводим

$$\int\limits_{U\cap E_\nu} \theta(x)|D\varphi_j(x)|^q \eta(x)\,dx \le \Bigg(\int\limits_{U\cap E_\nu} M^\varkappa(x)\eta(x)\,dx\Bigg)^{\frac{q}{\varkappa}} \Bigg(\int\limits_U |J(x, \varphi_j)|\eta(x)\,dx\Bigg)^{\frac{q}{p}}, \quad \text{если } q < p,$$

$$\int\limits_U \theta(x)|D\varphi_j(x)|^q\eta(x)\,dx \le \big(K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_j;\Omega)\big)^q \int\limits_U |J(x,\varphi_j)|\eta(x)\,dx, \quad \text{если } q = p.$$

Для точки $x_0 \in \Omega \setminus B_{\varphi_0}$ существует такое число $r > 0$, что для достаточно больших j справедливо $B(x_0,r) \cap B_{\varphi_0} = \varnothing$, $B(x_0,r) \cap B_{\varphi_j} = \varnothing$. Рассмотрим функцию $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \eta(x) \le 1$, которая принимает значение 0 вне шара $B(x_0,r)$ и значение 1 внутри шара $B(x_0, r-\varepsilon)$. Подставив η в предыдущие неравенства и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} |D\varphi_j(x)|^q\theta(x)\,dx$$
$$\le \Bigg(\int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} M^{\varkappa}(x)\,dx\Bigg)^{\frac{q}{\varkappa}} \Bigg(\int\limits_{B(x_0,r)} |J(x,\varphi_j)|\,dx\Bigg)^{\frac{q}{p}}, \quad \text{если } q < p,$$

$$\int\limits_{B(x_0,r)} |D\varphi_j(x)|^q\theta(x)\,dx \le \big(K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_j;\Omega)\big)^q \int\limits_{B(x_0,r)} |J(x,\varphi_j)|\,dx, \quad \text{если } q = p.$$

Так как сужения $\varphi_0|_{B(x_0,r)}$ и $\varphi_k|_{B(x_0,r)}$ (при достаточно малых r и достаточно больших k) гомеоморфны, из теоремы 11 выводим поточечное неравенство

$$K_q^{(\theta,1)}(x,\varphi_0) \le M(x)$$

для почти всех $x \in \Omega \setminus B_{\varphi_0}$, если $q < p$, или

$$K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_0;\Omega \setminus B_{\varphi_0}) \le \varliminf_{k\to\infty} K_{q,q}^{(\theta,1)}(\varphi_k;\Omega), \quad \text{если } q = p.$$

В точках $x \in \Omega$ таких, что $J(x,\varphi_0) = 0$, требуемое неравенство выполнено по определению коэффициента искажения. $\square$

Замечание. Если в теореме 12 дополнительно потребовать $\varphi_0 \in W^1_{s,\mathrm{loc}}$, $s > n-1$, то соотношение $K_q^{(\theta,1)}(x,\varphi_0) \le M(x)$ справедливо и в точках ветвления, так как в этом случае отображение φ_0 дифференцируемо почти всюду (см., например, [22]) и $J(x,\varphi_0) = 0$, если $x \in B_{\varphi_0}$.

Следствие 13. *Пусть последовательность непрерывных, открытых, дискретных и сохраняющих ориентацию отображений $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\varphi_k : \Omega \to \Omega'$, с ограниченным $(1,1)$-весовым (p,q)-искажением, $n-1 < q \le p < \infty$, локально равномерно сходится к непрерывному, открытому, дискретному отображению $\varphi_0 : \Omega \to \Omega'$. Предположим также, что*

1) существует ограниченная в $L_\varkappa$ последовательность функций $M_k \in L_\varkappa(\Omega)$, $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, такая, что

$$K_q^{(1,1)}(x,\varphi_k) \le M_k(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$, если $q < p$;

2) существует ограниченная последовательность $M_k > 0$ такая, что

$$K_{q,q}^{(1,1)}(\varphi_k;\Omega) \le M_k, \quad \text{если } q = p.$$

Тогда существует функция $M \in L_\varkappa(\Omega)$ такая, что некоторая подпоследовательность функций $M_k^\varkappa$ сходится в кусочном смысле к $M^\varkappa$. Более того, предельное отображение φ_0 также сохраняет ориентацию и является отображением с ограниченным $(1,1)$-весовым (p,q)-искажением, причем

1) $K_q^{(1,1)}(x,\varphi_0) \leq M(x)$ *для почти всех* $x \in \Omega$, *если* $q < p$;

2) $K_{q,q}^{(1,1)}(\varphi_0;\Omega) \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} K_{q,q}^{(1,1)}(\varphi_k;\Omega)$, *если* $q = p$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $\varphi_0 \in W_q^1(\Omega)$, $n-1 < q$, и φ_0 — монотонная функция. Тогда φ_0 дифференцируема почти всюду (см., например, [22]). В точках ветвления $x \in B_{\varphi_0}$ якобиан $J(x,\varphi_0)$ нулевой и в силу конечности искажения $D\varphi_0(x) = 0$ п. в. Поэтому из теоремы 12 следует, что соотношение $K_q^{(1,1)}(x,\varphi_0) \leq M(x)$ будет выполнено для п. в. $x \in \Omega$. $\square$

Замечание. Дифференцируемость почти всюду непрерывного, открытого и дискретного отображения в случае $q = n-1$ и $p = n$ может быть получена из условия интегрируемости коэффициента искажения $K_q^{(1,1)}(x,\varphi_k) \in L_\varkappa(\Omega)$, $\varkappa = n(n-1)$ (см. [17]).

Авторы выражают искреннюю признательность рецензенту, который внимательно прочел рукопись и сделал несколько конструктивных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford: Oxford Univ. Press, 1993.
3. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993.
4. *Гольдштейн В. М., Водопьянов С. К.* Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 515–531.
5. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric function theory and non-linear analysis. Oxford: Clarendon Press, 2001. (Oxford Math. Monogr.).
6. *Müller S., Spector S.* An existence theory for nonlinear elasticity that allows for cavitation // Arch. Rational Mech. Anal. 1995. V. 131, N 1. P. 1–66.
7. *Iwaniec T., Onninen J.* Hyperelastic deformations of smallest total energy // Arch. Rational Mech. Anal. 2009. V. 194, N 3. P. 927–986.
8. *Водопьянов С. К., Молчанова А. О.* Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением // Докл. АН. 2015. Т. 465, № 5. С. 523–526.
9. *Molchanova A. O., Vodop'yanov S. K.* Variational problems of nonlinear elasticity theory in certain classes of mappings with finite distortion // http://arxiv.org/abs/1508.06825v1.
10. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Мат. тр. 2002. Т. 5, № 2. С. 92–137.
11. *Yan B.* On the weak limit of mappings with finite distortion // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128, N 11. P. 3335–3340.
12. *Greco L., Sbordone C., Trombetti C.* A note on planar homeomorphisms // Rend. Accad. Ser. Fis. Mat. Napoli. 2008. V. 75, N 4. P. 53–59.
13. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
14. *Байкин А. Н., Водопьянов С. К.* Емкостные оценки, теоремы типа Лиувилля и об устранении особенностей для отображений с ограниченным (p,q)-искажением // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 290–321.
15. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.
16. *Водопьянов С. К.* О регулярности функции Полецкого при слабых аналитических предположениях исходного отображения // Докл. АН. 2014. Т. 455, № 2. С. 130–134.
17. *Tengvall V.* Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // Calc. Var. Partial Differential Equations. 2014. V. 51, N 1–2. P. 381–399.
18. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича — Соболева // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, № 6. С. 50–102.

19. *Ukhlov A., Vodopyanov S. K.* Mappings associated with weighted Sobolev spaces // Complex Analysis and Dynamical Systems III: Contemporary Mathematics AMS. 2000. V. 455. P. 363–382.

20. *Brooks J. K., Chacon R. V.* Continuity and compactness of measures // Adv. Math. 1980. V. 37. P. 16–26.

21. *Brooks J. K., Chacon R. V.* Convergence theorems in the theory of diffusions // J. M. Belley, J. Dubois, P. Morales. Measure Theory and its Applications. Berlin: Springer-Verl., 1983. P. 79–93. (Lecture Notes in Math.; V. 1033).

22. *Водопьянов С. К.* Топологические и геометрические свойства отображений классов Соболева с суммируемым якобианом. I // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 23–48.

Статья поступила 30 мая 2016 г.

Водопьянов Сергей Константинович, Молчанова Анастасия Олеговна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`vodopis@math.nsc.ru, molchanovanastya@gmail.com`