Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 512.541

О ВПОЛНЕ КВАЗИТРАНЗИТИВНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

А. Р. Чехлов

Аннотация. Охарактеризованы вполне квазитранзитивные группы без кручения в классе групп, кольцо квазиэндоморфизмов которых является телом, а также в классе групп, являющихся прямыми суммами однородных групп. Доказана вполне транзитивность вполне квазитранзитивных связных групп, а также вполне квазитранзитивных групп без кручения, совпадающих со своим псевдоцоколем и имеющих p-ранг ≤ 1 для каждого простого числа p.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.522

Ключевые слова: неприводимая группа, эндоконечная группа, связная группа, псевдоцоколь группы без кручения, специальное кольцо эндоморфизмов.

Напомним, что подгруппа H группы A называется *вполне инвариантной*, если $fH \subseteq H$ для всякого f из кольца эндоморфизмов $E(A)$ группы A; если $nH = H \cap nA$ для всякого натурального n, то подгруппа H называется *чистой*. Группа называется *неприводимой*, если она не обладает нетривиальными чистыми вполне инвариантными подгруппами. Группа без кручения A называется *вполне транзитивной*, если для любых $0 \neq a, b \in A$ из условия на их характеристики $\chi(a) \leq \chi(b)$ следует, что $\alpha a = b$ для некоторого $\alpha \in E(A)$. Если из условия на типы $t(a) \leq t(b)$ вытекает существование $\alpha \in E(A)$ и некоторого натурального числа k со свойством $\alpha a = kb$, то группу без кручения A назовем *вполне квазитранзитивной* (кратко, fqt-*группой*). Ясно, что вполне транзитивные и неприводимые группы без кручения являются fqt-группами.

Через $\langle B\rangle_*$ обозначается чистая подгруппа, порожденная подмножеством B группы; $t(A)$ — тип однородной группы без кручения A; $T(A)$ — множество типов всех ненулевых элементов группы без кручения A; если A — группа без кручения, t — тип, то $A(t) = \{x \in A \mid t(x) \geq t\}$; $f \mid G$ — ограничение гомоморфизма $f : A \to B$ на подмножестве $G \subseteq A$; $\Pi(A)$ — множество всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$; $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел и $\mathbb{Q}$ — группа (поле) всех рациональных чисел. Чистую вполне инвариантную подгруппу будем кратко называть pfi-*подгруппой*. Группа без кручения A называется *квазиоднородной*, если $\Pi(A) = \Pi(G)$ для всякой ее чистой подгруппы $G \neq 0$. Используемые термины и обозначения стандартны и соответствуют [1, 2].

Имеется обширная литература, посвященная вполне транзитивным и близким к ним группам без кручения (см., например, [2, гл. VII; 3, 4] и др.); fqt-группы уже использовались в [5] при изучении неприводимых групп.

Лемма 1. *Группа без кручения A является* fqt-*группой тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть является* fqt-*группой.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть $A = D \oplus G$, где D — делимая часть группы A, $x, y \in A$ и $t(x) \le t(y)$. Если $x = b + g$ и $y = b' + g'$, где $b, b' \in D$ и $g, g' \in G$, то $t(x) = t(g)$, $t(y) = t(g')$. Из инъективности следует, что всякий ненулевой элемент делимой группы без кручения можно перевести некоторым эндоморфизмом в любой элемент этой группы. Поэтому если $b \neq 0$, то $\alpha b = b'$ для некоторого $\alpha \in E(D)$. Если $g = 0$, то при $g' \neq 0$ имеем $t(b) = t(x) \le t(y) \le t(g')$, где $t(g') < t(b') = t(b)$; следовательно, $g' = 0$, и утверждение в этом случае доказано. Пусть далее $g \neq 0$. Тогда $\beta g = b'$ для некоторого $\beta \in \mathrm{Hom}(\langle g \rangle, D)$. В силу инъективности группы D гомоморфизм β продолжается до гомоморфизма $\bar{\beta} : G \to D$. Имеем $t(x) = t(g) \le t(g')$. Поэтому $\gamma g = kg'$ для некоторых $\gamma \in E(G)$ и $k \in \mathbb{N}$. Если теперь $\bar{\beta} \mid D = 0_D$, $\gamma \mid D = 0_D$ и $\varphi = k\bar{\beta} + \gamma$, то $\varphi x = ky$. $\square$

Предложение 1. *Для группы без кручения A следующие условия равносильны:*

(a) A — fqt-*группа;*

(b) *для всякой чистой подгруппы G ранга 1 группы A некоторое натуральное кратное всякого гомоморфизма $G \to A$ индуцируется эндоморфизмом группы A;*

(c) *для всякой* pfi-*подгруппы H группы A и для каждого $x \in H$ имеет место включение $A(t(x)) \subseteq H$. В частности, $H = \big\langle \sum\limits_{t \in \Omega} A(t) \big\rangle_*$ для некоторого $\Omega \subseteq T(A)$.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) Пусть $\alpha : G \to A$ — ненулевой гомоморфизм. Тогда $t(\alpha g) \ge t(g)$ для всякого $0 \neq g \in G$. Поэтому $\beta g = k(\alpha g)$ для некоторых $\beta \in E(A)$ и $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\beta \mid G = k\alpha$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Для каждого $b \in A$ с условием $t(b) \ge t(x)$ имеем $\alpha x = kb$ при некоторых $\alpha \in E(A)$ и $k \in \mathbb{N}$. Чистота и вполне инвариантность подгруппы H влекут $b \in H$. Следовательно, $A(t(x)) \subseteq H$. В качестве Ω можно взять множество типов всех ненулевых элементов подгруппы H.

(c) $\Rightarrow$ (a) Пусть $t(a) \le t(b)$. Тогда $b \in A(t(a)) \subseteq \langle E(A)a \rangle_*$, откуда $kb \in E(A)a$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Следствие 1. *Для однородной группы без кручения A следующие условия равносильны:*

(a) A — fqt-*группа;*

(b) *для любых ее чистых подгрупп B и G ранга 1 существует такой $\alpha \in E(A)$, что $\alpha B \subseteq G$;*

(c) *для любого $0 \neq x \in A$ подгруппа $E(A)x$ существенна в A, т. е. A — неприводимая группа.*

Будем говорить, что группы без кручения G_1 и G_2 образуют fqt-*пару*, если для любых $x \in G_i$, $y \in G_j$ $(i, j \in \{1, 2\})$ с условием $t_{G_i}(x) \le t_{G_j}(y)$ существуют $\alpha \in \mathrm{Hom}(G_i, G_j)$ и $k \in \mathbb{N}$ со свойством $\alpha x = ky$.

Будем говорить, что система A_i $(i \in I)$ групп без кручения удовлетворяет *условию монотонности для типов*, если для любого $0 \neq d \in A_i$ из условия $t(a_1) \cap \dots \cap t(a_m) \le t(d)$, где $a_j \in A_{i_j}, i_j \neq i_s$ при $j \neq s$, а $j, s = 1, \dots, m$, следует существование $b_1, \dots, b_r \in A_i$ со свойствами $0 \neq b_1 + \dots + b_r \in \langle d \rangle$ и для каждого b_l $(l = 1, \dots, r)$ среди элементов $a_1, \dots, a_m$ найдется хотя бы один такой a_s, что $t(b_l) \ge t(a_s)$.

Данные понятия являются перенесением соответствующих понятий, введенных в [6, 7] для изучения прямых сумм вполне транзитивных групп, на случай fqt-групп (см. также [8]).

Предложение 2. *Группа без кручения* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ *является* fqt-*группой тогда и только тогда, когда система групп* A_i $(i \in I)$ *удовлетворяет условию монотонности для типов и группы* A_i, A_j *образуют* fqt-*пару для любых* $i, j \in I$.

Доказательство. Необходимость. Пусть, как в вышеприведенном определении,
$$t(d) \geq t(a_1 + \dots + a_m) = t(a_1) \cap \dots \cap t(a_m).$$
Тогда если π — проекция группы A на A_i, а $\varphi(a_1 + \dots + a_m) = kd$, то $\pi\varphi(a_j) \in A_i$ и $t(\pi\varphi(a_j)) \geq t(a_j)$, $j = 1, \dots, m$. Необходимость условия о fqt-паре очевидна.

Достаточность. Пусть $t(y) \geq t(x)$ для некоторых $0 \neq x, y \in A$, где $x = x_1 + \dots + x_m$, $y = y_1 + \dots + y_n$, а $x_j \in A_{i_j}$, $y_q \in A_{i_q}$ $(j = 1, \dots, m; q = 1, \dots, n)$. Покажем, что для каждого y_q найдутся $\varphi_q \in E(A)$ и $k_q \in \mathbb{N}$ такие, что $\varphi_q(x) = k_q y_q$. Тогда
$$[(k_2 \dots k_n)\varphi_1 + \dots + (k_1 \dots k_{n-1})\varphi_n](x) = ky,$$
где $k = k_1 \dots k_n$.

Если для y_q найдется такой x_j, что $t(y_q) \geq t(x_j)$, то $\varphi_j(x_j) = k_q y_q$ для некоторых $k_q \in \mathbb{N}$ и $\varphi_j \in \mathrm{Hom}(A_{i_j}, A_{i_q})$. Полагая $\varphi_q \mid A_j = \varphi_j$ и $\varphi_q(A_{i_s}) = 0$ при $i_s \neq i_j$, получаем $\varphi_q(x) = k_q y_q$. Допустим, что $t(y_q) \ngeq t(x_j)$ для каждого $j = 1, \dots, m$. Так как
$$t(y_q) \geq t(y) \geq t(x) = t(x_1) \cap \dots \cap t(x_m),$$
по условию существуют элементы $b_1, \dots, b_r \in A_{i_q}$ со свойствами $b_1 + \dots + b_r = uy_q$, где $u \in \mathbb{N}$, и для каждого b_l $(l = 1, \dots, r)$ найдется такой x_s $(s \in \{1, \dots, m\})$, что $t(b_l) \geq t(x_s)$. Значит, $\psi_s(x_s) = m_l b_l$ для некоторых $m_l \in \mathbb{N}$ и $\psi_s \in \mathrm{Hom}(A_{i_s}, A_{i_l})$. Полагая $\bar{\psi}_s(A_{i_j}) = 0$ при $i_j \neq i_s$, имеем $\bar{\psi}_s(x) = m_l b_l$, где $\bar{\psi}_s \in E(A)$. Поскольку это справедливо для каждого b_l в разложении $uy_q = b_1 + \dots + b_r$, получаем, что некоторое натуральное кратное элемента y_q есть эндоморфный образ элемента x. $\square$

Теорема 1. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, *где* A_i *— однородные группы без кручения. Группа* A *является* fqt-*группой тогда и только тогда, когда для любых* $i, j \in I$ *группы* A_i, A_j *образуют* fqt-*пару и, кроме того, для каждого конечного* $\varnothing \neq J \subsetneqq I$ *и всякого* $s \in I \setminus J$ *если* $\bigcap_{j \in J} t(A_j) \leq t(A_s)$, *то* $t(A_j) \leq t(A_s)$ *при некотором* $j \in J$.

Доказательство. Необходимость. Если $t(A_j) \nleq t(A_s)$ для каждого j некоторого конечного $J \subseteq I$, то $\mathrm{Hom}\big(\bigoplus_{j \in J} A_j, A_s\big) = 0$; далее $\bigcap_{j \in J} t(A_j) = t\big(\sum_{j \in J} a_j\big)$ и $t(A_s) = t(a_s)$ при $0 \neq a_j \in A_j$ и $0 \neq a_s \in A_s$. Поэтому если $\bigcap_{j \in J} t(A_j) \leq t(A_s)$, то это противоречит тому условию, что A является fqt-группой.

Достаточность вытекает из того, что указанная система групп A_i $(i \in I)$ удовлетворяет условию монотонности для типов. $\square$

Заметим, что группы без кручения ранга 1 всегда образуют fqt-пару. Сепарабельная группа без кручения является fqt-группой тогда и только тогда, когда каждое ее прямое слагаемое конечного ранга — fqt-группа. Поэтому сепарабельная группа без кручения является fqt-группой тогда и только тогда, когда все ее прямые слагаемые A_i ранга 1 удовлетворяют условию теоремы 1. Отметим, что сепарабельная группа без кручения вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых ее прямых слагаемых A_i ранга 1 условие $t(A_i) \neq t(A_j)$ влечет, что $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \varnothing$, в частности, типы $t(A_i)$ и $t(A_j)$ несравнимы [7, следствие 3.40]. Нижеприведенное следствие также позволяет строить fqt-группы, не являющиеся вполне транзитивными.

Следствие 2. *Если A — fqt-группа с линейно упорядоченным множеством $T(A)$, то $\bigoplus\limits_{\alpha} A$ является fqt-группой для любого кардинального числа α.*

Напомним, что группы без кручения A и B называются *квазиравными* ($A \doteq B$), если $mA \subseteq B$ и $nB \subseteq A$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$. Группу без кручения A назовем *квазиэндоконечной* (*квазиэндоциклической*), если A квазиравна некоторому конечно порожденному (циклическому) $E(A)$-модулю.

Если A — группа без кручения, то кольцо $E(A) \otimes \mathbb{Q}$ называется *кольцом квазиэндоморфизмов* группы A и обозначается через $\mathscr{E}(A)$. Считаем, что $E(A)$ содержится в $\mathbb{Q}$-алгебре $E(A) \otimes \mathbb{Q}$; $\mathscr{E}(A)$ можно отождествить с рациональной алгеброй, порожденной кольцом $E(A)$ в $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(A \otimes \mathbb{Q})$. При этом отождествлении имеем $\mathscr{E}(A) = \{\alpha \in \operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(A \otimes \mathbb{Q}) \mid n\alpha \in E(A)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}\}$. Обратимые элементы из $\mathscr{E}(A)$ называются *квазиавтоморфизмами* группы A.

Отметим, что квазиэндоконечная группа без кручения A конечного ранга эндоконечна, т. е. A — конечно порожденный $E(A)$-модуль. Действительно, $nA \subseteq B = E(A)a_1 + \dots + E(A)a_m$. Можно считать, что $B \subseteq A$. Поскольку A/B — конечный $E(A)$-модуль (это следует из конечности ранга), а B — конечно порожденный $E(A)$-модуль, модуль A также является таковым.

Напомним, что *псевдоцоколем* $\operatorname{Soc} A$ группы без кручения A называется чистая подгруппа, порожденная всеми ее минимальными pfi-подгруппами. Если A — fqt-группа, то всякая ее минимальная pfi-подгруппа имеет вид $A(t)$, где t — максимальный тип в $T(A)$.

Предложение 3. *Пусть G — fqt-группа без кручения. Равносильны следующие условия:*

(a) *каждый ненулевой эндоморфизм группы G является ее квазиавтоморфизмом;*

(b) *$\mathscr{E}(G)$ — тело;*

(c) *каждый ненулевой эндоморфизм группы G является ее мономорфизмом и G либо однородная, либо неоднородная группа с бесконечным множеством $T(G)$, причем все типы в $T(G)$ максимальны, в частности, $G = \operatorname{Soc} G$.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) Если $0 \neq \alpha \in E(G)$, то по условию $nG \subseteq \alpha G$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому если $V = G \otimes \mathbb{Q}$, то $\alpha V = V$, а так как α — мономорфизм, он является автоморфизмом группы V. Поскольку некоторое натуральное кратное каждого элемента из $\mathscr{E}(G)$ является эндоморфизмом группы G, то $\mathscr{E}(G)$ — тело.

(b) $\Rightarrow$ (c) Если бы нашлись $0 \neq a, b \in G$ со свойством $t(b) > t(a)$, то $\alpha a = kb$ для некоторых $\alpha \in E(G)$ и $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathscr{E}(G)$ — тело, некоторое целое кратное каждого ненулевого элемента из $\mathscr{E}(G)$ является квазиавтоморфизмом группы G. Квазиавтоморфизмы сохраняют типы элементов, что противоречит условию $t(b) > t(a)$. Далее, если H_1 и H_2 — различные минимальные pfi-подгруппы и $t(H_1) \leq t(H_2)$, то $0 \neq \beta a \in H_1 \cap H_2 = 0$ для некоторых $\beta \in E(G)$

и $a \in H_1$; следовательно, типы $t(H_1)$ и $t(H_2)$ несравнимы. Для одномерного $\mathscr{E}(G)$-подпространства W в $V = G \otimes \mathbb{Q}$ пересечение $W \cap G$ является минимальной pfi-подгруппой группы G. Поэтому если группа G неоднородна, то $\dim_{\mathscr{E}(G)} V \geq 2$; значит, G имеет бесконечное число минимальных pfi-подгрупп с попарно не сравнимыми типами, в частности, $|T(G)| \geq \aleph_0$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Если $0 \neq a \in G$ и $0 \neq \alpha \in E(G)$, то $t(a) = t(\alpha a)$. Следовательно, $\beta\alpha(a) = ka$ для некоторых $\beta \in E(G)$ и $k \in \mathbb{N}$. Имеем $\alpha\beta\alpha(a) = k\alpha a$. Отсюда $\beta\alpha = k \cdot 1_G$ и $\alpha\beta = k \cdot 1_G$. В частности, $kG \subseteq \alpha(G)$, т. е. α — квазиавтоморфизм группы G. $\square$

В следующем предложении чистота подмодуля понимается в смысле Кона, т. е. подмодуль V левого R-модуля U *чист* в U, если для любого правого R-модуля M естественный групповой гомоморфизм $M \otimes_R V \to M \otimes_R U$ является мономорфизмом.

Предложение 4. *Пусть G — группа без кручения такая, что $\mathscr{E}(G)$ — тело. Равносильны следующие утверждения:*

(a) G — fqt-*группа;*

(b) *если $R = E(G)$ и X, Y — различные чистые R-подмодули в G R-ранга* 1, *то* $\operatorname{Hom}_R(X, Y) = 0$.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) $X \otimes \mathbb{Q}$ является $\mathscr{E}(G)$-подпространством в $G \otimes \mathbb{Q}$ ранга 1. Так как $X = (X \otimes \mathbb{Q}) \cap G$, то X — минимальная pfi-подгруппа в G (чистота R-подмодуля X влечет чистоту подгруппы X в G). Поэтому ввиду несравнимости типов различных минимальных pfi-подгрупп (см. доказательство предложения 3) получаем $\operatorname{Hom}_R(X, Y) = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Пусть X, Y — минимальные pfi-подгруппы, $t(X) \leq t(Y)$ и A, B — чистые подгруппы ранга 1 в X, Y соответственно. Тогда $t(A) \leq t(B)$. Поэтому найдется мономорфизм $\alpha : A \to B$. Если $0 \neq a \in A$, то соответствие $a \mapsto \alpha a$ продолжается до гомоморфизма $Ra \to R\alpha a$; поскольку все ненулевые элементы из R являются мономорфизмами и $\chi(ra) \leq \chi(r\alpha(a))$ для каждого $r \in R$, этот гомоморфизм продолжается до гомоморфизма $\beta : \langle Ra \rangle_* \to \langle R\alpha(a) \rangle_*$. Ясно, что $X = \langle Ra \rangle_*$, $Y = \langle R\alpha(a) \rangle_*$ и X, Y как R-подмодули в G имеют R-ранг 1. Поскольку $\mathscr{E}(G)$ — тело, то X и Y — чистые R-подмодули в G. Действительно, если M — правый R-модуль, то естественный групповой гомоморфизм $\gamma : M \otimes_R X \to M \otimes_R G$ продолжается до гомоморфизма $\bar{\gamma} : (M \otimes \mathbb{Q}) \otimes_{\mathscr{E}(G)} (X \otimes \mathbb{Q}) \to (M \otimes \mathbb{Q}) \otimes_{\mathscr{E}(G)} (G \otimes \mathbb{Q})$; $\mathscr{E}(G)$-модуль $M \otimes \mathbb{Q}$ плоский, поэтому $\bar{\gamma}$ — мономорфизм, значит, γ также является мономорфизмом. По построению гомоморфизм β R-модульный. Поэтому из условия следует, что $X = Y$. Таким образом, различные минимальные pfi-подгруппы группы G имеют несравнимые типы. Если $0 \neq x, y \in G$ и $t(x) \leq t(y)$, то по доказанному x, y лежат в одной минимальной pfi-подгруппе группы G, значит, x переводится эндоморфизмом группы G в некоторое натуральное кратное элемента y. $\square$

Напомним, что квазиравенство $A \doteq \bigoplus A_i$ называется *квазиразложением* группы A. Группа называется *сильно неразложимой*, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями. Группа без кручения, квазиизоморфная fqt-группе, сама является fqt-группой.

Предложение 5. *Пусть G — неоднородная* fqt-*группа группа без кручения такая, что $G = \operatorname{Soc} G$. Равносильны следующие условия:*

(a) *все ненулевые эндоморфизмы группы G являются мономорфизмами;*

(b) *для любых элементов* $0 \neq a, b \in G$ *с несравнимыми и максимальными типами подгруппа* $X = \langle a, b\rangle_*$ *сильно неразложима;*

(c) *все элементы в* $T(G)$ *максимальны.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) Допустим, что $nX \subseteq A \oplus B \subseteq X$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Имеем $a \in A$, $b \in B$ (учитывая максимальность типов этих элементов) и, значит, $\chi(a+b) \leq \chi(na)$. Следовательно, $\alpha(a+b) = kna$ для некоторых $\alpha \in E(G)$ и $k \in \mathbb{N}$. Если $\alpha b \neq 0$, то $kna - \alpha a \neq 0$ и $t(b) = t(\alpha b) = t(kna - \alpha a) = t(a)$, что противоречит условию несравнимости типов $t(a)$ и $t(b)$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Пусть $\alpha x = 0$ для некоторых $0 \neq \alpha \in E(G)$ и $0 \neq x \in G$. Допустим, что $\alpha y \neq 0$ для каждого $0 \neq y \in G$ максимального типа. Так как $G = \operatorname{Soc} G$, некоторое целое кратное элемента x можно записать в виде $b_1 + \dots + b_s$, где элементы b_i имеют максимальные попарно не сравнимые типы. По предположению $\alpha(b_i) \neq 0$ $(i = 1, \dots, s)$. Ясно, что $s \geq 2$. Среди всех элементов, кратных x, выберем элемент с минимальным s. Поскольку $\langle x\rangle_* \subseteq \ker \alpha$, без ограничения общности можно считать, что сам x обладает этим свойством. Из $\alpha x = \alpha(b_1 + \dots + b_s) = 0$ следует $\alpha(b_1) = -\alpha(b_2) - \dots - \alpha(b_s)$. Так как $t(\alpha(b_1)) = t(b_1)$, то $\beta\alpha(b_1) = kb_1$ для некоторых $\beta \in E(G)$ и $k \in \mathbb{N}$. Отсюда $kb_1 = -\beta\alpha(b_2) - \dots - \beta\alpha(b_s)$. Имеем $b_i' = kb_i - \beta\alpha(b_i) \in G(t(b_i))$, где $i = 2, \dots, s$, и $b_2' + \dots + b_s' = k(b_2 + \dots + b_s) - \beta\alpha(b_2) - \dots - \beta\alpha(b_s) = kx$, что противоречит выбору x. Поэтому найдется элемент $a \neq 0$ максимального типа, лежащий в $\ker \alpha$. Поскольку группа G неоднородна и $G = \operatorname{Soc} G$, найдется элемент b максимального типа, не сравнимого с типом $t(a)$, и $\alpha b \neq 0$ (если все элементы максимального типа содержатся в $\ker \alpha$, то $\alpha(G) = 0$ ввиду равенства $G = \operatorname{Soc} G$). Тогда подгруппа $\langle a, b\rangle_*$ обязана быть квазразложимой (равенство $\alpha a = 0$ при сильной неразложимости группы $\langle a, b\rangle_*$ влечет $t(\alpha b) > t(b)$), что противоречит условию.

(a) $\Rightarrow$ (c) Ввиду равенства $G = \operatorname{Soc} G$ найдется такой $a \in G$, что $t(\alpha a) = t(a)$ для каждого $\alpha \in E(G)$; поэтому так же, как в доказательстве (c) $\Rightarrow$ (a) предложения 3, все ненулевые эндоморфизмы группы G являются квазиавтоморфизмами. Следовательно, п. (c) справедлив ввиду этого же предложения.

(c) $\Rightarrow$ (b) Если подгруппа $X = \langle a, b\rangle_*$ квазиразложима для некоторых $0 \neq a, b \in G$ несравнимых типов и $nX \subseteq A \oplus B \subseteq X$, то $a \in A$, $b \in B$ ввиду максимальности типов этих элементов. Но тогда $t(a+b) < t(a), t(b)$, что противоречит условию на $T(G)$. $\square$

Напомним, что если p — простое число, то *p-рангом* $r_p(G)$ группы G называется ранг фактор-группы G/pG. Кольцо R называется *сильно однородным*, если всякий его элемент есть целое кратное некоторого обратимого в R элемента, а если для каждого $p \in \Pi(R)$ выполняется $R/pR \cong F_p$, то такое сильно однородное кольцо R без кручения (имеется в виду, что R^+ — группа без кручения) называется *специальным* [2, § 44]. Класс всех редуцированных групп без кручения G таких, что $r_p(G) \leq 1$ для каждого простого p, обозначим через $\mathscr{E}$. Группа без кручения G называется *связной*, если для всякой ее чистой подгруппы $A \neq 0$ фактор-группа G/A делима. Класс редуцированных связных групп совпадает с классом всех квазиоднородных групп, содержащихся в $\mathscr{E}$ [2, § 44]. Всякий ненулевой гомоморфизм редуцированной связной группы в редуцированную группу без кручения является мономорфизмом. Ясно, что если кольцо эндоморфизмов группы без кручения G специальное, то кольцо $\mathscr{E}(G)$ будет телом.

Предложение 6. *Всякая связная* fqt-*группа* G *вполне транзитивна.*

Доказательство. Пусть $\chi(a) \le \chi(b)$, где $0 \ne a, b \in G$. Тогда $\alpha a = kb$ для некоторых $\alpha \in E(G)$ и $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что k можно выбрать так, чтобы оно делилось на простые числа только из $\Pi(G)$. Поэтому если $k = p^n m$, где $(p, m) = 1$, то G можно рассматривать как p-чистую подгруппу группы целых p-адических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ (т. е. $G \cap p^s\widehat{\mathbb{Z}}_p = p^s G$ для всякого $s \in \mathbb{N}$). Группа $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ вполне транзитивна и делима на все простые числа $\ne p$. Отсюда $\psi a = mb$ для некоторого $\psi \in E(\widehat{\mathbb{Z}}_p)$. Аддитивная группа $E(G)^+$ кольца $E(G)$ также является связной группой [2, § 32, упражнение 10], и $pE(G) \ne E(G)$. Значит, $E(G)^+$ также можно рассматривать как p-чистую подгруппу группы $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Имеем $p^n\psi = \varphi$. Поэтому $\psi \in E(G)$. По индукции получаем $fa = b$ для некоторого $f \in E(G)$. $\square$

Теорема 2 [2, теорема 44.2]. *Пусть G — группа из $\mathscr{E}$ и $G = \operatorname{Soc} G$. Тогда $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$, где каждое кольцо $E(G_i)$ специально.*

Теорема 3. *Следующие свойства группы $G \in \mathscr{E}$ эквивалентны:*

(a) *G — fqt-группа и $G = \operatorname{Soc} G$;*

(b) *G — вполне транзитивная группа и $G = \operatorname{Soc} G$*

(c) *$G = \bigoplus_{i\in I} G_i$, где $\Pi(G_l) \cap \Pi(G_k) = \varnothing$ при $l \ne k \in I$, все кольца $E(G_i)$ специальные, а группы G_i связные и вполне транзитивные.*

Доказательство. (a) ⇒ (c) В доказательстве теоремы 44.2 из [2] показано, что $\Pi(G_l) \cap \Pi(G_k) = \varnothing$ при $l \ne k$. Как отмечено в [2, следствие 44.5], неприводимость группы из $\mathscr{E}$ эквивалентна ее вполне транзитивности. Каждое прямое слагаемое fqt-группы является fqt-группой, что ввиду предложения 6 доказывает импликацию.

(c) ⇒ (b) Условие $\Pi(G_l) \cap \Pi(G_k) = \varnothing$ при $l \ne k$ влечет вполне инвариантность в G всех подгрупп G_i и, кроме того, ввиду их вполне транзитивности вполне транзитивность самой группы G [2, лемма 42.1]. Если G_i — однородная вполне транзитивная группа, то она неприводима, значит, G_i — минимальная pfi-подгруппа группы G. Если G_i — неоднородная группа, то кольцо $\mathscr{E}(G_i)$ является телом, а $G_i \otimes \mathbb{Q}$ — вполне приводимый $\mathscr{E}(G_i)$-модуль. Поэтому $G_i = \operatorname{Soc} G_i$ [2, предложение 5.8]. Следовательно, G порождается своими минимальными pfi-подгруппами, т. е. $G = \operatorname{Soc} G$.

Импликация (b) ⇒ (a) очевидна. $\square$

Несложно установить, что если G — fqt-группа из $\mathscr{E}$, то $\operatorname{Soc} G$ также является fqt-группой из $\mathscr{E}$, а для связной группы G условие $G = \operatorname{Soc} G$ эквивалентно условию $\operatorname{Soc} G \ne 0$.

Замечание 1. Не всякая связная группа G со свойством $G = \operatorname{Soc} G$ вполне транзитивна. Пусть p — фиксированное простое число и R_p — класс всех групп без кручения, не имеющих ненулевых элементов бесконечной p-высоты. Тогда можно определить понятие p-вполне транзитивной группы $A \in R_p$, а для каждого элемента x группы $G \in R_p$ — понятие p-типа $\tau_p(x)$ этого элемента [9]. Все связные группы без кручения A p-вполне транзитивны для каждого $p \in \Pi(A)$. Если $A \in R_p$ и $\tau_p(a) \le \tau_p(b)$ для некоторых $a, b \in A$, то всегда $t(a) \le t(b)$. Связная группа G вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых ее элементов a, b условие $t(a) \le t(b)$ влечет $\tau_p(a) \le \tau_p(b)$ хотя бы для одного (равносильно, для любого) $p \in \Pi(G)$; в частности, неприводимые связные группы вполне транзитивны. Отметим, что в [2, § 44, упражнение 2] для связных групп указаны еще условия, эквивалентные их вполне транзитивности. Пусть $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — группа целых p-адических чисел, а G — ее собственная чистая подгруппа такая, что $|\widehat{\mathbb{Z}}_p/G| < |\widehat{\mathbb{Z}}_p|$. Тогда для каждого $\varphi \in E(\widehat{\mathbb{Z}}_p)$ найдется $0 \neq g \in G$ такой, что $\varphi g \in G$. Если предположить вполне транзитивность группы G, то $\psi g = \varphi g$ для некоторого $\psi \in E(G)$. Очевидно, что $\varphi \mid G = \psi$. Отсюда $\varphi(G) \subseteq G$ и, значит, G — чистая вполне инвариантная подгруппа группы $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, что противоречит неприводимости последней. Отметим еще, что если ранг фактор-группы $\widehat{\mathbb{Z}}_p/G$ конечен, то согласно [10] все эндоморфизмы группы G являются целыми кратными ее автоморфизмов. Из этого следует максимальность p-типа каждого ненулевого элемента группы G, значит, $G = \operatorname{Soc} G$.

Замечание 2. Пусть $U(x)$ обозначает индикатор элемента x p-группы G; если для всех $0 \neq x, y \in G$ таких, что $U(x) \leq U(y)$ и $y \in G[p]$, существует $\varphi \in E(G)$ со свойством $\varphi(x) = y$, то G вполне транзитивна [11, лемма 2.2]. Это указывает на невозможность расширения класса вполне транзитивных p-групп тем же способом, как было сделано выше для групп без кручения.

В заключение приведем некоторые открытые вопросы.

1. Существует ли неквазиоднородная fqt-группа без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которой являются мономорфизмами?

2. Существует ли квазиоднородная fqt-группа без кручения G конечного p-ранга $r_p(G) > 1$, все чистые подгруппы которой сильно неразложимы и которая имеет ненулевые эндоморфизмы с ненулевыми ядрами?

3. Является ли неприводимая идемпотентного типа группа без кручения конечного ранга эндоконечной?

4. Всякую ли fqt-группу G можно вложить в качестве вполне инвариантной подгруппы во вполне транзитивную группу без кручения A так, что $t_G(x) = t_A(x)$ для каждого $x \in G$, т. е. совпадает ли класс fqt-групп с классом указанных подгрупп вполне транзитивных групп без кручения?

Согласно [8] для вполне транзитивных групп ответы на вопросы 1 и 2 отрицательны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
2. *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал пресс, 2007.
3. *Goldsmith B., Strüngmann L.* Torsion-free weakly transitive Abelian groups // Comm. Algebra. 2005. V. 33, N 4. P. 1177–1191.
4. *Chekhlov A. R., Danchev P. V.* On commutator fully transitive Abelian groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 4. P. 623–647.
5. *Чехлов А. Р.* О прямой сумме неприводимых групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 798–800.
6. *Files S., Goldsmith B.* Transitive and fully transitive groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, N 6. P. 1605–1610.
7. *Гриншпон С. Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фунд. и прикл. математика. 2002. Т. 8, № 2. С. 407–473.
8. *Чехлов А. Р.* О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 714–719.
9. *Чехлов А. Р.* О прямых произведениях и прямых суммах абелевых QCPI-групп без кручения // Изв. вузов. Математика. 1990. № 4. С. 58–67.
10. *Крылов П. А.* О сервантных подгруппах группы целых p-адических чисел // Абелевы группы и модули. Томск, 1979. С. 122–126.

11. *Goldsmith B., Strüngmann L.* Some transitivity results for torsion Abelian groups // Houston J. Math. 2007. V. 23, N 4. P. 941–957.

Статья поступила 26 октября 2015 г.

Чехлов Андрей Ростиславович
Национальный исследовательский Томский гос. университет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
cheklov@math.tsu.ru