Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.518

КРИТЕРИЙ ВЛОЖЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА — МОРРИ В ПРОСТРАНСТВО РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. Темиргалиев, М. А. Жайнибекова, Г. Т. Джумакаева

Аннотация. Доказаны теоремы вложения классов Соболева — Морри в пространство равномерно непрерывных функций, которые являются дополнительными к классическим теоремам Соболева в случаях их невыполнения.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.520

Ключевые слова: критерий вложения С. Л. Соболева, пространство равномерно непрерывных на области функций, норма Морри, интегральное представление функций, классы Соболева — Морри.

§ 1. Введение и основные результаты

Согласно классической теореме С. Л. Соболева [1] при $rp \neq s$ для вложения класса Соболева $W_p^r((0,1)^s)$ в пространство $C((0,1)^s)$ равномерно непрерывных на $(0,1)^s$ функций необходимо и достаточно выполнение неравенства $rp > s$. В связи с этим естественно задаться вопросом о переходе к более узким классам r раз дифференцируемых функций с производными из лебегова пространства $L^p((0,1)^s)$, для которых выполнено вложение в $C((0,1)^s)$ при $rp < s$, что находится в русле теории вложений функциональных пространств и их приложений.

Данная статья посвящена решению этой общей задачи в случае, когда норма Лебега заменяется нормой Морри [2].

Для того чтобы сформулировать результаты статьи, напомним соответствующие определения и обозначения (в целом придерживаясь [3, 4]).

Пусть даны целые положительные числа s и r_j $(j = 1, \dots, s)$, положительные числа $\varkappa_j$ $(j = 1, \dots, s)$, $1 \leq p < \infty$ и положительная неубывающая на $(0, 1]$ функция $\Phi(\delta)$.

Определим множество параллелепипедов $T_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}$:

$$T_\varkappa = T_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_s} = \left\{ I_{\vartheta^\varkappa}(y) = \prod_{j=1}^{s} \left[y_j - \frac{1}{2}\vartheta^{\varkappa_j}, y_j + \frac{1}{2}\vartheta^{\varkappa_j} \right] \subset [0,1]^s : \right.$$
$$\left. 0 < y_j < 1,\ j = 1, \dots, s,\ 0 < \vartheta \leq 1 \right\}$$

и соответствующую ему норму

$$\|\varphi\|_{p,\Phi,T_\varkappa} \equiv \|\varphi\|_{p,\Phi,T_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}} \equiv \|\varphi\|_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s} \equiv \sup_{E\in T_\varkappa} \frac{1}{\Phi(|E|)} \left(\int\limits_E |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $|E|$ есть лебегова мера множества E.

Классом Соболева — Морри $W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}((0,1)^s)$ назовем множество, состоящее из всех измеримых на $[0,1]^s$ функций $f(x)$, для каждой из которых

$$\|f\|_{W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}} \equiv \|f\|_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s} + \sum_{j=1}^{s} \left\| D^{r_j}_{x_j} f \right\|_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s} \le 1,$$

где $D^{r_j}_{x_j} f$ — обобщенная производная порядка r_j по переменной x_j.

Класс $W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}((0,1)^s)$ в случае $r_1 = \dots = r_s = r$, $\varkappa_1 = \dots = \varkappa_s$ обозначим через $W^r_{p,\Phi,T}((0,1)^s)$, где T есть семейство всех s-мерных кубов из $(0,1)^s$, стороны которых параллельны осям координат.

Ясно, что при $\Phi(\delta) \equiv 1$ классы $W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s} \equiv W^{r_1,\dots,r_s}_{p,1,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}$ сводятся к соответствующим пространствам Соболева $W^{r_1,\dots,r_s}_p((0,1)^s)$. Для степенных функций $\Phi(\delta)$ классы $W^r_{p,\Phi,T}$ впервые были изучены Морри [2].

Через $c(\alpha,\beta,\dots)$ будем обозначать некоторые положительные величины, разные, вообще говоря, в разных формулах и зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

Если $\{A_N\}_{N=1}^\infty$ — последовательность положительных чисел и $\{B_N\}_{N=1}^\infty$ — произвольная числовая последовательность, то запись $B_N \underset{\alpha,\beta,\dots}{\ll} A_N$ означает, что найдется постоянная $c(\alpha,\beta,\dots)$, для которой при каждом целом положительном N выполнено неравенство $|B_N| \le c(\alpha,\beta,\dots)A_N$. Запись $A_N \underset{\alpha,\beta,\dots}{\asymp} B_N$ равносильна одновременному выполнению соотношений $A_N \underset{\alpha,\beta,\dots}{\ll} B_N$ и $B_N \underset{\alpha,\beta,\dots}{\ll} A_N$. Также для $\varkappa_1 > 0, \dots, \varkappa_s > 0$ будем писать $|\varkappa| = \varkappa_1 + \dots + \varkappa_s$.

Теорема 1. *Пусть даны целые положительные числа $s, r_1, \dots, r_s$, положительные числа $\varkappa_j$ $(j = 1,\dots,s)$, действительное число $1 \le p < \infty$ и неубывающая на $(0,1]$ положительная функция $\Phi(\delta)$, удовлетворяющая условию $\Phi(2\delta) \ll \Phi(\delta)$. Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}((0,1)^s) \subset C((0,1)^s), \tag{1.1}$$

достаточно, а в случае выполнения условий

$$\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} \ne 1, \quad r_\tau\varkappa_\tau = 1,\ \tau = 1,\dots,s, \tag{1.2}$$

$$\eta\Phi(\delta) \ll \delta\Phi(\eta), \quad 0 < \eta < \delta < 1, \tag{1.3}$$

необходимо, чтобы

$$\int\limits_0^1 \delta^{\left(1-\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}\right)\frac{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\varkappa_\tau}{|\varkappa|}} \Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} < +\infty. \tag{1.4}$$

При $r_1 = \dots = r_s = r$, $\varkappa_1 = \dots = \varkappa_s$, $T_\varkappa = T$ эта теорема сводится к следующей теореме.

Теорема A [4]. *Пусть даны числа* p, $1 \le p < \infty$, s *и* r, $s, r = 1, 2, \ldots$, *такие, что* $rp \ne s$. *Пусть также дана неубывающая на* $(0, 1]$ *положительная функция* $\Phi(\delta)$, *для которой справедливо неравенство* (1.3). *Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$W^r_{p,\Phi,T}((0,1)^s) \subset C((0,1)^s),$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_0^1 \delta^{\frac{r}{s}-\frac{1}{p}} \cdot \Phi(\delta) \frac{d\delta}{\delta} < +\infty.$$

Критерий A можно понимать как неулучшаемое дополнение к критерию Соболева $W^r_p((0,1)^s) \subset C((0,1)^s) \leftrightarrow rp > s$ путем замены исходного класса более узким классом дифференцируемых функций в случае $rp < s$, а теорему 1 — как распространение этого критерия на анизотропный случай.

Исследования Морри 1938 г. [2] получили продолжение в работах Греко, Ниренберга, Компанато, Бароцци, В. П. Ильина, Росса, Ю. В. Нетрусова и др. (см. [3, § 27]).

К. Ж. Наурызбаевым и Г. Т. Джумакаевой в первой половине 1980-х гг. был сделан новый шаг — переход от степенного $\Phi(\delta) = \delta^\beta$ к произвольному случаю (см., например, [4–8]).

В последнее время наблюдается большая научная активность по темам вложений классов Бесова — Морри, Лизоркина — Морри и Трибеля — Морри, ограниченности классических операторов, в их числе максимального и Харди, риссовских потенциалов и т. п., и интерполяции в пространствах Морри (см., например, [9–23] и имеющуюся в них библиографию).

Теперь обратимся к случаю $rp = s$, впервые изученному в [24], краткий обзор последующих результатов дан в [3, § 10, пп. 6, 7]. Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} = 1$. *В случае* $\Phi(\delta) = \log^{-\beta}\frac{1}{\delta}$, $0 < \delta < 1$, $\beta > 0$, *вложение*

$$W^{r_1,\ldots,r_s}_{p=\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j},\Phi,\varkappa_1,\ldots,\varkappa_s}((0,1)^s) \subset C((0,1)^s) \tag{1.5}$$

имеет место при $\beta > 1$ *и при всех* $\varkappa_j > 0$ $(j = 1, \ldots, s)$ *и не имеет места при* $\beta \le 1 - \frac{1}{p}$, $p > 1$, $\varkappa_j = \frac{1}{r_j}$ $(j = 1, \ldots, s)$.

Замечание 1. Теорему 2 можно рассматривать как распространение теоремы 10.4 из [3, § 10, п. 4] на случай $\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} = p$, $1 \le p \le +\infty$. Здесь случай $1 - \frac{1}{p} < \beta \le 1$ остается открытым. Не исключено, что вложение (1.5) имеет место во всех этих случаях. В заключение отметим, что полученные здесь результаты частично анонсированы в [25].

§ 2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Доказательство достаточности проводится по схеме из [3, § 27, пп. 2–4] с вычислениями, соответствующими изучаемому случаю.

Поскольку всякий s-мерный куб $(0,1)^s$ при любом $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ удовлетворяет условию λ-рога, то при $\bar{\lambda} = \bigl(\frac{1}{r_1}, \dots, \frac{1}{r_s}\bigr)$ имеет место теоретико-множественное равенство (см. [3, § 8, п. 1])

$$(0,1)^s = \bigcup_{k=1}^{K} J_k = \bigcup_{k=1}^{K} (J_k + V_k),$$

где V_k есть $\bar{\lambda}$-рог раствора $\theta > 0$ и радиуса $T > 0$:

$$V_k = V_k\left(\frac{1}{r_1}, \dots, \frac{1}{r_s}; T\right) = \bigcup_{0 \le t \le T} \bigl[\bigl(a_1^{(k)} t^{\lambda_1}, \dots, a_s^{(k)} t^{\lambda_s}\bigr)$$

$$+\bigl\{(t^{\lambda_1}\theta^{\lambda_1}\tau_1, \dots, t^{\lambda_s}\theta^{\lambda_s}\tau_s) : |\tau_j| \le 1,\ j = 1, \dots, s\bigr\}\bigr],\ \bigl(a^{(k)} = a_1^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}\bigr) \in [-1,1]^s.$$

Тем самым исходное множество $J = (0,1)^s$ разбивается на совокупность открытых множеств J_k, $k = 1, \dots, K$, приспособленных для применения интегральных представлений (см. тождество 7(49) из [3, § 7, п. 4]), в соответствии с чем для всякой функции $f \in W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\varkappa,\dots,\varkappa_s}((0,1)^s) \subset W^{r_1,\dots,r_s}_{p}((0,1)^s)$ и почти каждой точки $x \in J_k$ имеем равенство

$$f(x) = f_{h^{\frac{1}{r}}}(x) + \int_0^h \vartheta^{-\sum\limits_{t=1}^{s}\frac{1}{r_t}} \left(\sum_{j=1}^{s} \int_{R^s} D^{r_j}_{x_j} f(x+y) M_j(y : \vartheta^{\frac{1}{r}})\, dy \right) d\vartheta, \tag{2.1}$$

где

$$f_{h^{\frac{1}{r}}}(x) = h^{-\sum\limits_{t=1}^{s}\frac{1}{r_t}} \int_{R^s} f(x+y)\Omega(y : h^{\frac{1}{r}})\, dy, \tag{2.2}$$

$$0 < h \le h_0 \le 1, \quad y : \theta^{\frac{1}{r}} = (y_1 \cdot \theta^{-\frac{1}{r_1}}, \dots, y_s \cdot \theta^{-\frac{1}{r_s}}),\ 0 < \theta < 1,$$

функции Ω и M_j являются функциями класса $C_0^\infty(R^s)$, а их носители содержатся в $\bigl[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\bigr]^s$.

При каждом $j = 1, \dots, s$ оценим сверху соответствующее слагаемое в (2.1):

$$A_j \equiv \left| \int_0^h \vartheta^{-\sum\limits_{t=1}^{s}\frac{1}{r_t}} \int_{R^s} D^{r_j}_{x_j} f(x+y) M_j(y : \vartheta^{\frac{1}{r}})\, dy d\vartheta \right|$$

$$= \left| \int_0^h \vartheta^{-\sum\limits_{t=1}^{s}\frac{1}{r_t}} \int\limits_{x+\prod_{t=1}^{s}[-\frac{1}{2}\vartheta^{\frac{1}{r_t}}, \frac{1}{2}\vartheta^{\frac{1}{r_t}}]} D^{r_j}_{x_j} f(y)\, dy d\vartheta \right|$$

$$\le \int_0^h \vartheta^{-\frac{1}{p}\sum\limits_{t=1}^{s}\frac{1}{r_t}} \left(\int\limits_{x+\prod_{t=1}^{s}[-\frac{1}{2}\vartheta^{\frac{1}{r_t}}, \frac{1}{2}\vartheta^{\frac{1}{r_t}}]} \bigl| D^{r_j}_{x_j} f(y) \bigr|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее при $0 < \vartheta < 1$

$$\vartheta^{\frac{1}{r_t}} = \vartheta^{\frac{1}{r_t \varkappa_t} \cdot \varkappa_t} \le \vartheta^{b\varkappa_t},$$

где

$$b = \min_{\tau=1,\dots,s} \frac{1}{r_\tau \varkappa_\tau} = \frac{1}{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau}, \quad \frac{1}{r_t \varkappa_t} \ge \min_{\tau=1,\dots,s} \frac{1}{r_\tau \varkappa_\tau} = b,$$

так что

$$\prod_{t=1}^{s}\Big[-\frac{1}{2}\vartheta^{\frac{1}{r_t}},\frac{1}{2}\vartheta^{\frac{1}{r_t}}\Big]\subset\prod_{t=1}^{s}\Big[-\frac{1}{2}\vartheta^{b\varkappa_t},\frac{1}{2}\vartheta^{b\varkappa_t}\Big].$$

Поэтому в силу условия $D^{r_j}_{x_j}f\in W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\varkappa,\dots,\varkappa_s}((0,1)^s)$ имеем

$$A_j\le\int\limits_0^h\vartheta^{-\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}}\Bigg(\int\limits_{\prod\limits_{t=1}^{s}[-\frac{1}{2}\vartheta^{b\varkappa_t},\frac{1}{2}\vartheta^{b\varkappa_t}]}\big|D^{r_j}_{x_j}(y)\big|^p\,dy\Bigg)^{\frac{1}{p}}d\vartheta$$

$$\ll\int\limits_0^h\vartheta^{-\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}}\Phi\big(\vartheta^{\frac{|\varkappa|}{\max\limits_{\tau=1,\dots,s}r_\tau\varkappa_\tau}}\big)\,d\vartheta.\qquad(2.3)$$

Из (2.1)—(2.3) следует, что для почти всех $x\in(0,1)^s$ (обозначим множество, составленное из всех таких x, через U) выполнено неравенство

$$|f(x)-f_{h^{\frac{1}{r}}}(x)|\ll\int\limits_0^h\vartheta^{-\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}}\Phi\big(\vartheta^{\frac{|\varkappa|}{\max\limits_{\tau=1,\dots,s}r_\tau\varkappa_\tau}}\big)\,d\vartheta.\qquad(2.4)$$

Докажем непрерывность f. Поскольку $f\in W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}((0,1)^s)$ определена лишь с точностью до эквивалентности, на самом деле в теореме 1 утверждается эквивалентность f некоторой непрерывной на $[0,1]^s$ функции $\bar{f}$, что и будем доказывать.

Замена $\vartheta=\delta^{\frac{\max\limits_{\tau=1,\dots,s}r_\tau\varkappa_\tau}{|\varkappa|}}$ показывает, что интегралы

$$\int\limits_0^1\vartheta^{-\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}}\Phi\big(\vartheta^{\frac{|\varkappa|}{\max\limits_{\tau=1,\dots,s}r_\tau\varkappa_\tau}}\big)\,d\vartheta,\qquad\int\limits_0^1\delta^{\frac{\max\limits_{\tau=1,\dots,s}r_\tau\varkappa_\tau}{|\varkappa|}[1-\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}]}\Phi(\delta)\,\frac{d\delta}{\delta}$$

сходятся или расходятся одновременно, поэтому в силу условия (1.4) из (2.4) следует равномерная сходимость $f_{h^{\frac{1}{r}}}(x)$ к $f(x)$ на множестве U при $h\to+0$.

Согласно (2.2) функция $f_{h^{\frac{1}{r}}}(x)$ как свертка интегрируемой и бесконечно гладкой функций непрерывна на $[0,1]^s$ при всех $0<h\le h_0\le1$, поэтому $f(x)$ равномерно непрерывна на U как равномерный предел непрерывных функций.

Стало быть, функция $f(x)$ непрерывным образом продолжаема на замыкание $\bar{U}$, т. е. на $[0,1]^s$. Именно эта продолженная с U на $[0,1]^s$ функция и будет искомой непрерывной функцией $\bar{f}(x)$.

Достаточность в теореме 1 доказана.

Доказательство необходимости условий (1.2)–(1.4) для вложения (1.1) начнем с установления одного неравенства. Применяя неравенство Иенсена (см., например, [26, § 2.10])

$$\Bigg(\sum_{m=n}^{+\infty}b_m^{\beta}\Bigg)^{\frac{1}{\beta}}\le\Bigg(\sum_{m=n}^{+\infty}b_m^{\alpha}\Bigg)^{\frac{1}{\alpha}},\quad 0<\alpha<\beta<\infty,$$

для $0 < \theta \leq 1$, $\beta = \frac{1}{\theta} \geq 1 = \alpha$, $b_m = \rho_m^\theta$, $a > 1$ и сходящегося ряда $\sum \rho_m$ с неотрицательными членами, получим

$$\sum_{k=1}^\infty a^k \left(\sum_{m=k}^\infty \rho_m\right)^\theta = \sum_{k=1}^\infty a^k \left[\sum_{m=k}^\infty (\rho_m^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right]^\theta$$

$$\leq \sum_{k=1}^\infty a^k \sum_{m=k}^\infty \rho_m^\theta = \sum_{m=1}^\infty \rho_m^\theta \sum_{k=1}^m a^k \leq C \sum_{m=1}^\infty a^m \rho_m^\theta. \quad (2.5)$$

Пусть

$$\int_0^1 \delta^{\left(1-\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^s \frac{1}{r_j}\right)\frac{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau}{|\varkappa|}} \Phi(\delta)\,\frac{d\delta}{\delta} = +\infty. \quad (2.6)$$

Покажем, что тогда существует существенно неограниченная на $(0,1)^s$ функция $f \in W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}((0,1)^s)$. Условие (2.6) эквивалентно соотношению

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}}^{\frac{1}{2^{(k-1)|\varkappa|}}} \delta^{\left(1-\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^s \frac{1}{r_j}\right)\frac{\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau}{|\varkappa|}} \Phi(\delta)\,\frac{d\delta}{\delta}$$

$$\asymp \sum_{k=1}^\infty 2^{k(\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^s \frac{1}{r_j}-1)\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau} \Phi\left(\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right) = +\infty,$$

которое, в свою очередь, для

$$a = 2^{\left(\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^s \frac{1}{r_j}-1\right)\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau} > 1$$

(поскольку при условии $\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^s \frac{1}{r_j} \neq 1$ из (1.2) и (2.6) необходимо следует неравенство $\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^s \frac{1}{r_j} > 1$),

$$0 < \theta = \frac{1}{p} \leq 1, \quad \rho_m = \Phi^p\left(\frac{1}{2^{m|\varkappa|}}\right) - \Phi^p\left(\frac{1}{2^{(m+1)|\varkappa|}}\right)$$

в силу (2.5) влечет

$$\sum_{k=1}^\infty 2^{k\left(\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^s \frac{1}{r_j}-1\right)\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau} \left[\Phi^p\left(\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right) - \Phi^p\left(\frac{1}{2^{(k+1)|\varkappa|}}\right)\right]^{\frac{1}{p}} = +\infty. \quad (2.7)$$

Полагая

$$c_k = 2^{k\left(\left(\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^s \frac{1}{r_j}-1\right)\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau + |\varkappa|\right)} \left[\Phi^p\left(\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right) - \Phi^p\left(\frac{1}{2^{(k+1)|\varkappa|}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}, \quad (2.8)$$

$$y_k^{(j)} = \frac{2^{\varkappa_j - 1}}{2^{\varkappa_j} - 1} \cdot \frac{2^{\varkappa_j} + 1}{2^{\varkappa_j (k+1)}},$$

определим на $(0,1)^s$ функцию

$$g(t_1,\dots,t_s) = \sum_{k\geq 1} c_k \prod_{j=1}^s \omega\big(2^{k\varkappa_j + 1}(t_j - y_k^{(j)})\big), \quad (2.9)$$

$$\omega(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-z^2}} & \text{при } |z|<1,\\ 0 & \text{при остальных } z.\end{cases}$$

Отметим, что $\operatorname{supp}\omega(z)=[-1,1]$ и

$$\operatorname{supp}\omega\bigl(2^{k\varkappa_j+1}\bigl(t_j-y_k^{(j)}\bigr)\bigr)=\bigl[b_{k+1}^{(j)},b_k^{(j)}\bigr], \tag{2.10}$$

где

$$b_k^{(j)}=\frac{2^{\varkappa_j}}{(2^{\varkappa_j}-1)2^{\varkappa_j k}}\equiv\frac{d_j}{2^{\varkappa_j k}}, \tag{2.11}$$

поэтому члены функционального ряда (2.9) имеют носители, перекрывающиеся самое большее на множестве s-мерной меры 0. Далее,

$$\int\limits_{b_{k+1}^{(j)}}^{b_k^{(j)}}\omega\bigl(2^{k\varkappa_j+1}\bigl(t_j-y_k^{(j)}\bigr)\bigr)\,dt_j=\frac{1}{2^{k\varkappa_j+1}}\int\limits_{-1}^{+1}\omega(t_j)\,dt_j\asymp\frac{1}{2^{k\varkappa_j}}. \tag{2.12}$$

Из (2.9)–(2.12) следует, что

$$\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 g(t_1,\dots,t_s)\,dt_1\dots dt_s$$
$$=\sum_{k\geq1}\int\limits_{b_{k+1}^{(1)}}^{b_k^{(1)}}\cdots\int\limits_{b_{k+1}^{(s)}}^{b_k^{(s)}}g(t_1,\dots,t_s)\,dt_1\dots dt_s\asymp\sum_{k\geq1}c_k\frac{1}{2^{|\varkappa|k}}. \tag{2.13}$$

Подставляя в последний ряд (2.8), в силу (2.7) получим

$$\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 g(t_1,\dots,t_s)\,dt_1\dots dt_s$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}-1)\max\limits_{\tau=1,\dots,s}r_\tau\varkappa_\tau}\left[\Phi^p\left(\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right)-\Phi^p\left(\frac{1}{2^{(k+1)|\varkappa|}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}=+\infty. \tag{2.14}$$

Рассмотрим на $(0,1)^s$ функцию

$$f(x_1,\dots,x_s)=\int\limits_{x_1}^1\cdots\int\limits_{x_s}^1 g(t_1,\dots,t_s)\,dt_1\dots dt_s. \tag{2.15}$$

Из (2.14) следует, что функция f существенно неограниченная на $(0,1)^s$, поэтому она не может быть эквивалентна никакой равномерно непрерывной на $(0,1)^s$ функции.

Покажем, что $f\in W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}((0,1)^s)$. Из (2.15) следует

$$D_{x_1}^{r_1}f(x_1,\dots,x_s)=-\int\limits_{x_2}^1\cdots\int\limits_{x_s}^1 D_{x_1}^{r_1-1}g(x_1,t_2,\dots,t_s)\,dt_2\dots dt_s,$$

далее (см. (2.9))

$$
\begin{aligned}
&D_{x_1}^{r_1-1} g(x_1, t_2, \dots, t_s) \\
&\qquad = \sum_{k\ge1} c_k \prod_{j=2}^{s} \omega\bigl(2^{k\varkappa_j+1}\bigl(t_j - y_k^{(j)}\bigr)\bigr) D_{x_1}^{r_1-1} \omega\bigl(2^{k\varkappa_1+1}\bigl(x_1 - y_k^{(1)}\bigr)\bigr) \\
&\qquad = \sum_{k\ge1} c_k 2^{(k\varkappa_1+1)(r_1-1)} \omega^{(r_1-1)}\bigl(2^{k\varkappa_1+1}\bigl(x_1 - y_k^{(1)}\bigr)\bigr) \prod_{j=2}^{s} \omega\bigl(2^{k\varkappa_j+1}\bigl(t_j - y_k^{(j)}\bigr)\bigr).
\end{aligned}
$$

Конкретизируем x_1: пусть $b_{n+1}^{(1)} \le x_1 \le b_n^{(1)}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда (см. (2.10), (2.11))

$$
\begin{aligned}
D_{x_1}^{r_1-1} g(x_1, t_2, \dots, t_s) &= c_n 2^{(n\varkappa_1+1)(r_1-1)} \\
&\times \omega^{(r_1-1)}\bigl(2^{n\varkappa_1+1}\bigl(x_1 - y_n^{(1)}\bigr)\bigr) \prod_{j=2}^{s} \omega\bigl(2^{n\varkappa_j+1}\bigl(t_j - y_k^{(j)}\bigr)\bigr). \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Если для данных $x_2, \dots, x_s$ найдется $j_1 = 2, \dots, s$ такое, что $x_{j_1} > b_n^{(j_1)}$, то

$$
D_{x_1}^{r_1} f(x_1, x_2, \dots, x_s) = -\int_{x_2}^{1} \cdots \int_{x_s}^{1} D_{x_1}^{r_1-1} g(x_1, t_2, \dots, t_s)\, dt_2 \dots dt_s = 0.
$$

Поэтому для всех $j = 2, \dots, s$ полагаем $x_j \le b_n^{(j)}$.

Обозначим

$$
E_n = \prod_{j=1}^{s} \bigl[b_{n+1}^{(j)}, b_n^{(j)}\bigr] = \left[\frac{d_1}{2^{(n+1)\varkappa_1}}, \frac{d_1}{2^{n\varkappa_1}}\right] \times \dots \times \left[\frac{d_s}{2^{(n+1)\varkappa_s}}, \frac{d_s}{2^{n\varkappa_s}}\right]. \qquad (2.17)
$$

Тогда для всех $x = (x_1, \dots, x_s) \in E_n$ имеем (см. (2.16), (2.17) и (2.12))

$$
\begin{aligned}
\bigl|D_{x_1}^{r_1} f(x_1, x_2, \dots, x_s)\bigr| &\le \int_{x_2}^{1} \cdots \int_{x_s}^{1} \bigl|D_{x_1}^{r_1-1} g(x_1, t_2, \dots, t_s)\bigr|\, dt_2 \dots dt_s \\
&\ll c_n 2^{n\varkappa_1(r_1-1)} \|\omega^{(r_1-1)}\|_{L^\infty(-1,1)} \\
&\times \prod_{j=2}^{s} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega\bigl(2^{n\varkappa_j+1}\bigl(t_j - y_n^{(j)}\bigr)\bigr)\, dt_j \ll c_n 2^{n\varkappa_1(r_1-1)} \prod_{j=2}^{s} \frac{1}{2^{n\varkappa_j}} \\
&= c_n 2^{n\varkappa_1(r_1-1) - n(\varkappa_2 + \dots + \varkappa_s)} = c_n 2^{n\varkappa_1 r_1 - n|\varkappa|},
\end{aligned}
$$

или, в общем случае, для всех $x \in E_n$ и $j = 1, \dots, s$ получим

$$
\bigl|D_{x_j}^{r_j} f(x)\bigr| \ll c_n 2^{n \max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau - n|\varkappa|}. \qquad (2.18)
$$

Отсюда для любых $j = 1, \dots, s$ и $n \ge 1$

$$
\begin{aligned}
&\int_{b_{n+1}^{(1)}}^{b_n^{(1)}} \cdots \int_{b_{n+1}^{(s)}}^{b_n^{(s)}} \bigl|D_{x_j}^{r_j} f(x_1, x_2, \dots, x_s)\bigr|^p\, dx_1 \dots dx_s \\
&\qquad \ll c_n^p 2^{np \max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau} 2^{-np|\varkappa|} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{2^{n\varkappa_j}} = c_n^p 2^{np \max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau} 2^{-n|\varkappa|(p+1)},
\end{aligned}
$$

стало быть,

$$B_N \equiv \int_0^{\frac{1}{2^{\varkappa_1 N}}} \cdots \int_0^{\frac{1}{2^{\varkappa_s N}}} \left|D_{x_j}^{r_j} f(x_1, x_2, \dots, x_s)\right|^p dx_1 \dots dx_s$$

$$\ll \sum_{n \geq N} c_n^p 2^{np \max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau} 2^{-n|\varkappa|(p+1)}. \quad (2.19)$$

Из равенств $r_1\varkappa_1 = \dots = r_s\varkappa_s$ в (1.2) следует, что

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{r_j} \max_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau - \left(\sum_{j=1}^{s} \varkappa_\tau\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{r_j} - |\varkappa| = 0. \quad (2.20)$$

Отсюда и из (2.19) и (2.8) получаем

$$B_N \ll \sum_{n \geq N} 2^{np(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} - 1) \max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau} \cdot 2^{np|\varkappa|} \cdot 2^{np \max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau}$$

$$\times 2^{-n|\varkappa|(p+1)} \left[\Phi^p\left(\frac{1}{2^{n|\varkappa|}}\right) - \Phi^p\left(\frac{1}{2^{(n+1)|\varkappa|}}\right)\right]$$

$$= \sum_{n \geq N} 2^{n(\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}) \max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau} 2^{-n|\varkappa|} \left[\Phi^p\left(\frac{1}{2^{n|\varkappa|}}\right) - \Phi^p\left(\frac{1}{2^{(n+1)|\varkappa|}}\right)\right]$$

$$\ll \Phi^p\left(\frac{1}{2^{N|\varkappa|}}\right). \quad (2.21)$$

Тем самым если $E = \left[0, \frac{1}{2^{\varkappa_1 N}}\right] \times \dots \times \left[0, \frac{1}{2^{\varkappa_s N}}\right]$, то при $\tau = 1, \dots, s$ выполнено неравенство

$$\int_E \left|D_{x_\tau}^{r_\tau} f(x)\right|^p dx \ll \Phi^p(|E|). \quad (2.22)$$

Для установления включения $f \in W^{r_1,\dots,r_s}_{p,\Phi,\frac{1}{r_1},\dots,\frac{1}{r_s}}((0,1)^s)$ осталось доказать, что для всякого

$$E = \prod_{j=1}^{s} [y_j - \vartheta^{\varkappa_j}, y_j] \subset [0,1]^s$$

выполнено (2.22).

Доказательство разобьем на несколько случаев.

Если $(y_1, \dots, y_s) \in \left(b_{n+1}^{(1)}, b_n^{(1)}\right] \times \dots \times \left(b_{n+1}^{(s)}, b_n^{(s)}\right] \subset E_n$ и $E_{n+1} \subset E$, то

$$\frac{d_1 \dots d_s}{2^{(n+1)|\varkappa|}} \leq |E| \leq \frac{d_1 \dots d_s}{2^{n|\varkappa|}},$$

стало быть (см. также (2.21)),

$$\int_E \left|D_{x_\tau}^{r_\tau} f(x)\right|^p dx \leq \int_0^{\frac{1}{2^{\varkappa_1 n}}} \cdots \int_0^{\frac{1}{2^{\varkappa_s n}}} \left|D_{x_\tau}^{r_\tau} f(x_1, x_2, \dots, x_s)\right|^p dx_1 \dots dx_s$$

$$\ll \Phi^p\left(\frac{1}{2^{n|\varkappa|}}\right) \ll \Phi^p\left(\frac{1}{2^{(n+1)|\varkappa}}\right) \ll \Phi^p(|E|).$$

Если $(y_1,\dots,y_s)\in\big(b^{(1)}_{n+1},b^{(1)}_n\big]\times\dots\times\big(b^{(s)}_{n+1},b^{(s)}_n\big]\subset E_n$, но $E_{n+1}\not\subset E$ и $E_{n+1}\cap E\neq\varnothing$, то для некоторого $j=1,\dots,s$ выполнено

$$0<\vartheta^{\varkappa_j}<\frac{1}{2^{\varkappa_j n}}-\frac{1}{2^{\varkappa_j(n+2)}}=\frac{1}{2^{\varkappa_j n}}\left(1-\frac{1}{2^{2\varkappa_j}}\right),$$

т. е.

$$0<\vartheta<\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^{2\varkappa_j}}\right)^{\frac{1}{\varkappa_j}},$$

откуда

$$|E|=\vartheta^{|\varkappa|}\underset{\varkappa}{\ll}\frac{1}{2^{n|\varkappa|}}$$

и потому в силу (1.3)

$$2^{n|\varkappa|}\Phi^p\left(\frac{1}{2^{n|\varkappa|}}\right)\le C\frac{1}{|E|}\Phi^p(|E|). \tag{2.23}$$

Также для всех $k\ge n+2$ и всех $1\le k\le n-1$ выполнено теоретико-множественное равенство $E_k\cap E=\varnothing$.

Далее, из (2.18) и (2.8) при выполнении (2.20) для всех $x\in E_n$ получаем

$$\big|D^{r_\tau}_{x_\tau}f(x)\big|\le 2^{n\left(\frac{1}{p}\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}-1\right)\max\limits_{\tau=1,\dots,s}r_\tau\varkappa_\tau}\left[\Phi^p\left(\frac{1}{2^{n|\varkappa|}}\right)-\Phi^p\left(\frac{1}{2^{(n+1)|\varkappa|}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\times 2^{n\cdot\max\limits_{\tau=1,\dots,s}r_\tau\varkappa_\tau-n|\varkappa|}\ll 2^{n\cdot\frac{1}{p}|\varkappa|}\Phi^p\left(\frac{1}{2^{n|\varkappa|}}\right). \tag{2.24}$$

Из (2.23) и (2.24) вытекает

$$\int\limits_E\big|D^{r_\tau}_{x_\tau}f(x)\big|^p\,dx\ll|E|\sup_{x\in E}\big|D^{r_\tau}_{x_\tau}f(x)\big|^p\ll|E|\sup_{x\in E_n\cup E_{n+1}}\big|D^{r_\tau}_{x_\tau}f(x)\big|^p$$
$$\ll|E|2^{n|\varkappa|}\Phi^p\left(\frac{1}{2^{n|\varkappa|}}\right)\ll|E|\cdot\frac{1}{|E|}\Phi^p(|E|)=\Phi^p(|E|).$$

Если $(y_1,\dots,y_s)\in\big(b^{(1)}_{n+1},b^{(1)}_n\big]\times\dots\times\big(b^{(s)}_{n+1},b^{(s)}_n\big]\subset E_n$ и $E_{n+1}\cap E=\varnothing$, то для некоторого $j=1,\dots,s$ выполнено

$$0<\vartheta^{\varkappa_j}<\frac{1}{2^{\varkappa_j n}},$$

и потому повторяется предыдущий случай.

Остался случай, когда $(y_1,\dots,y_s)\notin E_n$ при всяком $n\ge1$. Тогда при некоторых j_1 из $1,\dots,s$ и $n_1\ge1$ выполнено неравенство

$$y_{j_1}>\frac{1}{2^{n_1\varkappa_{j_1}}}.$$

Если $y_{j_1}-\vartheta^{\varkappa_{j_1}}>\frac{1}{2^{\varkappa_{j_1}n_1}}$, то $E\cap(\operatorname{supp}f)=\varnothing$, и потому при всех $\tau=1,\dots,s$ имеем

$$\int\limits_E\big|D^{r_\tau}_{x_\tau}f(x)\big|^p\,dx=0\le\Phi^p(|E|).$$

Если $y_{j_1}-\vartheta^{\varkappa_{j_1}}\le\frac{1}{2^{\varkappa_{j_1}n_1}}$, то

$$\int\limits_E\big|D^{r_\tau}_{x_\tau}f(x)\big|^p\,dx=\int\limits_{E\cap\bigcup\limits_{k\ge n_1}E_k}\big|D^{r_\tau}_{x_\tau}f(x)\big|^p\,dx,$$

что сводится к рассмотренным выше случаям.

Таким образом, неравенство (2.22) доказано для всех множеств E из $T_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}$.

В соответствии с определением нормы Соболева — Морри осталось доказать неравенство

$$\frac{1}{\Phi(|E|)}\left(\int\limits_E |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \ll 1 \tag{2.25}$$

для тех же E.

Если

$$b^{(j)}_{m_j+1} < x_j \le b^{(j)}_{m_j}, \quad m_j = 1,2,\dots,\ j=1,\dots,s, \tag{2.26}$$

то

$$f(x_1,\dots,x_s) \le \sum_{k=1}^{\min\{m_1,\dots,m_s\}} c_k \frac{1}{2^{k|\varkappa|}}. \tag{2.27}$$

На самом деле в условиях (2.26) имеем

$$f(x_1,\dots,x_s) \le \int\limits_{b^{(1)}_{m_1+1}}^{1} \cdots \int\limits_{b^{(s)}_{m_s+1}}^{1} g(t_1,\dots,t_s)\,dt_1\dots dt_s$$

$$= \sum_{k\ge1} c_k \prod_{j=1}^{s} \int\limits_{b^{(j)}_{m_j+1}}^{1} \omega\bigl(2^{k\varkappa_j+1}\bigl(t_j - y^{(j)}_k\bigr)\bigr)\,dt_j.$$

Если для некоторого j_0 имеет место неравенство $k > m_{j_0}$, то (см. (2.10), (2.11))

$$\prod_{j=1}^{s} \int\limits_{b^{(j)}_{m_j+1}}^{1} \omega\bigl(2^{k\varkappa_j+1}\bigl(t_j - y^{(j)}_k\bigr)\bigr)\,dt_j = 0.$$

При всех оставшихся k, $1 \le k \le \min\{m_1,\dots,m_s\}$, в силу (2.12) получаем

$$\prod_{j=1}^{s} \int\limits_{b^{(j)}_{m_j+1}}^{1} \omega\bigl(2^{k\varkappa_j+1}\bigl(t_j - y^{(j)}_k\bigr)\bigr)\,dt_j \ll \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{2^{k\varkappa_j}} = \frac{1}{2^{k|\varkappa|}}.$$

В итоге в условиях (2.26) действительно выполнено неравенство (2.27).

Для всякого целого $N \ge 1$ из (2.26), (2.27) следует

$$\int\limits_0^{\frac{d_1}{2^{N\varkappa_1}}} \cdots \int\limits_0^{\frac{d_s}{2^{N\varkappa_s}}} f^p(x_1,\dots,x_s)\,dx_1\dots dx_s$$

$$= \sum_{m_1\ge N} \cdots \sum_{m_s\ge N} \int\limits_{\frac{d_1}{2^{(m_1+1)\varkappa_1}}}^{\frac{d_1}{2^{m_1\varkappa_1}}} \cdots \int\limits_{\frac{d_s}{2^{(m_s+1)\varkappa_s}}}^{\frac{d_s}{2^{m_s\varkappa_s}}} f^p(x_1,\dots,x_s)\,dx_1\dots dx_s$$

$$\ll \sum_{m_1\ge N} \cdots \sum_{m_s\ge N} \left(\sum_{k=1}^{\min\{m_1,\dots,m_s\}} c_k \frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right)^p \frac{1}{2^{m_1\varkappa_1+\dots+m_s\varkappa_s}}$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{m_j\ge N}\left\{\sum_{m_1\ge m_j}\cdots\sum_{m_{j-1}\ge m_j}\sum_{m_{j+1}\ge m_j}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\cdots\sum_{m_s\ge N}\left(\sum_{k=1}^{m_j}c_k\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right)^p\frac{1}{2^{m_1\varkappa_1+\dots+m_s\varkappa_s}}\right\}\right]\\
&\ll \sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{m_j\ge N}\left(\sum_{k=1}^{m_j}c_k\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right)^p\frac{1}{2^{m_j|\varkappa|}}\right]\ll\sum_{m\ge N}\left(\sum_{k=1}^{m}c_k\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right)^p\frac{1}{2^{m|\varkappa|}}. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Далее потребуется следующее неравенство (см. [3, § 21, п. 3]):

$$
\sum_{m\ge N}a^{-m}\left(\sum_{k=N}^{m}\rho_k\right)^{\theta}\ll\sum_{k\ge N}a^{-k}\rho_k^{\theta},
$$

где $a>1$, $\theta\ge 1$, $\rho_k\ge 0$, $k=1,2,\dots$. Полагая в нем $a=2^{|\varkappa|}$, $\theta=p$, $\rho_k=c_k\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}$, имеем (см. также (2.8))

$$
\begin{aligned}
\sum_{m\ge N}\left(\sum_{k=N}^{m}c_k\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right)^p\frac{1}{2^{m|\varkappa|}}&\le\sum_{k\ge N}c_k^p\frac{1}{2^{k|\varkappa|p}}\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\\
&=\sum_{k\ge N}\frac{1}{2^{k|\varkappa|(p+1)}}2^{kp[(\frac{1}{p}|\varkappa|-1)+|\varkappa|]}\left[\Phi^p\left(\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right)-\Phi^p\left(\frac{1}{2^{(k+1)|\varkappa|}}\right)\right]\\
&\ll\sum_{k\ge N}\frac{1}{2^{kp}}\left[\Phi^p\left(\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right)-\Phi^p\left(\frac{1}{2^{(k+1)|\varkappa|}}\right)\right]\\
&\ll\sum_{k\ge N}\left[\Phi^p\left(\frac{1}{2^{k|\varkappa|}}\right)-\Phi^p\left(\frac{1}{2^{(k+1)|\varkappa|}}\right)\right]\ll\Phi^p\left(\frac{1}{2^{N|\varkappa|}}\right). \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

Отсюда и из (2.28) вытекает выполнение (2.25) при $E=[0,d_1 2^{-N\varkappa_1}]\times\dots\times[0,d_s 2^{-N\varkappa_s}]$.

Общий случай $y=(y_1,\dots,y_s)$, $E_y=[y_1,y_1+d_1 2^{-N\varkappa_1}]\times\dots\times[y_s,y_s+d_s 2^{-N\varkappa_s}]\subset[0,1]^s$ выводится из доказанного. Действительно, в силу неравенств

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{E_y}f^p(x_1,\dots,x_s)\,dx_1\dots dx_s\\
&\qquad=\int\limits_{y_1}^{y_1+d_1 2^{-N\varkappa_1}}\cdots\int\limits_{y_s}^{y_s+d_s 2^{-N\varkappa_s}}\left|\int\limits_{x_1}^{1}\cdots\int\limits_{x_s}^{1}g(t)\,dt\right|^p dx_1\dots dx_s\\
&\qquad=\int\limits_{0}^{d_1 2^{-N\varkappa_1}}\cdots\int\limits_{0}^{d_s 2^{-N\varkappa_s}}\left|\int\limits_{x_1+y_1}^{1}\cdots\int\limits_{x_s+y_s}^{1}g(t)\,dt\right|^p dx_1\dots dx_s\\
&\qquad\le\int\limits_{0}^{d_1 2^{-N\varkappa_1}}\cdots\int\limits_{0}^{d_s 2^{-N\varkappa_s}}\left|\int\limits_{x_1}^{1}\cdots\int\limits_{x_s}^{1}g(t)\,dt\right|^p dx_1\dots dx_s\\
&\qquad\qquad\ll\Phi^p(|E|)=\Phi^p(|E_y|)
\end{aligned}
$$

получаем полное доказательство неравенства (2.25) и вместе с ним теоремы 1.

Замечание 2. Неравенство (2.29) с добавочным множителем $\frac{1}{2^{kp}}$ в сравнении с предельно точным (2.21), где такого «запаса» нет, еще раз подтверждает интуитивное правило «дифференцирование ухудшает, соответственно интегрирование улучшает свойства функций».

Доказательство теоремы 2. При доказательстве достаточности в теореме 1 условия (1.2) не использовались, поэтому при $\sum\limits_{j=1}^{s} \frac{1}{r_j} = p \geq 1$ получаем, что из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{2^n}\right) < +\infty \tag{2.30}$$

следует вложение

$$W^{r_1,\dots,r_s}_{\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j},\Phi,\varkappa_1,\dots,\varkappa_s}((0,1)^s) \subset C((0,1)^s). \tag{2.31}$$

Из доказательства необходимости в теореме 1 (до использования условий (1.2) и (2.20) в (2.21) и далее) получаем, что если найдется положительная последовательность $\{c_n\}$ такая, что

$$\sum_{n\geq 1} c_n \frac{1}{2^{|\varkappa| n}} = +\infty \tag{2.32}$$

и при $N \geq 1$

$$\sum_{n\geq N} c_n^p 2^{np(\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\varkappa_\tau - |\varkappa|)} \cdot 2^{-n|\varkappa|} \ll \Phi^p\left(\frac{1}{2^{N|\varkappa|}}\right), \tag{2.33}$$

то вложение (2.31) не имеет места.

Таким образом, доказательство теоремы 2 сводится к проверке выполнения (2.30)–(2.33) при $\Phi_\beta(\delta) = \log^{-\beta}\frac{1}{\delta}$, $\beta > 0$, $0 < \delta < 1$.

Условие (2.30) выполняется только при $\beta > 1$:

$$\sum_{n\geq 1} \Phi\left(\frac{1}{2^n}\right) \asymp \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\beta} < +\infty \leftrightarrow \beta > 1.$$

Определим c_n из обеспечивающего выполнение (2.33) равенства

$$c_n^p 2^{np(\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\varkappa_\tau - |\varkappa|)} \cdot 2^{-n|\varkappa|} = \frac{1}{n^{p\beta+1}},$$

откуда

$$\sum_{n\geq 1} c_n \frac{1}{2^{n|\varkappa|}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\varkappa_\tau} \cdot 2^{-n|\varkappa|} \cdot 2^{-n\frac{|\varkappa|}{p}} n^{\beta+\frac{1}{p}} \cdot 2^{n|\varkappa|}}$$
$$= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n(\max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\varkappa_\tau - \frac{|\varkappa|}{p})} \cdot n^{\beta+\frac{1}{p}}}. \tag{2.34}$$

Здесь для выполнения (2.32) необходимо

$$\max_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\varkappa_\tau \leq \frac{|\varkappa|}{p}. \tag{2.35}$$

Покажем, что всегда

$$\max_{\tau=1,\dots,s} r_\tau \varkappa_\tau \geq \frac{|\varkappa|}{p}, \tag{2.36}$$

причем равенство выполнено только в случае, если $r_1\varkappa_1 = \dots = r_\tau\varkappa_\tau$.

Действительно, обозначая $c \equiv \max\limits_{\tau=1,\dots,s} r_\tau\varkappa_\tau$, имеем

$$p\cdot c = \left(\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}\right)\cdot c \geq \left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\varkappa_j}{c}\right)\cdot c = \sum_{j=1}^{s}\varkappa_j = |\varkappa|,$$

т. е. (2.36) выполнено.

Если $r_1\varkappa_1 = \dots = r_\tau\varkappa_\tau$ не выполнено, т. е. $r_{\bar\tau}\cdot\varkappa_{\bar\tau} < c = \max r_\tau\varkappa_\tau$ при некотором $\bar\tau$, то

$$p\cdot c = \left(\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}\right)\cdot c > \left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\varkappa_j}{c}\right)\cdot c = |\varkappa|,$$

т. е. необходимое для расходимости ряда (2.34) условие (2.35) не выполнено.

Таким образом, расходимость ряда (2.34) равносильна расходимости ряда

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\beta+\frac{1}{p}}},$$

т. е. выполнению неравенства $\beta > 0$, $\beta + \frac{1}{p} \leq 1$.

Тем самым теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
2. *Morrey C. B.* On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. V. 43. P. 126–166.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
4. *Джумакаева Г. Т.* Критерий вложения класса Соболева — Морри $W^l_{p,\Phi}$ в пространство C // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 3. С. 399–406.
5. *Джумакаева Г. Т., Наурызбаев К. Ж.* О пространствах Лебега — Морри // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1982. № 5. С. 7–12.
6. *Джумакаева Г. Т.* О непрерывности гладких в смешанной норме функций // Тез. VII Межвузов. науч. конф. по математике и механике. Караганда, 1981. С. 19–20.
7. *Джумакаева Г. Т.* Об одной комбинации теорем вложения С. М. Никольского и Ч. Морри // Методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1982. С. 53–66.
8. *Наурызбаев К. Ж., Темиргалиев Н., Джумакаева Г. Т.* Критерий вложения классов Лебега — Морри в пространства Лоренца и смежные задачи // Вестн. Евраз. нац. ун-та им. Л. Н. Гумилева. 2012. № 6. С. 6–28.
9. *Yuan W., Sickel W., Yang D.* Morrey and Campanato meet Besov, Lizorkin and Triebel. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2010. (Lect. Notes Math.; V. 2005).
10. *8th Intern. conf.* on function spaces, differential operators, nonlinear analysis (FSDONA-2011), September 18–24, 2011, Tabarz/Thur. (Germany). http://fsdona2011.uni-jena.de/
11. *Haroske D. D., Skrzypczak L.* On Sobolev and Franke–Jawerth embeddings of smoothness Morrey spaces // Rev. Math. Comput. 2014. V. 27, N 2. P. 541–573.
12. *Rosenthal M., Triebel H.* Calderon–Zygmund operators in Morrey spaces // Rev. Math. Comput. 2014. V. 27, N 1. P. 1–11.
13. *Sawano Y., Hakim D. I., Gunawan H.* Non-smooth atomic decomposition for generalized Orlicz–Morrey spaces // Math. Nachr. 2015. V. 288, N 14–15. P. 1741–1775.

14. *Yuan W., Haroske D. D, Moura S. D., Skrzypczak L., Yang D. C.* Limiting embeddings in smoothness Morrey spaces, continuity envelopes and applications // J. Approx. Theory. 2015. V. 192. P. 306–335.

15. *Zhu Y. P., Yang Q. X., Li P. T.* Stability and Morrey spaces related to multipliers // Taiwanese J. Math. 2015. V. 19, N 3. P. 819–848.

16. *Ho K. P.* Atomic decomposition of Hardy–Morrey Spaces with variable exponents // Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 2015. V. 40, N 1. P. 31–62.

17. *Yuan W., Sickel W., Yang D. C.* Compact embeddings of radial and subradial subspaces of some Besov-type spaces related to Morrey spaces // J. Approx. Theory. 2013. V. 174. P. 121–139.

18. *Haroske D. D., Skrzypczak L.* Embeddings of Besov–Morrey spaces on bounded domains // Studia Math. 2013. V. 218, N 2. P. 119–144.

19. *Rosenthal M.* Local means, wavelet bases and wavelet isomorphisms in Besov–Morrey and Triebel–Lizorkin–Morrey spaces // Math. Nachr. 2013. V. 286, N 1. P. 59–87.

20. *Persson L.-E., Samko N., Wall P.* Calderon–Zygmund type singular operators in weighted generalized Morrey spaces // J. Fourier Anal. Appl. 2015. V. 22, N 2. P. 1–14.

21. *Deringoz F., Guliev V., Samko S.* Boundedness of maximal, potential and singular operators on generalized Orlicz–Morrey spaces // Oper. Theory, Adv. Appl. 2014. V. 242. P. 135–158.

22. *Chen Y., Ding Y., Wang X.* Compactness of commutators of Riesz potential on Morrey spaces // Potential Anal. 2009. V. 30, N 4. P. 301–313.

23. *Lu Y., Yang D., Yuan W.* Interpolation of Morrey spaces on metric measure spaces // Canad. Math. Bull. 2014. V. 57, N 3. P. 598–608.

24. *Соболев С. Л.* Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб. 1938. Т. 4, № 3. С. 471–497.

25. *Темиргалиев Н., Жайнибекова М. А., Джумакаева Г. Т.* Критерии вложения классов типа Морри // Изв. вузов. Математика. 2015. № 5. С. 80–85.

26. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Статья поступила 2 мая 2015 г.

Темиргалиев Нурлан, Жайнибекова Мехрибану Абдусадыковна,
Джумакаева Гульбаршин Тулегеновна
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
Институт теоретической математики и научных вычислений,
ул. Мунайтпасова, 11, Астана 010008, Казахстан
ntmath10@mail.ru, zhanbanukz@mail.ru, ntmath29@mail.ru