Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 512.54

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ КОММУТАНТА

Р. Бастос, П. Шумяцкий

Аннотация. Пусть G — конечная группа со следующим свойством: если a, b — коммутаторы взаимно простых порядков, то $|ab| = |a||b|$. Показывается, что подгруппа G' нильпотентна.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.503

Ключевые слова: конечная группа, коммутатор.

Следующий критерий нильпотентности конечной группы был установлен Баумслагом и Вигольдом [1].

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, в которой $|ab| = |a||b|$, если элементы a, b имеют взаимно простые порядки. Тогда G нильпотентна.*

Здесь символ $|x|$ обозначает порядок элемента x в группе G. В данной работе установлен подобный критерий нильпотентности для коммутанта G'. Напомним, что элемент $g \in G$ есть коммутатор, если $g = x^{-1}y^{-1}xy$ для подходящих $x, y \in G$. По определению коммутант G' — подгруппа в G, порожденная всеми коммутаторами. Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, в которой $|ab| = |a||b|$, если элементы a, b — коммутаторы взаимно простых порядков. Тогда подгруппа G' нильпотентна.*

Ввиду приведенной выше теоремы можно полагать, что подобное явление наблюдается и для других групповых слов. Напомним, что групповое слово $w = w(x_1, \dots, x_s)$ — нетривиальный элемент свободной группы $F = F(x_1, \dots, x_s)$ на свободных порождающих $x_1, \dots, x_s$. Слово называется *коммутаторным*, если оно принадлежит коммутанту F'. Пусть дано групповое слово w; его можно рассматривать как функцию, определенную на произвольной группе G. Подгруппа группы G, порожденная значениями w, называется *вербальной подгруппой в G, соответствующей слову w*. Обычно эта подгруппа обозначается через $w(G)$. Возникает следующий вопрос.

Пусть w — коммутаторное слово и G — конечная группа со следующим свойством: если a, b — w-значения взаимно простого порядка, то $|ab| = |a||b|$. Является ли тогда вербальная подгруппа $w(G)$ нильпотентной?

Подобный вопрос для некоммутаторных слов неинтересен, поскольку простой контрпример дается произвольной неабелевой простой группой G, допустим, показателя e, и словом x^n, где n — делитель e такой, что число e/n

This work was supported by CNPq-Brazil.

© **2016 Бастос Р., Шумяцкий П.**

простое. Даже в случае коммутаторных слов ответ на поставленный вопрос отрицательный: Кассабов и Николов показали в [2], что для произвольного $n \geq 7$ знакопеременная группа A_n допускает коммутаторное слово, у которого все нетривиальные значения имеют порядок 3. Мы полагаем, что ответ на вопрос положителен в случае полилинейных коммутаторных слов, т. е. слов, имеющих вид полилинейного одночлена Ли (как, например, $[[x_1,[x_2,x_3]],[x_4,x_5]]$).

Всюду в дальнейшем символ G обозначает конечную группу, удовлетворяющую условию теоремы 2. Обозначим символом X множество всех коммутаторов в G. Как обычно, $\pi(K)$ обозначает множество простых чисел, на которые делится порядок группы K. Подгруппа Фиттинга в K обозначается символом $F(K)$.

Лемма 3. *Пусть $x \in X$, и пусть N — подгруппа, нормализуемая x. Если $(|x|,|N|) = 1$, то $[x,N] = 1$.*

Доказательство. Выберем $y \in N$. Порядок коммутатора $[x,y]$ взаимно прост с порядком x. Поэтому должно быть $|x[x,y]| = |x||[x,y]|$. Тем не менее $x[x,y] = y^{-1}xy$. Это элемент, сопряженный x, а значит, $|x[x,y]| = |x|$. Тем самым $[x,y] = 1$. □

Лемма 4. *Если группа G разрешима, то коммутант G' нильпотентен.*

Доказательство. Используя индукцию по $|G|$, можем предполагать, что коммутант G'' нильпотентен. Допустим, что существуют два различных простых числа $p \in \pi(G')$ и $q \in \pi(G'')$. Пусть P — силовская p-подгруппа в G' и Q — силовская q-подгруппа в G''. Из теоремы о фокальной подгруппе [3, теорема 7.3.4] непосредственно следует, что P порождается $P \cap X$. Лемма 3 утверждает, что если $x \in P \cap X$, то $[Q,x] = 1$. Поэтому $[Q,P] = 1$. Следовательно, подгруппа P нормальна в PG'', и потому $P \leq F(PG'')$. Так как подгруппа PG'' нормальна в G', заключаем, что $P \leq F(G)$. Это выполнено для каждого простого числа p такого, что G'' не является p-группой. Тем самым если порядок G'' делится по крайней мере на два различных простых числа, то все силовские подгруппы в G' лежат в $F(G)$ и потому G' нильпотентна. Если G'' — q-группа, то очевидно, что силовская q-подгруппа в G' нормальна в G, и снова заключаем, что все силовские подгруппы в G' лежат в $F(G)$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2. Предположим, что G — контрпример наименьшего порядка. Тогда все собственные подгруппы в G разрешимы и можно предполагать, что $G = G'$. Пусть R — разрешимый радикал G. Следовательно, G/R — неабелева простая группа. В силу леммы 4 R' нильпотентна. Допустим, что группа G не простая, $R \neq 1$ и для простого числа q пусть Q — силовская подгруппа $F(G)$. Пусть T — подгруппа группы G, порожденная всеми коммутаторами, являющимися q'-элементами. Ввиду теоремы о фокальной подгруппе все силовские p-подгруппы в G' для $p \neq q$ содержатся в T. Поэтому коммутант G/T является q-группой. Поскольку $G = G'$, заключаем, что $G = T$. Объединяя лемму 3 с теоремой о фокальной подгруппе, выводим, что $F(G) \leq Z(G)$.

Заметим, что для произвольного $x \in G$ подгруппа $\langle x,R\rangle$ разрешима и потому $\langle x,R\rangle'$ нильпотентна. Следовательно, $[R,x] \leq F(G) = Z(G)$, так что $R = Z_2(G)$. В частности, подгруппа R нильпотентна, а значит, $R = Z(G)$. Таким образом, наша группа G квазипроста.

Так как группа G не имеет нормального 2-дополнения, из теоремы Фробениуса [3, теорема 7.4.5] вытекает, что G содержит 2-подгруппу H и элемент нечетного порядка $b \in N_G(H)$ такие, что $[H,b] \neq 1$. Ввиду теоремы Томпсона

[3, теорема 5.3.11] модно предполагать, что H имеет ступень нильпотентности не более двух и $H/Z(H)$ — элементарная абелева группа. Утверждается, что G содержит элемент a такой, что a — 2-элемент; $a \in X$; a имеет порядок 2 по модулю $Z(G)$.

В самом деле, поскольку H ступени не более двух, все элементы в $[H, g]$ являются коммутаторами для произвольных $g \in H$. Если для некоторого $g \in H$ подгруппа $[H, g]$ не содержится в $Z(G)$, то произвольный элемент $[H, g]$, имеющий порядок 2 по модулю $Z(G)$, обладает требуемыми свойствами. Поэтому предположим, что $[H, g]$ содержится в $Z(G)$ для любого $g \in H$. В частности, $H' \leq Z(G)$. Следовательно, $[H, b] \cap C_G(b) \leq Z(G)$, и все элементы в $[H, b]$ — коммутаторы по модулю $Z(G)$. Если элемент $d \in [H, b]$ таков, что $d \notin Z(G)$ и $d^2 \in Z(G)$, то коммутатор $[d, b]$ требуемый. Это доказывает существование элемента a с указанными выше свойствами.

Фиксируем такой элемент a. Поскольку $G/Z(G)$ — неабелева простая группа, из теоремы Бэра — Судзуки [3, теорема 3.8.2] следует существование элемента $t \in G$ такого, что порядок $[a, t]$ нечетен. С одной стороны, ясно, что a обращает $[a, t]$. С другой стороны, в силу леммы 3 a должен коммутировать с $[a, t]$; противоречие. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baumslag B., Wiegold J.* A sufficient condition for nilpotency in a finite group. (Preprint available at arXiv:1411.2877v1[math.GR]).
2. *Kassabov M., Nikolov N.* Words with few values in finite simple groups // Q. J. Math. 2013. V. 64. P. 1161–1166.
3. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Chelsea Publ. Co., 1980.

Статья поступила 9 сентября 2015 г.

Raimundo Bastos (Бастос Раймундо), Pavel Shumyatsky (Шумяцкий Павел)
Department of Mathematics,
University of Brasilia,
Brasilia-DF, 70910-900 Brazil
bastos@mat.unb.br, pavel@unb.br