Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.54

КВАЗИКОНФОРМНОСТЬ ИНЪЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ПЕРЕВОДЯЩИХ СФЕРЫ В КВАЗИСФЕРЫ

В. В. Асеев

Аннотация. Доказано, что инъективное отображение области $D \subset \overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, переводящее сферы $\Sigma \subset D$ в K-квазисферы (образы сфер при K-квазиконформных автоморфизмах пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$), является K'-квазиконформным с K', зависящим лишь от K и стремящимся к 1 при $K \to 1$. Это квазиконформный аналог классической теоремы Каратеодори о мёбиусовости инъективного отображения области $D \subset \mathbb{R}^n$, переводящего сферы в сферы.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.501

Ключевые слова: мёбиусово отображение, квазиконформное отображение, коэффициент квазиконформности, квазимёбиусово отображение, квазиокружность, квазисфера, разделитель, абсолютное двойное отношение.

Введение

В 1937 г. Каратеодори [1] доказал, что инъективное отображение $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ области $D \subset \overline{\mathbf{C}}$, при котором образ $f(\Sigma)$ любой обобщенной окружности $\Sigma \subset \overline{\mathbf{C}}$ является обобщенной окружностью, будет мёбиусовым отображением. Ценность этого признака мёбиусовости в том, что изначально не требуется непрерывности отображения f. Естественное обобщение теоремы Каратеодори для инъективных отображений области в пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n$ получили Хефер [2] (1999 г.) и Бердон, Минда [3] (2001 г.). Мёбиусовость биективных отображений $f : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$, сохраняющих k-мерные сферы при некотором $1 \leq k < n$, установлена в [4].

В [5] (2014 г.) автор получил квазиконформный аналог теоремы Каратеодори на плоскости: *если при локально инъективном отображении $f : D \to \overline{\mathbf{C}}$ области $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ образ любой достаточно малой окружности $\Sigma \subset D$ есть k-квазиокружность, то f является локально однолистным K'-квазиконформным отображением с $K' \leq k + \sqrt{k^2 - 1}$.*

Используя понятие K-*квазисферы* (образ сферы при K-квазиконформном автоморфизме пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$), мы докажем n-мерный вариант этой теоремы ($n \geq 2$).

Основная теорема. *Пусть отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}}^n$ области $D \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ локально инъективно и у каждой точки $x_0 \in D$ имеется такая окрестность $U(x_0) \subset D$, что образ $f(\Sigma)$ любой сферы $\Sigma \subset U(x_0)$ является K-квазисферой. Тогда f является локально гомеоморфным K'-квазиконформным отображением с*

$$K' \leq [s(K)]^{n-1},$$

где
$$s(K) = \exp\{6(K+1)^2\sqrt{K-1}\}. \tag{0.1}$$

Заметим, что $s(K) \to 1$ при $K \to 1$.

§ 1. Терминология, обозначения и основная теорема

В евклидовом пространстве R^n используем обозначения: $B(a,r) := \{x \in R^n : |x-a| < r\}$, $\overline{B}(a,r) := \{x \in R^n : |x-a| \le r\}$, $S(a,r) := \{x \in R^n : |x-a| = r\}$, $\mathscr{H}^k(A)$ — k-мерная мера Хаусдорфа множества $A \subset R^n$; $\Omega_n := \mathscr{H}^n(B(0,1))$. Пространство $\overline{\mathbb{R}}^n = R^n \cup \{\infty\}$ (одноточечная компактификация пространства R^n) наделяется хордовой метрикой $q(x,y)$ [6, 1.15]. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ областей $D, D' \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ называется *K-квазиконформным* (см. [7, гл. 1, § 3]), если f принадлежит классу $ACL_{n,\mathrm{loc}}$ в области $D' = D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$ (в частности, отображение f дифференцируемо п. в. в D) и для п. в. $x \in D$ выполняется неравенство $[L_f(x)]^n \le K \cdot |J_f(x)|$, где $J_f(x)$ — якобиан отображения f в точке x, а
$$|L_f(x)| = \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}.$$

Множества $f(S(0,1)) \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ при K-квазиконформных автоморфизмах $f : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$ называются *K-квазисферами.*

Теорема 1.1. *Пусть инъективное отображение $f : D \to \overline{\mathbb{R}}^n$ области $D \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ таково, что образ $f(\Sigma)$ любой сферы $\Sigma \subset D$ является K-квазисферой. Тогда отображение f будет K'-квазиконформным с*
$$K' \le [s(K)]^{n-1},$$
где функция $s(K)$ задана формулой (0.1).

Основная теорема, сформулированная во введении, получается применением теоремы 1.1 к ограничению отображения f на достаточно малые окрестности точек из области D.

Доказательство теоремы 1.1 разбивается на несколько шагов и будет завершено в § 4.

§ 2. Случай непрерывного отображения

Покажем, что для любой K-квазисферы в R^n выполняется *обратное изодиаметрическое неравенство* с константой, зависящей лишь от n и K.

Лемма 2.1. *Если область $D \subset R^n$ ограничена K-квазисферой $\Sigma = \partial D \subset R^n$, то*

(1) *существует точка $x_D \in D$ («квазицентр»), для которой*
$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} := \frac{\max\limits_{x\in\Sigma} |x - x_D|}{\min\limits_{x\in\Sigma} |x - x_D|} \le s(K), \tag{2.1.1}$$
где функция $s(K)$ задана формулой (0.1);

(2) *выполняется оценка*
$$\mathscr{H}^n(D) \ge c(n,K)(\operatorname{diam} D)^n, \tag{2.1.2}$$

где

$$c(n,K)=\frac{\Omega_n}{2^n[s(K)]^n}. \tag{2.1.3}$$

Доказательство. По определению K-квазисферы $D=f_0(B(0,1))$ при некотором K-квазиконформном автоморфизме $f_0:\overline{\mathbb{R}}^n\to\overline{\mathbb{R}}^n$. В $\overline{\mathbb{R}}^n$ имеется мёбиусово преобразование μ_0 такое, что $\mu_0(B(0,1))=B(0,1)$ и $\mu_0(\infty)=f_0^{-1}(\infty)\in\overline{\mathbb{R}}^n\setminus\overline{B}(0,1)$. Для K-квазиконформного отображения $f_1=f_0\circ\mu_0$ имеем $D=f_1(B(0,1))$ и $f_1(\infty)=\infty$. Тогда K-квазиконформное отображение $f=\mu_1\circ f_1$, где $\mu_1(x)=x-f_1(0)$, переводит $B(0,1)$ в область $D_0=\mu_1(D)$, изометричную области D, причем $f(0)=0$, $f(\infty)=\infty$. Поэтому неравенство (2.1.1) достаточно получить для области $D_0=f(B(0,1))$.

Пусть $r_{\max}=\max\{|y|:y\in\partial f(D_0)\}=\max\{|f(x)|:|x|=1\}$ и $r_{\min}=\min\{|y|:y\in\partial f(D_0)\}=\min\{|f(x)|:|x|=1\}$. Тогда в силу оценки, полученной Вуориненом в [8, теорема 1.8(1)] (в его обозначениях $s(K)=\eta_{K,n}(1)$), имеем требуемое неравенство (2.1.1) для D_0 с «квазицентром» $x_{D_0}=0$. Следовательно, (2.1.1) выполняется и для D с «квазицентром» $x_D=f_1(0)$.

Так как

$$r_{\max}\geq(1/2)\operatorname{diam}\partial D_0=(1/2)\operatorname{diam}(D_0)$$

и

$$\mathscr{H}^n(D_0)\geq\mathscr{H}^n(B(0,r_{\min}))=\Omega_n[r_{\min}]^n,$$

из (2.1.1) получаем оценку

$$\mathscr{H}^n(D_0)\geq\frac{\Omega_n}{2^n s(K)^n}[\operatorname{diam}D_0]^n$$

для области D_0, а значит, и для изометричной ей области D. Лемма доказана.

Утверждение 2.2. *Если к условиям теоремы* 1.1 *добавить непрерывность отображения f, то заключение теоремы будет истинно.*

Доказательство. Непрерывное инъективное отображение f осуществляет гомеоморфизм любого замкнутого шара $B\subset D$ на множество $f(B)$ в индуцированных топологиях на B и $f(B)$ [9, § 41.III, теорема 3]. Так как $f(B)\subset\overline{\mathbb{R}}^n$, по теореме Брауэра [10, гл. V, § 7] множество $f(\operatorname{Int}B)$ открыто не только в топологии $f(B)$, но и в топологии $\overline{\mathbb{R}}^n$ (принцип сохранения области). Следовательно, $f(D)$ — область в $\overline{\mathbb{R}}^n$, и f — гомеоморфизм области D на область $f(D)$.

Для произвольной точки $x_0\in D':=D\setminus\{\infty,f^{-1}(\infty)\}$ при всех достаточно малых $r>0$ выполняется в силу леммы 2.1(2) неравенство

$$\frac{[\operatorname{diam}(f(B(x_0,r)))]^n}{\mathscr{H}^n(f(B(x_0,r)))}\leq\frac{1}{c(n,K)}$$

с константой $c(n,K)$, заданной в (2.1.3). Следовательно, для всех $x\in D'$

$$\bar{\delta}(x):=\limsup_{r\to0}\frac{[\operatorname{diam}(f(B(x,r)))]^n}{\mathscr{H}^n(f(B(x,r)))}\leq\frac{1}{c(n,K)}.$$

По теореме Карамана [11, ч. 2, гл. 1, теорема 2] отображение $f:D'\to f(D')$ квазиконформно. В силу устранимости изолированной особой точки для квазиконформных отображений [12, теорема 17.3] f квазиконформно во всей области D и, в частности, дифференцируемо п. в. в D.

Уточним верхнюю оценку линейной дилатации $K_L[f]$ в точке x_0 дифференцируемости отображения f. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0 = f(x_0)$. Тогда при $N \to +\infty$ последовательность отображений $\{f_N(x) := Nf(x/N)\}$ сходится к линейному отображению $L = df(0)$ равномерно на компактных подмножествах в $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Для любого достаточно большого N шар $B(0,1)$ переходит в область $D_N = f_N(B(0,1))$, ограниченную (согласно условиям теоремы) K-квазисферой $\Sigma_N := f_N(\partial B(0,1))$. В силу леммы 2.1(1) в каждой области D_N найдется такая точка $y_N \in D_n)$, что для $r_{N,\max} = \max\limits_{|x|=1} |f_N(x) - y_N)|$ и $r_{N,\min} = \min\limits_{|x=1|} |f_N(x) - y_N|$ выполняется оценка

$$\frac{r_{N,\max}}{r_{N,\min}} \leq s(K).$$

Перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что при $N \to +\infty$ имеются сходимости $y_N \to y_0$, $r_{N,\max} \to r_{0,\max}$ и $r_{N,\min} \to r_{0,\min}$. При этом для области $D_0 = L(B(0,1))$, ограниченной эллипсоидом $\Sigma_0 = \lim\limits_{N\to\infty} \Sigma_N$, выполняются оценки

$$\max_{y\in\Sigma_0} |y| \leq \max_{y\in\Sigma_0} |y - y_0| \leq \lim_{N\to\infty} r_{N,\max}, \quad \min_{y\in\Sigma_0} |y| \geq \min_{y\in\Sigma_0} |y - y_0| \geq \lim_{N\to\infty} r_{N,\min}.$$

Следовательно, для отношения большей полуоси эллипсоида Σ_0 к его меньшей полуоси получаем оценку

$$\frac{\max\limits_{y\in\Sigma_0} |y|}{\min\limits_{y\in\Sigma_0} |y|} \leq \lim_{N\to\infty} \frac{r_{N,\max}}{r_{N,\min}} \leq s(K).$$

Таким образом, для (внешнего) коэффициента квазиконформности $K[L]$ линейного отображения $L = df(0)$ выполняется неравенство

$$K[L] \leq [s(K)]^{n-1}.$$

Это означает, что квазиконформное отображение f K'-квазиконформно с $K' \leq [s(K)]^{n-1}$. Утверждение доказано.

§ 3. Случай отображения, непрерывного на сферах

Связное замкнутое множество A в топологическом пространстве $\mathscr{X}$ называется *разделителем* между точками a и b, если эти точки лежат в разных компонентах связности множества $\mathscr{X} \setminus A$ [9, § 46.VII]. Множество $A \subset \mathscr{X}$ называется *разделителем* топологического пространства $\mathscr{X}$, если $\mathscr{X} \setminus A$ имеет более одной компоненты связности.

Абсолютным двойным отношением упорядоченной четверки попарно различных точек a_1, a_2, a_3, a_4 в метрическом пространстве $\mathscr{M}$ с метрикой $|x - y|_{\mathscr{M}}$ называется величина

$$|a_1 : a_2 : a_3 : a_4|_{\mathscr{M}} := \frac{|a_1 - a_2|_{\mathscr{M}} |a_3 - a_4|_{\mathscr{M}}}{|a_1 - a_3|_{\mathscr{M}} |a_2 - a_4|_{\mathscr{M}}}. \tag{3.0.1}$$

Для точек в пространстве R^n величина $|a_1 : a_2 : a_3 : a_4|$ не зависит от того, в какой метрике — евклидовой или хордовой — выполнены вычисления в формуле (3.0.1), и инвариантна относительно мёбиусовых преобразований пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$. Для заданного гомеоморфизма $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ топологическое вложение $f : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ метрических пространств называется *квазимёбиусовым* *с функцией искажения* η (или η-*квазимёбиусовым*), если для любой четверки попарно различных точек $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathscr{M}$

$$|f(a_1) : f(a_2) : f(a_3) : f(a_4)|_{\mathscr{M}'} \leq \eta(|a_1 : a_2 : a_3 : a_4|_{\mathscr{M}})$$

(определение и свойства квазимёбиусовых отображений см. в [13]). В частности, любой K-квазиконформный автоморфизм пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$ является $\eta_{n,K}$-квазимёбиусовым с функцией искажения $\eta_{n,K}$, зависящей лишь от n и K [13, 5.3; 8, теорема 3.10].

Лемма 3.1. *Существует такая константа* $0 < Q(n,K) < \infty$, *зависящая лишь от* n *и* K, *что на любой* K-*квазисфере* $\Sigma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ *в любом разделителе* $\gamma \subset \Sigma$ *пространства* Σ *между точками* $a_1, a_3 \in \Sigma$ *имеется пара точек* $a_2, a_4 \in \gamma$, *у которой*

$$|a_1 : a_2 : a_3 : a_4| + |a_1 : a_4 : a_3 : a_2| \leq Q(n,K). \tag{3.1.1}$$

Доказательство. Пусть заданы K-квазисфера $\Sigma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, точки $a_1, a_3 \in \Sigma$ и разделитель $\gamma \subset \Sigma$ пространства Σ между a_1 и a_3. Существует K-квазиконформное отображение $f_0 : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$, при котором Σ является образом $f(\Pi)$ гиперплоскости Π, проходящей через точку 0, такое, что $f^{-1}(a_1) = 0$, $f^{-1}(a_3) = \infty$. Континуум $f^{-1}(\gamma)$ разделяет в гиперплоскости Π точки 0 и ∞. Возьмем произвольно точку $b_2 \in f^{-1}(\gamma)$. Тогда луч $\{-tb_2 : 0 \leq t < +\infty\}$ пересекает $f^{-1}(\gamma)$ в некоторой точке b_4. Для точек 0, b_2, ∞, b_4 имеем равенство

$$|0 : b_2 : \infty : b_4| + |0 : b_4 : \infty : b_2| = \frac{|b_2| + |b_4|}{|b_2 - b_4|} = 1.$$

Положив $a_2 = f(b_2)$ и $a_4 = f(b_4)$, используем $\eta_{n,K}$-квазимёбиусовость отображения f и приходим к оценке

$$|a_1 : a_2 : a_3 : a_4| + |a_1 : a_4 : a_3 : a_2| \\ \leq \eta_{n,K}(|0 : b_2 : \infty : b_4|) + \eta_{n,K}(|0 : b_4 : a_3 : b_2|) \leq 2\eta_{n,K}(1).$$

Получаем требуемое утверждение с константой $Q(n,K) := 2\eta_{n,K}(1)$. Лемма доказана.

Утверждение 3.2. *Если к условиям теоремы* 1.1 *добавить непрерывность отображения* f *на каждой сфере в области* D, *то заключение теоремы будет истинно.*

Доказательство. Докажем непрерывность отображения f в произвольно заданной точке $x_0 \in D$. В силу мёбиусовой инвариантности условий теоремы можно считать без нарушения общности, что $x_0 = f(x_0) = 0$. Пусть U — открытая окрестность точки 0 такая, что $U \subset D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$. Для $r_0 = \min\{1, (1/3)\operatorname{dist}(0, \partial U)\}$ построим какое-нибудь конечное покрытие $\{B(a_1, r_0), \dots, B(a_m, r_0)\}$ сферы $S(0, r_0)$ открытыми шарами с центрами $a_j \in S(0, r_0)$. Тогда $\overline{B}(0, r_0) \setminus \{0\} \subset \bigcup_j B(a_j, r_0)$. Положим

$$q_1 := \max_j\{|f(-2a_j)|\}, \quad q_0 := \min_j\{|f(-2a_j)|\}.$$

Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ пусть

$$\varepsilon' := \min\left\{\varepsilon\frac{q_0}{2q_0 + 4q_1Q(n,K)},\ \frac{q_0}{4Q(n,K)}\right\}. \tag{3.2.1}$$

Так как f непрерывно на $\bigcup\limits_j S(a_j, r_0)$, найдется такое $\delta \in (0, r_0/2)$, что

$$f(B(0,\delta) \cap (\cup_j (S(a_j, r_0)))) \subset B(0, \varepsilon').$$

Для произвольно заданной точки $x \in B(0, \delta/2) \setminus \{0\}$ отметим шар $B(a_j, r_0)$, содержащий x, и проведем через точки x и $-2a_j$ сферу S' с центром на интервале $\{ta_j : -2 < t < 0\}$. Множество $\gamma = S' \cap S(a_j, r_0)$ содержится в $B(0,\delta) \cap S(a_j, r_0)$ и разделяет сферу S' между точками x и $-2a_j$. В силу гомеоморфности отображения $f|S'$ множество $f(\gamma)$ разделяет на K-квазисфере $f(S')$ точки $f(x)$ и $f(-2a_j)$. По лемме 3.1 имеются точки $y_2, y_4 \in \gamma$ такие, что

$$|f(x) : f(y_2) : f(-2a_j) : f(y_4)| + |f(x) : f(y_4) : f(-2a_j) : f(y_2)| \leq Q(n, K),$$

т. е.

$$Q(n,K) \geq \frac{|f(x) - f(y_2)| \cdot |f(-2a_j) - f(y_4)| + |f(x) - f(y_4)| \cdot |f(-2a_j) - f(y_2)|}{|f(x) - f(-2a_j)| \cdot |f(y_2) - f(y_4)|}.$$

Поскольку $\varepsilon' < q_0/2$, имеем

$$|f(-2a_j) - f(y_2)| \geq |f(-2a_j)| - \varepsilon' > q_0/2,$$

$$|f(-2a_j) - f(y_4)| \geq |f(-2a_j)| - \varepsilon' > q_0/2, \quad |f(y_2) - f(y_4)| < 2\varepsilon'.$$

Следовательно,

$$(q_0/2)(|f(x) - f(y_2)| + |f(x) - f(y_4)|) < 2\varepsilon' \, Q(n,K)|f(x) - f(-2a_j)|.$$

Так как

$$|f(x) - f(y_2)| \geq |f(x)| - \varepsilon', \quad |f(x) - f(y_4)| \geq |f(x)| - \varepsilon',$$

$$|f(x) - f(-2a_j)| \leq |f(x)| + q_1,$$

то

$$q_0(|f(x)| - \varepsilon') < 2\varepsilon' Q(n,K)(|f(x)| + q_1),$$

т. е.

$$|f(x)| < \varepsilon' \left(1 + \frac{2Q(n,K)}{q_0}|f(x)| + \frac{2q_1 Q(n,K)}{q_0}\right).$$

Следовательно,

$$|f(x)|\left(1 - \varepsilon' \frac{2Q(n,K)}{q_0}\right) < \varepsilon' \left(1 + \frac{2q_1 Q_{n,K}}{q_0}\right).$$

Учитывая (3.2.1), приходим к оценке

$$|f(x)| < 2\varepsilon' \left(1 + \frac{2q_1 Q(n,K)}{q_0}\right) \leq \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ имеется $\delta > 0$ такое, что $f(B(0,\delta/2)) \subset B(0,\varepsilon)$, т. е. отображение f непрерывно в точке 0. Утверждение доказано.

§ 4. Непрерывность на прообразах компактов

В силу утверждения 3.2 доказательство теоремы 1.1 будет завершено, если докажем непрерывность ограничения $f|\Sigma$ на любой сфере $\Sigma \subset D$. Но это тривиальное следствие более общей теоремы 4.1, которая, на наш взгляд, представляет самостоятельный интерес в рамках общей теории разделителей в топологических пространствах.

Теорема 4.1. *Пусть некоторое семейство Φ связных замкнутых разделителей в связном сепарабельном метрическом пространстве $\mathscr{X}$ удовлетворяет следующим условиям:*

(У1) *любую пару точек a и b, лежащих в одной компоненте W дополнения в $\mathscr{X}$ к разделителю $\gamma \in \Phi$, можно соединить конечной цепью $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ разделителей $\gamma_j \in \Phi$ таким образом, что $\gamma_j \subset W$, $a \in \gamma_1$, $b \in \gamma_m$ и $\gamma_j \cap \gamma_{j+1} \neq \varnothing$ для всех $j = 1, \dots, m-1$;*

(У2) *для любой пары $a, q \in \mathscr{X}$ различных точек имеется несчетное семейство $\Phi(a|q) \subset \Phi$ попарно не пересекающихся разделителей между точками a и q.*

Пусть инъективное отображение $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ в связное хаусдорфово пространство со счетной базой таково, что образ любого разделителя $\gamma \in \Phi$ является связным замкнутым разделителем пространства $\mathscr{Y}$. Тогда для любого компактного множества $K \subset f(\mathscr{X})$ ограничение f на $f^{-1}(K)$ непрерывно.

В частности, если $f(\mathscr{X})$ компактно, то $f : \mathscr{X} \to f(\mathscr{X})$ — гомеоморфизм.

Напомним общее определение разделителя [9, § 46.III].

Определение 4.2. Множество γ в топологическом $\mathscr{T}_1$-пространстве $\mathscr{X}$ называется *разделителем* между точками a и b, если существуют такие два подмножества $M_a, M_b \subset \mathscr{X}$, что (i) $\mathscr{X} \setminus \gamma = M_a \cup M_b$; (ii) $a \in M_a$, $b \in M_b$; (iii) $\overline{M}_a \cap M_b = \varnothing = M_a \cap \overline{M}_b$.

Следующие два утверждения сформулированы в [9, § 46.III] для случая связного сепарабельного метрического пространства, однако их доказательство, приведенное в [9], использует только связность $\mathscr{T}_1$-пространства $\mathscr{X}$.

Утверждение 4.3. *Для замкнутого разделителя γ в $\mathscr{T}_1$-пространстве $\mathscr{X}$ множества M_a и M_b в определении 4.2 можно выбрать открытыми.*

Утверждение 4.4. *Пусть $\mathscr{X}$ — связное $\mathscr{T}_1$-пространство и γ, τ — непересекающиеся связные замкнутые разделители между точками a и b. Пусть $M_a(\gamma)$, $M_b(\gamma)$ и $M_a(\tau)$, $M_b(\tau)$ — пары открытых множеств, указанные в определении 4.2 для разделителей γ и τ соответственно. Тогда либо $M_a(\gamma) \cup \gamma \subset M_a(\tau)$, либо $M_a(\tau) \cup \tau \subset M_a(\gamma)$.*

Утверждение 4.5. *Пусть в $\mathscr{T}_1$-пространстве $\mathscr{X}$ некоторое семейство Φ связных замкнутых разделителей удовлетворяет условию (У1) в теореме 4.1. Пусть инъективное отображение $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ в $\mathscr{T}_1$-пространство $\mathscr{Y}$ таково, что образ $f(\gamma)$ любого разделителя $\gamma \in \Phi$ является связным замкнутым разделителем в $\mathscr{Y}$. Тогда для любого $\gamma \in \Phi$ образ $f(W)$ любой компоненты множества $\mathscr{X} \setminus \gamma$ содержится в некоторой компоненте множества $\mathscr{Y} \setminus f(\gamma)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma \in \Phi$ и W — компонента множества $\mathscr{X} \setminus \gamma$. Для произвольно заданных точек $a, b \in W$ построим указанную в условии (У1) цепь $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ разделителей из семейства Φ. Тогда множество $A = f\big(\bigcup_j \gamma_j\big)$ содержит точки $f(a)$, $f(b)$ и является объединением конечного набора связных замкнутых множеств $f(\gamma_j)$. Так как $f(\gamma_j)\cap f(\gamma_{j+1})\neq\varnothing$ для всех $j=1,\dots,m-1$, множество A связно и не пересекается с $f(\gamma)$ в силу инъективности f. Следовательно, множество A вместе с точками $f(a)$ и $f(b)$ лежит в одной компоненте множества $\mathscr{Y}\setminus f(\gamma)$. Утверждение доказано.

Лемма 4.6. *Пусть в связном $\mathscr{T}_1$-пространстве $\mathscr{X}$ задано некоторое семейство Φ связных замкнутых разделителей, удовлетворяющее условию* (У1). *Пусть $a,b\in\mathscr{X}$ и $\Phi_0\subset\Phi$ — некоторое подсемейство попарно не пересекающихся разделителей $\gamma\in\Phi$ между точками a и b, у которых $\mathscr{X}\setminus\gamma$ имеет в точности две компоненты. Пусть инъективное отображение $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ в связное $\mathscr{T}_1$-пространство таково, что образ $\gamma^*:=f(\gamma)$ любого разделителя $\gamma\in\Phi$ является связным замкнутым разделителем пространства $\mathscr{Y}$. Пусть семейство Ψ состоит из всех таких $\gamma\in\Phi_0$, у которых точки $a^*:=f(a)$ и $b^*:=f(b)$ лежат в одной компоненте множества $\mathscr{Y}\setminus\gamma^*$ (обозначим ее через $D(\gamma^*)$). Тогда*

(i) *для любой пары различных разделителей $\gamma,\tau\in\Psi$ множества $\mathscr{Y}\setminus(D(\gamma^*)\cup\gamma^*)$ и $\mathscr{Y}\setminus(D(\tau^*)\cup\tau^*)$ не пересекаются;*

(ii) *если пространство $\mathscr{Y}$ имеет счетную базу, то семейство Ψ не более чем счетно; в этом случае образ γ^* любого $\gamma\in\Phi_0$, за исключением не более чем счетного подсемейства, разделяет $\mathscr{Y}$ между точками $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство. Допустим, что есть точка p в пересечении множеств $\mathscr{Y}\setminus(D(\gamma^*)\cup\gamma^*)$ и $\mathscr{Y}\setminus(D(\tau^*)\cup\tau^*)$. Так как $\gamma\in\Phi_0$, множество $\mathscr{X}\setminus\gamma$ имеет в точности две компоненты $Q_a\ni a$ и $Q_b\ni b$, являющиеся открытыми множествами. В силу утверждения 4.5

$$f(\mathscr{X}\setminus\gamma)=f(Q_a)\cup f(Q_b)\subset D(\gamma^*).$$

Поскольку $\tau\cap\gamma=\varnothing$, имеем $\tau\subset\mathscr{X}\setminus\gamma$. Следовательно, $\tau^*\subset D(\gamma^*)$. Аналогично $\gamma^*\subset D(\tau^*)$.

Связные замкнутые множества γ^* и τ^* разделяют пространство $\mathscr{Y}$ между точками a^* и p (в силу допущения). Пусть $\mathscr{Y}\setminus\gamma^*=M_{a^*}(\gamma^*)\cup M_p(\gamma^*)$ и $\mathscr{Y}\setminus\tau^*=M_{a^*}(\tau^*)\cup M_p(\tau^*)$ — соответствующие разбиения для этих разделителей согласно определению 4.2, где $M_{a^*}(\gamma^*)$, $M_{a^*}(\tau^*)$, $M_p(\gamma^*)$ и $M_p(\tau^*)$ — открытые множества. По утверждению 4.4 должно выполняться одно из включений: $M_{a^*}(\gamma^*)\cup\gamma^*\subset M_{a^*}(\tau^*)$ или $M_{a^*}(\tau^*)\cup\tau^*\subset M_{a^*}(\gamma^*)$. Не нарушая общности, можно считать, что

$$M_{a^*}(\gamma^*)\cup\gamma^*\subset M_{a^*}(\tau^*). \tag{4.6.1}$$

В силу связности $\mathscr{Y}$ его собственное подмножество $D(\gamma^*)$ имеет непустую границу $\partial D(\gamma^*)$ [9, § 46.I, теорема 1]. Для любой точки $x\in\partial D(\gamma^*)$ множество $D(\gamma^*)\cup\{x\}$ связно [14, следствие 6.1.11]. Соотношение $x\notin\gamma^*$ противоречит определению компоненты $D(\gamma^*)$ как максимального связного множества в $\mathscr{Y}\setminus\gamma^*$, содержащего точку a^*. Поэтому $x\in\gamma^*$ и, следовательно, $D(\gamma^*)\cup\gamma^*$ связно как объединение пересекающихся связных множеств [9, § 46.II, следствие 3(i)]. Так как $D(\gamma^*)\cup\gamma^*\subset M_{a^*}(\gamma^*)\cup\gamma^*$, в силу (4.6.1) связное множество $D(\gamma^*)\cup\gamma^*$ содержится в компоненте дополнения к τ^*, содержащей точку a^*, т. е. $D(\gamma^*)\cup\gamma^*\subset D(\tau^*)$. Но тогда $\tau^*\subset D(\gamma^*)\subset D(\tau^*)\subset\mathscr{Y}\setminus\tau^*$. Полученное противоречие доказывает утверждение (i).

Сопоставив каждому разделителю $\gamma\in\Psi$ открытое множество $\mathscr{Y}\setminus(D(\gamma^*)\cup\gamma^*)$, получим семейство непересекающихся (в силу (i)) открытых множеств, которое не более чем счетно в случае, когда $\mathscr{Y}$ имеет счетную базу. Значит, в этом случае не более чем счетно семейство разделителей Ψ, т. е. справедливо утверждение (ii). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть задано компактное множество $K \subset f(\mathscr{X})$. Допустим, что имеется точка $a \in \Sigma := f^{-1}(K)$, в которой отображение $g := f|\Sigma$ не является непрерывным. Тогда имеются открытая окрестность $W \subset \mathscr{Y}$ точки $a^* := f(a)$ и последовательность $\{a_n\} \subset \Sigma$, сходящаяся к точке a, такие, что $f(a_n) \in K \setminus W$ при всех n (см. [9, § 20.II, теорема 3; § 20.III, теорема]). В силу компактности множества $K \setminus W$ в последовательности $\{f(a_n)\} \subset K \setminus W$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Поэтому без нарушения общности можно считать, что последовательность $\{f(a_n)\}$ имеет предел $q^* \in K \setminus W$. Так как $q^* \neq a^*$, то $q = f^{-1}(q^*) \neq a$.

Пусть Ψ есть семейство таких попарно не пересекающихся разделителей $\gamma \in \Phi$ между точками a и q, для которых точки a^* и q^* лежат в одной компоненте множества $\mathscr{Y} \setminus \gamma^*$. В связном метрическом сепарабельном пространстве $\mathscr{X}$ к семейству Ψ можно применить теорему 4 из [9, § 46.VIII], в силу которой каждый из разделителей $\gamma \in \Psi$, за исключением не более чем счетного подсемейства $\Psi' \subset \Psi$, разбивает $\mathscr{X}$ в точности на две области. Ввиду леммы 4.6(ii) семейство $\Psi'' = \Psi \setminus \Psi'$ не более чем счетно. Следовательно, семейство $\Psi = \Psi' \cup \Psi''$ не более чем счетно. Итак, в несчетном семействе $\Phi(a|q) \subset \Phi$ (существующем в силу условия (Y2)) попарно не пересекающихся разделителей между точками a и q имеется разделитель $\gamma \in \Phi(a|q)$, дополнение к которому в $\mathscr{X}$ состоит в точности из двух компонент $Q_a \ni a$ и $Q_q \ni q$ (открытые множества), а его образ γ^* разделяет в $\mathscr{Y}$ точки a^* и q^*.

В силу сходимости $a_n \to a$ все точки $f(a_n)$ начиная с некоторого номера содержатся в Q_a. С учетом утверждения 4.5 их образы содержатся в той компоненте U_{a^*} множества $\mathscr{Y} \setminus \gamma^*$, которая содержит точку a^*. Но в силу сходимости $f(a_n) \to q^*$ все точки $f(a_n)$ начиная с некоторого номера содержатся в той компоненте U_{q^*} множества $\mathscr{Y} \setminus \gamma^*$, которая содержит точку q^*. Следовательно, $U_{a^*} = U_{q^*}$, и точки a^*, q^* не могут разделяться множеством γ^*.

Полученное противоречие доказывает непрерывность отображения $f|f^{-1}(K)$ в любой точке множества $f^{-1}(K)$. Теорема доказана.

Основные результаты этой работы анонсированы в [15].

Автор благодарен рецензенту за тщательную проверку текста и сделанные им замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Caratheodory C.* The most general transformations of plane regions which transform circles into circles // Bull. Amer. Math. Soc. 1937. V. 43. P. 537–539.
2. *Höfer P.* A characterization of Möbius transformations // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 128, N 4. P. 1197–1201.
3. *Beardon A. F., Minda D.* Sphere-preserving maps in inversive geometry // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 130, N 4. P. 987–998.
4. *Li B., Yao G.* On characterizations of sphere-preserving maps // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2009. V. 147. P. 439–446.
5. *Асеев В. В.* Квазиконформный аналог критерия Каратеодори мёбиусовости отображений // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 3–10.
6. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1988. (Lect. Notes Math.; V. 1319).
7. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

8. *Vuorinen M.* Quadruples and spatial quasiconformal mappings // Math. Z. 1990. Bd 205. S. 617–628.

9. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.

10. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

11. *Caraman P.* n-Dimensional quasiconformal (QCf) mappings. Tundridge Wells, Kent, England: Abacus Press, 1974.

12. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).

13. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.

14. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

15. *Aseev V. V.* Injective mappings transforming spheres to quasispheres // Дни геометрии в Новосибирске-2015: Тез. Междунар. конф. Новосибирск: Инст. математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2015. P. 72.

Статья поступила 26 октября 2015 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru