Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.55

ГОЛОМОРФНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ МНОГОЧЛЕНОВ

А. Л. Павлов

Аннотация. Приведены необходимые и достаточные условия голоморфной факторизации неприводимого многочлена $P(s, \lambda)$, $s \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, связанной с упорядочением вещественных частей корней уравнения $P(s, \lambda) = 0$, $s \in \Omega$.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.515

Ключевые слова: неприводимый многочлен, факторизация многочлена, голоморфная функция.

1. Введение

Под факторизацией многочлена $P(s, \lambda) = \sum\limits_{k=0}^{m} P_k(s)\lambda^k$, $s \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ в данной работе понимается его разложение на множители:

$$P(s, \lambda) = P_1(s, \lambda)P_2(s, \lambda), \quad s \in \Omega,$$

где $P_1(s, \lambda)$ и $P_2(s, \lambda)$ — многочлены по λ. Предполагается, что $P_m(s) \neq 0$ при $s \in \Omega$.

Наиболее распространенной в приложениях является факторизация, связанная с упорядочением вещественных или мнимых частей корней уравнения $P(s, \lambda) = 0$, $s \in \Omega$. Занумеруем λ-корни этого уравнения следующим образом:

$$\operatorname{Re} \lambda_1(s) \leq \operatorname{Re} \lambda_2(s) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_m(s).$$

Разделению этих корней на две группы $M_r^-(s) = \{\lambda_1(s), \dots, \lambda_r(s)\}$ и $M_r^+(s) = \{\lambda_{r+1}(s), \dots, \lambda_m(s)\}$ соответствует факторизация многочлена $P(s, \lambda)$, множителями которой являются многочлены

$$P_r^-(s, \lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j(s)) = \sum_{j=0}^{r} a_{rj}^-(s)\lambda^j,$$

$$P_r^+(s, \lambda) = P_m(s) \prod_{j=r+1}^{m} (\lambda - \lambda_j(s)) = P_m(s) \sum_{j=0}^{m-r} a_{rj}^+(s)\lambda^j,$$

в которых функции $a_{rj}^-(s)$ являются элементарными симметрическими функциями корней первой группы, а $a_{rj}^+(s)$ — второй группы, $a_{rr}^-(s) \equiv 1$, $a_{r,m-r}^+(s) \equiv 1$. В дальнейшем будет рассматриваться факторизация вида

$$P(s, \lambda) = P_r^-(s, \lambda)P_r^+(s, \lambda). \tag{1.1}$$

Пусть в области Ω группы корней $M_r^-(s)$ и $M_r^+(s)$ разделены, т. е. для всякой точки $s_0 \in \Omega$ существует два замкнутых контура в λ-плоскости, охватывающие корни соответственно из $M_r^-(s)$ и $M_r^+(s)$ для всех s из достаточно малой окрестности точки s_0. Тогда по классической лемме Гурса [1] коэффициенты многочленов $P_r^-(s,\lambda)$ и $P_r^+(s,\lambda)$ голоморфны в области Ω. Представляет интерес нахождение необходимых и достаточных условий голоморфной факторизации вида (1.1) в данной области. В настоящей работе доказано, что для неприводимых многочленов условие разделенности групп корней $M_r^-(s)$ и $M_r^+(s)$ является также необходимым условием голоморфной факторизации многочлена.

Основная теорема. *Факторизация неприводимого многочлена $P(s,\lambda)$ вида (1.1) голоморфна в точке s_0 тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Re}\lambda_r(s_0) < \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(s_0)$.

Наличие голоморфной факторизации позволяет использовать метод комплексного анализа для исследования различных задач, в которых появляется необходимость в разложении вида (1.1).

Голоморфная факторизация неприводимого многочлена $P(s,\lambda)$ вида (1.1) позволяет строить голоморфные решения уравнения

$$P(s,\lambda)v(s,\lambda) = f(s,\lambda), \quad s \in \Omega \subset \mathbb{C}^n,\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.2}$$

где $f(s,\lambda)$ — голоморфная функция в области $\Omega \times \mathbb{C}$, в виде суммы решений уравнений

$$P_r^-(s,\lambda)v_1(s,\lambda) = f_1(s,\lambda), \quad P_r^+(s,\lambda)v_2(s,\lambda) = f_2(s,\lambda), \tag{1.3}$$

где $f_1(s,\lambda), f_2(s,\lambda)$ — голоморфные функции в области $\Omega \times \mathbb{C}$. Из голоморфности коэффициентов многочленов $P_r^-(s,\lambda)$ и $P_r^+(s,\lambda)$ и приведенной теоремы следует, что λ-многочлены $P_r^-(s,\lambda)$ и $P_r^+(s,\lambda)$ взаимно просты при каждом $s \in \Omega$. Следовательно, существуют такие λ-многочлены $R^-(s,\lambda)$ и $R^+(s,\lambda)$, что выполняется равенство

$$P_r^-(s,\lambda)R^-(s,\lambda) + P_r^+(s,\lambda)R^+(s,\lambda) \equiv 1, \quad s \in \Omega,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Оно может быть получено при помощи алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя этих многочленов [2]. Отсюда следует, что коэффициенты λ-многочленов $R^-(s,\lambda)$ и $R^+(s,\lambda)$ голоморфны в области Ω.

Пусть $f_1(s,\lambda) = R^+(s,\lambda)f(s,\lambda)$, $f_2(s,\lambda) = R^-(s,\lambda)f(s,\lambda)$, а $v_1(s,\lambda)$ и $v_2(s,\lambda)$ являются решениями уравнений (1.3). Тогда функция $v(s,\lambda) = v_1(s,\lambda)+v_2(s,\lambda)$ является решением уравнения (1.2):

$$\begin{aligned} P(s,\lambda)v(s,\lambda) &= P_r^+(s,\lambda)P_r^-(s,\lambda)v_1(s,\lambda) + P_r^-(s,\lambda)P_r^+(s,\lambda)v_2(s,\lambda) \\ &= P_r^+(s,\lambda)R^+(s,\lambda)f(s,\lambda) + P_r^-(s,\lambda)R^-(s,\lambda)f(s,\lambda) = f(s,\lambda). \end{aligned}$$

Еще один способ применения указанной факторизации к построению решения уравнения (1.2) сводится к рассмотрению системы

$$\begin{cases} P_r^-(s,\lambda)v(s,\lambda) = u(s,\lambda), \\ P_r^+(s,\lambda)u(s,\lambda) = f(s,\lambda). \end{cases}$$

Приведенные описания применения голоморфной факторизации вида (1.1) для построения решения уравнения (1.2) могут быть использованы при применении преобразовании Фурье — Лапласа в теории линейных дифференциальных уравнений.

2. Вспомогательные результаты

Рассмотрим множество

$$N_r^\Omega = \{s \in \Omega : \operatorname{Re}\lambda_r(s) = \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(s)\}.$$

Множество N_r^Ω определяется однозначно выбором r и не зависит от неоднозначности нумерации корней уравнения $P(s,\lambda) = 0$ в тех точках, где существуют корни, имеющие равные вещественные части.

В точках множества $\Omega \setminus N_r^\Omega$ справедливо неравенство $\operatorname{Re}\lambda_r(s) < \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(s)$. Из этого неравенства следует, что в любой точке $\Omega \setminus N_r^\Omega$ группы корней $M_r^-(s)$ и $M_r^+(s)$ разделены. Стало быть, коэффициенты многочленов факторизации (1.1) определены однозначно в области $\Omega \setminus N_r^\Omega$ и голоморфны в ней. В основе доказательства основной теоремы лежит

Лемма 2.1. *Множество N_r^Ω не содержит изолированных точек.*

Доказательство. Пусть $s_0 \in N_r^\Omega$ и существует ее окрестность $U(s_0)$ такая, что $U(s_0) \cap N_r^\Omega = \{s_0\}$. Следовательно, в множестве $U(s_0) \setminus \{s_0\}$ справедливы неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda_1(s) \le \dots \le \operatorname{Re}\lambda_r(s) < \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(s) \le \dots \le \operatorname{Re}\lambda_m(s). \tag{2.1}$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $s \in \mathbb{C}$. Если в многомерном случае N_r^Ω содержит изолированную точку, то она будет изолированной точкой для аналогичного множества при сужении многочлена на одномерное комплексное пространство.

Рассмотрим область

$$W_\rho(s_0) = \{s : |s - s_0| < \rho\} \cap \{s : \operatorname{Im}(s - s_0) \ne 0, \text{ если } \operatorname{Re}(s - s_0) \ge 0\}.$$

Она состоит из точек круга с центром в точке s_0, кроме точек его радиуса, параллельного вещественной оси. При достаточно малом ρ в области $W_\rho(s_0)$ можно выделить голоморфные ветви $\gamma_1(s), \dots, \gamma_m(s)$ корней уравнения $P(s,\lambda) = 0$ [3].

Из гармоничности функций $\operatorname{Re}\gamma_k(s)$, $k = 1, \dots, m$, в области $W_\rho(s_0)$ следует существование точки $s_1 \in W_\rho(s_0)$, в которой выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}\gamma_{j_1}(s_1) < \dots < \operatorname{Re}\gamma_{j_k}(s_1) < \dots < \operatorname{Re}\gamma_{j_m}(s_1), \tag{2.2}$$

где $j_1, \dots, j_m$ — некоторая перестановка чисел.

Корни уравнения $P(s,\lambda) = 0$ в окрестности точки s_0 распадаются на круговые системы, в частности, состоящие из одного элемента, если точка s_0 регулярная.

Разложение вида

$$\gamma(s) = c_0 + c_1(s - s_0)^{1/k} + c_2[(s - s_0)^{1/k}]^2 + \dots,$$

где k — некоторое натуральное число, а $(s - s_0)^{1/k}$ — одна из ветвей корня k-й степени из $s - s_0$, представляют все корни одной круговой системы, состоящей из k элементов [3]. Для всех $s \in W_\rho(s_0)$ корни одной круговой системы принадлежат либо множеству $\{\lambda_1(s), \dots, \lambda_r(s)\}$, либо множеству $\{\lambda_{r+1}(s), \dots, \lambda_m(s)\}$. Это следует из того, что аналитическое продолжение одного элемента круговой системы вдоль замкнутых путей, охватывающих точку s_0, дает все элементы круговой системы, а вдоль этих путей выполняются неравенства (2.1).

Так как $s_0 \in N_r^\Omega$, найдутся такие голоморфные функции $\gamma_p(s)$ и $\gamma_q(s)$ в области $W_\rho(s_0)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\forall s \in W_\rho(s_0) \quad \gamma_p(s) \in \{\lambda_1(s), \dots, \lambda_r(s)\},\ \gamma_q(s) \in \{\lambda_{r+1}(s), \dots, \lambda_m(s)\}, \tag{2.3}$$

$$\forall s \in W_\rho(s_0) \quad \operatorname{Re}\gamma_p(s) < \operatorname{Re}\gamma_q(s), \tag{2.4}$$

$$\lim_{s\to s_0} \operatorname{Re}\gamma_p(s) = \lim_{s\to s_0} \operatorname{Re}\gamma_q(s). \tag{2.5}$$

Можно считать, что аналитические представления этих функций имеют вид

$$\gamma_p(s) = \alpha_0 + \alpha_1(s-s_0)^{1/k} + \alpha_2[(s-s_0)^{1/k}]^2 + \dots, \tag{2.6}$$

$$\gamma_q(s) = \beta_0 + \beta_1(s-s_0)^{1/\nu} + \beta_2[(s-s_0)^{1/\nu}]^2 + \dots. \tag{2.7}$$

Из равенства (2.5) следует, что $\operatorname{Re}\lambda_0 = \operatorname{Re}\beta_0$.

Покажем, что существует точка $s_2 \in W_\rho(s_0)$, в которой справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\gamma_p(s_2) > \operatorname{Re}\gamma_q(s_2). \tag{2.8}$$

Это противоречит неравенству (2.4). Следовательно, сделанное предположение об изолированности точки $s_0 \in N_r^\Omega$ неверно.

Для доказательства неравенства (2.8) покажем, что разность $\operatorname{Re}\gamma_p(s)$ $-\operatorname{Re}\gamma_q(s)$ принимает положительные значения в некоторых точках области $W_\rho(s_0)$ при подходящем выборе голоморфных ветвей $(s-s_0)^{1/k}$ и $(s-s_0)^{1/\nu}$ в представлениях (2.6) и (2.7). Заметим, что условия (2.3)–(2.5) инвариантны относительно замены элементов круговой системы другими ее элементами.

Используя разложение (2.6) и (2.7), функцию $\operatorname{Re}\gamma_p(s) - \operatorname{Re}\gamma_q(s)$ можно представить в виде

$$\operatorname{Re}\gamma_p(s) - \operatorname{Re}\gamma_q(s) = \operatorname{Re}(\mu[(s-s_0)^{1/t}]^\tau(1+f(s))), \tag{2.9}$$

где $t, \tau \in \mathbb{N}$, $f(s) = o([(s-s_0)^{1/t}]^\tau)$, $\mu \neq 0$. Это представление следует из равенств

$$\operatorname{Re}\gamma_p(s) = \operatorname{Re}\alpha_0 + \operatorname{Re}(\alpha_i[(s-s_0)^{1/k}]^i(1+f_1(s))),$$
$$\operatorname{Re}\gamma_q(s) = \operatorname{Re}\beta_0 + \operatorname{Re}(\beta_j[(s-s_0)^{1/\nu}]^j(1+f_2(s))),$$

где α_i, $i \geq 1$, и β_j, $j \geq 1$, — первые коэффициенты соответственно в (2.6) и (2.7), отличные от нуля, и

$$f_1(s) = o([(s-s_0)^{1/k}]^i), \quad f_2(s) = o([(s-s_0)^{1/\nu}]^j).$$

Рассмотрим функцию $h(s) = \mu[(s-s_0)^{1/t}]^\tau$. Ее значения можно записать в виде

$$h(s) = |\mu||s-s_0|^{\frac{\tau}{t}} e^{i(\varphi_1 + \frac{\varphi(s)+2\pi n}{t}\tau)}, \tag{2.10}$$

где $\varphi_1, \varphi(s)$ — одно из возможных значений соответственно $\arg\mu, \arg(s-s_0)$, n — произвольное натуральное число.

Из представления (2.10) следует, что в любой окрестности точки s_0 существует такая точка s_3, что $\operatorname{Re} h(s_3) > 0$. Тогда, пользуясь тем, что $f(s) = o([(s-s_0)^{1/t}]^\tau)$, можно выбрать на отрезке, соединяющем точки s_3 и s_0, такую точку s_2, что справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(\mu[(s_2-s_0)^{1/t}]^\tau(1+f(s))) > 0.$$

Следовательно, справедливо неравенство (2.8), а оно противоречит неравенству (2.4). $\square$

3. Доказательство основной теоремы

Как отмечалось, приведенное условие достаточно для голоморфной факторизации в точке s_0. Докажем его необходимость.

Пусть в s_0 факторизация вида (1.1) голоморфна и $\operatorname{Re}\lambda_r(s_0) = \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(s_0)$. Так как по условию многочлен $P(s,\lambda)$ неприводим, его дискриминант $\Delta(s)$ не равен тождественно нулю.

Предположим сначала, что $\Delta(s_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки s_0 существуют голоморфные ветви $\gamma_1(s),\dots,\gamma_m(s)$ корней уравнения $P(s,\lambda) = 0$ [4, добавление A1].

Из условия $\operatorname{Re}\lambda_r(s_0) = \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(s_0)$ следуют соотношения

$$\operatorname{Re}\lambda_1(s_0) \leq \dots < \operatorname{Re}\lambda_l(s_0) = \dots = \operatorname{Re}\lambda_p(s_0) < \dots \leq \operatorname{Re}\lambda_m(s_0), \tag{3.1}$$

где $l \leq r$, $p \geq r+1$ и $\operatorname{Im}\lambda_l(s_0) \leq \dots \leq \lambda_p(s_0)$.

Покажем, что функции вида $\Phi_k^-(s) = \lambda_1^k(s) + \dots + \lambda_r^k(s)$, $k \in \mathbb{N}$, не могут быть голоморфными, если выполняются соотношения (3.1) при любой нумерации корней $\lambda_l(s_0),\dots,\lambda_p(s_0)$. Но $\Phi_k^-(s)$ являются симметрическими функциями корней $\lambda_1(s),\dots,\lambda_r(s)$ и поэтому являются многочленами от элементарных симметрических функций этих корней, т. е. коэффициентов многочлена $P_r^-(s,\lambda)$. По предположению эти коэффициенты голоморфны в точке s_0 при некотором выборе нумерации корней $\lambda_l(s_0),\dots,\lambda_p(s_0)$. Следовательно, функции $\Phi_r^-(s)$ голоморфны в этой точке. Возникшее противоречие означает, что $\operatorname{Re}\lambda_r(s_0) \neq \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(s_0)$, если $\Delta(s_0) \neq 0$.

Из соотношений (3.1) следует существование такой перестановки $j_1,\dots,j_m$ чисел $1,\dots,m$, что выполнены соотношения

$$\varphi_{j_1}(s_0) \leq \dots < \varphi_{j_l}(s_0) = \dots = \varphi_{j_p}(s_0) < \varphi_{j_{p+1}}(s_0) \leq \dots \leq \varphi_{j_m}(s_0), \tag{3.2}$$

где $\varphi_k(s) = \operatorname{Re}\gamma_k(s)$, $k = 1,\dots,m$. Такая перестановка не определяется однозначно. Но эта неоднозначность несущественна для дальнейших рассуждений.

В любой достаточно малой окрестности точки s_0 существуют такие точка s_1 и перестановка $j'_1,\dots,j'_m$ чисел $1,\dots,m$, зависящая от выбора s_1 и однозначно ею определяемая, что справедливы неравенства

$$\varphi_{j'_1}(s_1) < \dots < \varphi_{j'_k}(s_1) < \dots < \varphi_{j'_m}(s_1). \tag{3.3}$$

Это следует из того, что множество, на котором совпадают значения двух плюригармонических функций, является множеством первой категории и его дополнение в любой окрестности точки s_0 открыто.

Точку s_1 возьмем в такой окрестности s_0, в которой выполняются неравенства $\varphi_{j_{l-1}}(s) < \varphi_{j_l}(s)$ и $\varphi_{j_p}(s) < \varphi_{j_{p+1}}(s)$. Из соотношений (3.2) вытекает, что такая окрестность точки s_0 существует.

По построению в некоторой окрестности точки s_1 справедливо равенство

$$\Phi_k^-(s)(s) = \lambda_1^k(s) + \dots + \lambda_r^k(s) = \gamma_{j'_1}^k(s) + \dots + \gamma_{j'_r}^k(s). \tag{3.4}$$

Из соотношений (3.2) следует, что среди индексов $j_l, j_{l+1},\dots,j_p$ найдется $r-l+1$ индексов, совпадающих с индексами $j'_l,\dots,j'_r$, и $p-r$ индексов, совпадающих с индексами $j'_{r+1},\dots,j'_p$. Так как функции $\varphi_{j_l}(s),\dots,\varphi_{j_p}(s)$ полигармонические в окрестности точки s_0 и $\varphi_{j_l}(s_0) = \dots = \varphi_{j_p}(s_0)$, в любой окрестности точки s_0 найдется такая точка s_2, что справедливы неравенства

$$\varphi_{j'_l}(s_2) < \dots < \varphi_{j'_{r-1}}(s_2) < \varphi_{j'_{r+1}}(s_2) < \varphi_{j'_r}(s_2) < \dots < \varphi_{j'_p}(s_2). \tag{3.5}$$

Доказательство этого факта основано на указанном свойстве полигармонических функций. В любой окрестности точки s_0 существует открытое множество, в котором $\varphi_{j'_l}(s) < \varphi_{j'_{l+1}}(s)$. В этом открытом множестве, для которого s_0 является граничной точкой, есть открытое подмножество, в котором $\varphi_{j'_l}(s) < \varphi_{j'_{l+1}}(s) < \varphi_{j'_{l+2}}$ и s_0 — граничная точка для него. Продолжая процесс, придем к неравенству (3.5). Следовательно, в некоторой окрестности точки s_2 имеет место равенство

$$\Phi_k^-(s) = \gamma_{j'_1}^k(s) + \dots + \gamma_{j'_{r-1}}^k(s) + \gamma_{j'_{r+1}}^k(s). \tag{3.6}$$

Из равенств (3.4), (3.6) и голоморфности функций $\Phi_k^-(s), \gamma_j(s),\ j = 1, \dots, m$, в рассматриваемой окрестности следует, что в ней $\gamma_{j'_r}(s) = \gamma_{j'_{r+1}}(s)$. Значит, $\gamma_{j'_r}(s_0) = \gamma_{j'_{r+1}}(s_0)$, что противоречит условию $\Delta(s_0) \neq 0$.

Пусть теперь $\Delta(s_0) = 0$. По условию многочлен $P(s, \lambda)$ неприводим. Следовательно, его дискриминант не равен нулю тождественно. Существует такая линейная замена переменных $s_1, \dots, s_n$, что в новых координатах $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ дискриминант $\Delta(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ при фиксированных $\zeta_2^0, \dots, \zeta_n^0$ как функция от ζ_1 обращается в нуль только в точке ζ_1^0 в некоторой ее окрестности, где $\left(\zeta_1^0; \dots; \zeta_n^0\right)$ — точка, соответствующая точке s_0.

Предположим, что факторизация (1.1) голоморфна в точке s_0. Тогда она голоморфна для многочлена $P(s(\zeta), \lambda)$ в точке ζ_0, а следовательно, и для многочлена, полученного «замораживанием» переменных $\zeta_2, \dots, \zeta_n$. Так как в некоторой окрестности точки ζ_1^0 дискриминант $\Delta\left(\zeta_1, \zeta_2^0, \dots, \zeta_n^0\right)$ многочлена $P(s(\zeta), \lambda)$ не обращается в нуль, кроме точки ζ_1^0, в каждой точке этой окрестности $\operatorname{Re}\lambda_r(s) < \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(s)$. Но тогда из леммы 2.1 следует, что $\operatorname{Re}\lambda_r(s_0) < \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(s_0)$. Теорема доказана. $\square$

Представляет интерес установление связи между голоморфной факторизацией и гладкой факторизацией, т. е. факторизацией, при которой коэффициенты множителей непрерывно дифференцируемы как функции вещественных переменных.

Теорема 3.1. *Факторизация неприводимого многочлена $P(s, \lambda)$ вида* (1.1) *голоморфна в области тогда и только тогда, когда она гладкая в этой области.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только голоморфность гладкой факторизации. Пусть есть факторизация $P(s, \lambda) = P_r^-(s, \lambda)P_r^+(s, \lambda)$ и коэффициенты многочленов $P_r^-(s, \lambda), P_r^+(s, \lambda)$ непрерывно дифференцируемы как функции от $\operatorname{Re} s_1, \operatorname{Im} s_1, \dots, \operatorname{Re} s_m, \operatorname{Im} s_m$ в окрестности точки s_0.

Пусть $U(s_0)$ — окрестность точки s_0, содержащаяся в области, в которой факторизация гладкая. Множество ее точек, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\lambda_r(s) = \operatorname{Re}\lambda_{r+1}(s)$, меры нуль. В противном случае уравнение $P(s, \lambda) = 0$ имеет кратные корни в некотором открытом множестве. Следовательно, дискриминант $\Delta(s)$ многочлена $P(s, \lambda)$ равен тождественно нулю, что противоречит неприводимости многочлена. На основании основной теоремы функции $a_{rj}^{\pm}(s)$ голоморфны почти всюду в $U(s_0)$. Поэтому почти всюду в $U(s_0)$ выполняются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial a_{rj}^{\pm}(s)}{\partial \bar{s}_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, n. \tag{3.7}$$

Из условия теоремы следует, что левые части этих уравнений непрерывны в $U(s_0)$. Следовательно, равенства (3.7) выполняются всюду в $U(s_0)$, и функции $a_{rj}^{\pm}(s)$

голоморфны в $U(s_0)$ [5], т. е. факторизация вида (1.1) голоморфна в произвольной точке рассматриваемой области. □

Дифференциальные свойства коэффициентов множителей в факторизации вида (1.1) зависят друг от друга. Факторизацию вида (1.1) будем называть *полуголоморфной* (*полугладкой*) в области Ω, если коэффициенты одного из сомножителей, голоморфные (гладкие) функции в этой области.

Теорема 3.2. *Полуголоморфная факторизация вида* (1.1) *в области голоморфна в этой области.*

Доказательство. Пусть коэффициенты многочлена $P_r^-(s,\lambda)$ голоморфны в области Ω. Из основной теоремы о симметрических многочленах следует, что степенные суммы $\Phi_k^-(s) = \lambda_1^k(s) + \dots + \lambda_r^k(s)$, $k = 1, 2, \dots$, голоморфны в области Ω. Тогда голоморфны в этой области и степенные суммы $\Phi_k^+(s) = \lambda_{r+1}^k(s) + \dots + \lambda_m^k(s)$, так как $\Phi_k^+(s) + \Phi_k^-(s) = \Phi_k(s) \equiv \lambda_1^k(s) + \dots + \lambda_m^k(s)$.

Из формул Ньютона [2], устанавливающих связь между степенными суммами и элементарными симметрическими функциями корней многочлена, вытекает, что голоморфными в рассматриваемой области будут и функции $a_{rk}^+(s)$, т. е. факторизация вида (1.1) голоморфна. □

Аналогичное утверждение справедливо для полугладкой факторизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гурса Э.* Курс математического анализа. М.; Л.: Гостехиздат, 1933. Т. II.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
3. *Фукс Б. А., Левин В. И.* Функции комплексного переменного и их приложения. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
4. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1986.
5. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 17 ноября 2014 г.

Павлов Александр Леонидович
Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 83055
alex4909@gmail.com