Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 514.763

СУБКОМПЛЕКСНЫЕ И СУБКЭЛЕРОВЫ СТРУКТУРЫ

Е. С. Корнев

Аннотация. Вводится понятие субкомплексной структуры на многообразии произвольной вещественной размерности, которое является обобщением понятия почти комплексной структуры на многообразиях четной вещественной размерности. Рассматриваются важные частные случаи псевдокомплексных структур: псевдотвисторные, аффинорные и субкэлеровы структуры. Показано, как с помощью субтвисторных и аффинорных структур можно получать субримановы и субкэлеровы структуры. Показано также, что все классические структуры: твисторные, кэлеровы и почти контактные метрические структуры, являются частными случаями субкомплексных структур. В основу теории положено использование вырожденной 1-формы или 2-формы с радикалом произвольной размерности.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.512

Ключевые слова: субкомплексная структура, аффинорная структура, субкэлерова структура, радикал полилинейной формы.

§ 1. Введение

В работе построена теория субкомплексных структур и рассмотрены важные частные случаи таких структур. Понятие субкомплексной структуры является обобщением понятия почти комплексной структуры для многообразий произвольной вещественной размерности с фиксированной вырожденной 2-формой с радикалом произвольного ранга. Под радикалом 2-формы понимается множество всех векторных полей на многообразии, на которых 2-форма вырождается.

В классической дифференциальной геометрии изучаются отдельно два случая: многообразия вещественной четной размерности и многообразия вещественной нечетной размерности. Для многообразий четной размерности определены понятия комплексной и почти комплексной структур, симплектической, кэлеровой и твисторной структур. Для многообразий нечетной размерности определены понятия контактной и почти контактной структур. Все эти структуры требуют наличия либо невырожденной 2-формы (четномерный случай), либо 1-формы, дифференциал которой имеет одномерный радикал (нечетномерный случай). Известные к настоящему времени результаты из римановой геометрии многообразий с симплектическими и контактными структурами приведены в [1]. Обобщением понятия контактной структуры для многообразий нечетной вещественной размерности является понятие почти контактных структур, где уже не требуется, чтобы радикал дифференциала 1-формы имел

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–9740.2016.1).

размерность 1. Обобщение понятия почти контактной метрической структуры для многообразий произвольной вещественной размерности, в самом общем случае для векторных расслоений, построено в [2]. Введенные в [2] структуры называются *аффинорными метрическими структурами.* В аффинорных метрических структурах используется 1-форма на векторном расслоении, дифференциал которой имеет нетривиальный радикал произвольного ранга. В [2] также были получены результаты, обобщающие известные классические результаты для контактных метрических структур на нечетномерных многообразиях для векторных расслоений произвольного ранга. Понятие аффинорной метрической структуры уже определяется для многообразий любой размерности, однако требует наличия незамкнутой 1-формы. Понятие субкомплексной структуры, которое вводим здесь, требует наличия уже произвольной вырожденной 2-формы на многообразии произвольной вещественной размерности. Здесь мы вводим понятие *субтвисторной структуры*, частными случаями которой являются аффинорные метрические структуры и классические твисторные структуры. Субтвисторная структура на многообразии M вещественной размерности $n \geq 2$ есть регулярная 2-форма Ω на M, фиксированная риманова метрика g на M и непрерывное поле эндоморфизмов касательных пространств, связывающее 2-форму Ω и метрику g. В случае, когда 2-форма Ω невырожденна, получаем классическую твисторную структуру, в случае, когда 2-форма Ω точна, — аффинорную метрическую структуру. Регулярная вырожденная 2-форма Ω на многообразии M задает разложение касательного расслоения TM в сумму Уитни расслоения радикалов 2-формы Ω и некоторого трансверсального расслоения D. Покажем, что расслоение D имеет четный ранг при любой размерности n многообразия M, что позволяет задавать на D комплексную структуру. Докажем, что в зависимости от геометрической структуры трансверсального расслоения D на многообразии M можно получать субримановы и субкэлеровы структуры. Также отдельно рассмотрим аффинорные метрические структуры и их важный частный случай: *К-аффинорные метрические структуры.* Для К-аффинорных метрических структур получим результаты, которые дают явную связь между субкомплексной структурой и ковариантной производной, соответствующей связности Леви-Чивиты, а также условия на секционную кривизну и кривизну Риччи в направлении характеристического векторного поля. Фактически получим обобщения результатов, приведенных в [1] для К-контактных метрических структур на К-аффинорные метрические структуры с радикалом произвольного ранга. Кроме того, покажем, что наличие на многообразии произвольной вещественной размерности субтвисторной структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой, говорит о том, что само многообразие является слоением и размерность слоев равна рангу радикала субтвисторной структуры. Более того, покажем, что субкэлеровы структуры на расслоениях с базой M позволяют легко получать кэлерову структуру на M.

Понятия субтвисторной и субкэлеровой структур естественно возникают в задаче построения кэлеровой структуры на базе расслоения в случае, когда на пространстве расслоения не существует кэлеровых структур. Фактически задача построения кэлеровой структуры на базе расслоения сводится к построению субкэлеровой структуры на пространстве расслоения. Таким образом, с помощью субкэлеровых структур можно получать кэлеровы структуры на фактор-многообразиях, однородных пространствах и орбитах действия групп Ли. В физике субтвисторные и аффинорные структуры возникают при вычислении интегралов, ассоциированных с векторными полями 1-форм по замкнутым кривым. А именно, если V — векторное поле на многообразии с нулевой первой группой гомологий (в частности, на $\mathbb{R}^n$), dr — векторное поле малого смещения и (V, dr) — скалярное произведение этих векторных полей, то определена 1-форма $\alpha = (V, dr)$. По формуле Стокса для любой замкнутой кривой C получаем, что $\int\limits_C \alpha = \int\limits_S d\alpha$, где S — двумерная поверхность с границей C. Отсюда следует, что $\int\limits_C \alpha \neq 0$ только тогда, когда кривая C касается распределения, трансверсального расслоению радикалов 2-формы $d\alpha$. Все это обуславливает интерес к изучению субтвисторных и субкэлеровых структур.

В § 2 изучим необходимые свойства радикала вырожденной 2-формы на многообразиях. В § 3 введем и опишем понятия субкомплексной и субтвисторной структур на многообразиях произвольной вещественной размерности. В § 4, 5 изложим важные элементы теории аффинорных метрических структур для многообразий, многие из которых в самом общем случае описаны в [2] для векторных расслоений. В § 6 введем и опишем субкэлеровы структуры. В данной работе мы активно используем результаты, полученные в [2, 3], а также аналогии с классическими результатами для симплектических, контактных и кэлеровых структур, которые можно найти в [1, 4, 5].

§ 2. Радикал дифференциальных форм

Пусть M — гладкое многообразие вещественной размерности $n \geq 3$. Будем обозначать внутреннее произведение векторного поля X на M и дифференциальной p-формы Ω на M через $\mathrm{I}_X \Omega = \Omega(X, .)$. Внешний дифференциал дифференциальной p-формы Ω будем обозначать через $d\Omega$. $\mathrm{I}_X \Omega$ есть дифференциальная $(p-1)$-форма, а $d\Omega$ есть дифференциальная $(p+1)$-форма. Будем обозначать скобку Ли векторных полей X и Y через $[X, Y]$, а действие векторного поля X на функцию f — через $X(f)$.

Определение 2.1. *Радикалом дифференциальной* 2*-формы* Ω на многообразии M в точке x называется векторное подпространство $\operatorname{rad} \Omega_x = \{v \in T_x M : \mathrm{I}_v \Omega_x = 0\}$.

Радикалом дифференциальной 1*-формы* α на многообразии M в точке x называется векторное подпространство $\operatorname{rad} \alpha_x = \{v \in T_x M : \mathrm{I}_v \, d\alpha_x = 0\}$.

2-Форма Ω или 1-форма α называется *регулярной*, если $\dim(\operatorname{rad} \Omega_x) = \mathrm{const}$, $\dim(\operatorname{rad} \alpha_x) = \mathrm{const}$ для любого $x \in M$.

Из определения 2.1 непосредственно вытекают следующие утверждения.

• 1-Форма α на гладком многообразии M является замкнутой тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad} \alpha = TM$.

• Внешняя 2-форма Ω на гладком многообразии вещественной четной размерности является невырожденной тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad} \Omega = \{0\}$.

• Распределение радикалов регулярной 1-формы или 2-формы является регулярным векторным расслоением.

Будем обозначать расслоение радикалов регулярной 2-формы Ω через $\operatorname{rad} \Omega$, а расслоение радикалов незамкнутой регулярной 1-формы α — через $\operatorname{rad} \alpha$. Заметим, что на двумерном многообразии любая внешняя 2-форма либо невырожденна, либо тождественно равна нулю.

Теорема 2.2. *Расслоение радикалов регулярной замкнутой внешней* 2*-формы* Ω *на многообразии* M *вещественной размерности* $n \geq 3$ *есть голономное* *распределение на M.*

Доказательство. Используя определение радикала 2-формы и инвариантное определение внешнего дифференциала, для любых векторных полей $X, Y \in \operatorname{rad}\Omega$ и $Z \in C^0(TM)$ имеем

$$0 = 6d\Omega(X,Y,Z) = X(\Omega(Y,Z)) - Y(\Omega(X,Z)) \\ + Z(\Omega(X,Y)) - \Omega([X,Y],Z) + \Omega([X,Z],Y) + \Omega([Y,Z],X) = -\Omega([X,Y],Z).$$

Получаем, что $[X,Y] \in \operatorname{rad}\Omega$, т. е. распределение $\operatorname{rad}\Omega$ инволютивно. Из теоремы Фробениуса следует, что распределение $\operatorname{rad}\Omega$ голономно.

Из определения радикала 1-формы и теоремы 2.2 получаем

Следствие 2.3. *Расслоение радикалов регулярной незамкнутой 1-формы на многообразии M вещественной размерности $n \geq 3$ есть голономное распределение на M.*

Важным свойством радикала внешней 2-формы является следующий факт.

Теорема 2.4. *Пусть r — ранг расслоения радикалов регулярной внешней 2-формы или регулярной незамкнутой 1-формы на многообразии размерности $n \geq 3$. Тогда*

(1) *Если n четно, то r четно и $0 \leq r \leq n-2$.*

(2) *Если n нечетно, то r нечетно и $1 \leq r \leq n-2$.*

Доказательство этой теоремы приведено в [3]. Поскольку разность любых двух чисел одинаковой четности всегда есть четное число, из теоремы 2.4 получаем

Следствие 2.5. *Любое векторное расслоение касательных подпространств, трансверсальное к расслоению радикалов регулярной ненулевой 2-формы или незамкнутой 1-формы на многообразии размерности $n \geq 3$, имеет четный ранг при любом n.*

На многообразии четной размерности примером 2-формы с радикалом минимального ранга является симплектическая структура. В этом случае ранг расслоения радикалов равен 0. На многообразии нечетной размерности примером 2-формы с радикалом минимального ранга является внешний дифференциал контактной структуры. В этом случае ранг расслоения радикалов равен 1. Будем говорить, что гладкие функции на многообразии M *линейно независимы всюду на M*, если их внешние дифференциалы являются 1-формами, линейно независимыми всюду на M. Следующий результат предоставляет пример многообразия, на котором существует 1-форма с радикалом максимального ранга.

Предложение 2.6. *Пусть M — гладкое многообразие вещественной размерности $n \geq 3$. Если на M существует пара гладких функций, линейно независимых всюду на M, то на M существует 1-форма с радикалом ранга $n-2$.*

Доказательство. Пусть f и h — гладкие линейно независимые на M функции. Поскольку 1-формы df и dh линейно независимы на M, они отличны от нуля в любой точке из M. В силу двойственности векторных полей и 1-форм на многообразии на M существуют линейно независимые в каждой точке векторные поля X_f и X_h такие, что $df(X_f) = 1$, $dh(X_h) = 1$, $df(X_h) = dh(X_f) = 0$. Поскольку коразмерность ядра любой всюду отличной от нуля 1-формы всегда равна 1, имеем

$$\dim(\ker(df) \cap \ker(dh)) = n - 2.$$

Рассмотрим 1-форму $\alpha = fdh$. Для любых векторных полей X и Y на M имеем

$$d\alpha(X,Y) = (df \wedge dh)(X,Y) = \frac{1}{2}\,(df(X)dh(Y) - df(Y)dh(X)).$$

Отсюда

$$d\alpha(X,Y) = 0 \quad \forall X \in \ker(df) \cap \ker(dh),\ Y \in C^0(TM).$$

Получаем, что $\ker(df) \cap \ker(dh) \subseteq \operatorname{rad}\alpha$. Поскольку $d\alpha \not\equiv 0$ во всех точках из M, α есть регулярная 1-форма на M. Из неравенств теоремы 2.4 получаем

$$\operatorname{rad}\alpha = \ker(df) \cap \ker(dh)$$

и $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha) = n - 2$.

Замечание 2.7. В [6] доказано, что если на многообразии M размерности n существует набор из $n - i + 1$ линейно независимых сечений расслоения 1-форм $\Lambda^1(M)$, то $w_i(M) = 0$, где $W_i(M)$ — i-й класс Штиффеля — Уитни многообразия M. Отсюда следует, что на многообразиях с ненулевым классом Штиффеля — Уитни w_{n-1} невозможно построить 1-форму с радикалом максимального ранга, как в доказательстве предложения 2.6.

Пусть $e(E)$ — класс Эйлера векторного расслоения E над многообразием M. Если на M существует всюду отличное от нуля сечение векторного расслоения E, то $e(E) = 0$ (см. [6]). Отсюда получаем необходимое условия существования на многообразии регулярной внешней 2-формы или регулярной незамкнутой 1-формы.

Предложение 2.8. *Если на многообразии M размерности ≥ 3 существует регулярная внешняя 2-форма или регулярная незамкнутая 1-форма, то $e(\Lambda^2(M)) = 0$.*

Если на многообразии M любая внешняя 2-форма может быть представлена как внешнее произведение двух 1-форм, то вопрос о существовании на M регулярной 2-формы с радикалом максимального ранга сводится к существованию на M двух всюду линейно независимых 1-форм. Отсюда получаем

Следствие 2.9. *Если на многообразии M размерности ≥ 3 любая внешняя 2-форма разложима и класс Эйлера многообразия M отличен от нуля, то на M не существует регулярных 2- и 1-форм.*

Замечание 2.10. Так же, как в доказательстве предложения 2.6, можно показать, что если на многообразии M размерности ≥ 3 существует пара линейно независимых в любой точке из M 1-форм, то внешнее произведение этих 1-форм дает регулярную 2-форму на M с радикалом максимального ранга.

§ 3. Субтвисторные структуры

Пусть M — гладкое многообразие вещественной размерности $n \geq 3$, Ω — регулярная вырожденная 2-форма на M и D — расслоение касательных подпространств, трансверсальное к $\operatorname{rad}\Omega$. В силу следствия 2.5 расслоение D имеет четный ранг при любом n. Будем называть расслоение D *рабочим расслоением.* На римановом многообразии рабочее расслоение можно однозначно задать как ортогональное дополнение к $\operatorname{rad}\Omega$ относительно выбранной римановой метрики.

Определение 3.1. *Субкомплексной λ-структурой* на многообразии M называется тройка (Ω, D, Φ), где Ω — регулярная внешняя 2-форма на M, D —

рабочее расслоение на M и Φ — непрерывное поле эндоморфизмов касательных пространств, обладающее следующими свойствами:

1) $\Phi|_{\mathrm{rad}\,\Omega} = \lambda\,\mathrm{id}$, где id — тождественный оператор, $\lambda = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$;

2) $\Phi^2|_D = -\,\mathrm{id}$;

3) $\Phi^*\Omega = \Omega \circ \Phi = \Omega$;

4) $\Omega(X, \Phi X) \geq 0\ \forall X \in D$.

Субкомплексная 0-структура называется *субкомплексной структурой.*

2-Форма Ω называется *фундаментальной* 2-*формой субкомплексной структуры.*

Заметим, что в п. 1 определения 3.1 id можно заменить любым линейным изоморфизмом расслоения $\mathrm{rad}\,\omega$. Однако поскольку это никак не влияет на свойства субкомплексной структуры, используем самый простой тождественный изоморфизм. Очевидно, что при $\mathrm{rad}\,\Omega = \{0\}$ субкомплексная структура есть классическая почти комплексная структура на M, положительно ассоциированная с 2-формой Ω. Из определения субкомплексной структуры и теоремы 2.2 вытекает

Следствие 3.2. *Пусть M — вещественное многообразие размерности ≥ 3 и на M существует субкомплексная λ-структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом ранга $r \geq 1$. Тогда M есть слоение и размерность слоев равна r.*

Как показано в § 2, необходимым условием существования на многообразии M субкомплексной структуры является условие, что класс Эйлера векторного расслоения $\Lambda^2(M)$ равен нулю. Заметим также, что ограничение поля эндоморфизмов Φ из определения 3.1 на рабочее расслоение D есть комплексная структура на распределении D. Одним из важных частных случаев субкомплексной структуры является субтвисторная структура.

Определение 3.3. *Субтвисторной структурой* на гладком многообразии M размерности ≥ 3 называется четверка (Ω, D, Φ, g), где Ω — регулярная внешняя 2-форма на M, D — рабочее расслоение на M, g — риманова метрика на M и Φ — непрерывное поле эндоморфизмов касательных пространств, обладающее следующими свойствами:

$$\Omega(X, Y) = g(\Phi X, Y) \quad \forall X, Y \in C^0(TM),$$
$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in D.$$

Нужно показать, что субтвисторная структура удовлетворяет всем условиям определения субкомплексной структуры.

Предложение 3.4. *Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, g) на многообразии M размерности ≥ 3 есть субкомплексная структура на M.*

Доказательство. Фактически нужно только показать, что поле эндоморфизмов Φ удовлетворяет всем условиям из определения 3.1. Сразу из определения 3.3 следует, что $\mathrm{rad}\,\Omega = \ker \Phi$, т. е. $\Phi|_{\mathrm{rad}\,\Omega} = 0$.

Поскольку 2-форма Ω невырожденна на рабочем расслоении D, для любых $X, Y \in D$ имеем

$$g(\Phi^2 X, Y) = \Omega(\Phi X, Y) = -\Omega(Y, \Phi X) = -g(\Phi Y, \Phi X) = -g(X, Y),$$

т. е. $\Phi^2 X = -X$ для любого $X \in D$. Это доказывает свойство 2. Свойства 3 и 4 непосредственно следуют из определения 3.3 и свойства 2.

В общем случае рабочее расслоение D субтвисторной структуры на многообразии M может быть как голономным, так и неголономным распределением на M. Когда рабочее расслоение является вполне неголономным распределением, субтвисторная структура $(\Omega, D, \varPhi, g)$ определяет на M субриманову структуру (D, g). Кроме того, ограничение метрики g на слои слоения M есть риманова структура на слоях. Таким образом, субтвисторная структура с вполне неголономным рабочим расслоением и замкнутой фундаментальной 2-формой индуцирует субриманову структуру на многообразии M и риманову структуру на слоях слоения M.

Следующий результат дает класс многообразий, на которых можно построить субтвисторную структуру.

Теорема 3.5. *Пусть $P \xrightarrow{\pi} M$ — главное расслоение над кэлеровым многообразием M комплексной размерности n, π — проекция $P \to M$ и многообразие P имеет вещественную размерность k. Тогда на многообразии P существует субтвисторная структура с радикалом ранга $k-2n$.*

Доказательство. Пусть (η, J, h) — кэлерова структура на многообразии M, где η — замкнутая невырожденная 2-форма на M, J — комплексная структура на M, сохраняющая 2-форму η, а h — кэлерова метрика на M. Пусть G — структурная группа главного расслоения P, а D — связность в главном расслоении P. Тогда в любой точке $u \in P$ имеет место разложение $T_uP = T_uG \oplus D_u$ (см. [5, гл. 2]). Выберем в качестве рабочего расслоения на многообразии P связность D и положим $\Omega = \eta \circ d\pi$, $\varPhi X = d\pi^{-1}(J(d\pi x))$ для любого $X \in C^0(TP)$. Тогда Ω есть регулярная 2-форма на P с радикалом $\operatorname{rad}\Omega = TG$, а $\varPhi$ есть поле эндоморфизмов, удовлетворяющее условиям 1–4 определения 3.1 при $\lambda = 0$.

Пусть β — риманова метрика на многообразии P. Такую метрику всегда можно построить для паракомпактных многообразий. Обозначим через A проекцию $TP \to TG$ и введем на многообразии P симметричные 2-формы $g_0 = h \circ d\pi$, $\beta_0 = \beta \circ A$. Тогда симметричная 2-форма $g = g_0 + \beta_0$ есть риманова метрика на многообразии P, удовлетворяющая условиям определения 3.3. Окончательно получаем, что четверка $(\Omega, D, \varPhi, g)$ есть субтвисторная структура на P с радикалом ранга $k-2n$.

Если P — расслоение вещественных ортогональных реперов над комплексным проективным пространством $\mathbb{C}p^n$, то размерность слоя этого расслоения равна $2n^2 - n$. Четность этого числа совпадает с четностью числа n. Получаем, что при нечетном n на многообразии P не может существовать твисторных структур, но существуют субтвисторные структуры. Следующий результат дает пример многообразия, на котором не существует субтвисторных структур.

Предложение 3.6. *На четырехмерной сфере S^4 не существует субкомплексных структур.*

Доказательство. В силу п. (2) теоремы 2.4 любая субкомплексная структура на сфере S^4 имеет либо радикал ранга 0, либо радикал ранга 2. Известно, что на S^4 не существует почти комплексных структур (см. [5, гл. 9]). Отсюда следует, что на S^4 не существует субкомплексных структур с радикалом ранга 0.

Предположим, что на S^4 существует субкомплексная структура $(\Omega, D, \varPhi)$ с радикалом ранга 2. В этом случае касательное расслоение $T(S^4)$ есть сумма Уитни векторных расслоений D и $\operatorname{rad}\Omega$ ранга 2. Обозначим через $p_1(M)$ первый класс Понтрягина многообразия M. Класс Понтрягина любого векторного расслоения ранга 2 всегда равен нулю. Для сферы S^4 первый класс Понтрягина не равен нулю. С другой стороны,

$$p_1(S^4) = p_1(D) \smile p_1(\operatorname{rad}\Omega) = 0,$$

что противоречит условию $p_1(S^4) \neq 0$. Отсюда следует, что на S^4 не существует субкомплексных структур с радикалом ранга 2.

Замечание 3.7. Любое вещественное многообразие нечетной размерности, на котором существует субтвисторная структура, является примером многообразия, не допускающего комплексную структуру, но допускающего субкомплексную структуру.

Важными частными случаями субтвисторной структуры являются субтвисторные структуры с точной фундаментальной 2-формой и с голономным рабочим расслоением. Такие субтвисторные структуры рассмотрим далее.

§ 4. Аффинорные метрические структуры

Пусть M — гладкое многообразие размерности ≥ 3 и (Ω, D, Φ, g) — субтвисторная структура на M. Если на M существует 1-форма $\alpha : d\alpha = \Omega$, то четверка (α, D, Φ, g) называется *аффинорной метрической структурой.* По аналогии с терминологией для контактных метрических структур в [1] поле эндоморфизмов Φ называется *аффинором*, ассоциированным с 1-формой α. Аффинорные метрические структуры на векторных расслоениях произвольного ранга изучены в [2]. Из свойства внешнего дифференциала $d^2 = 0$ и теоремы 2.2 получаем

Следствие 4.1. *Если на многообразии M вещественной размерности ≥ 3 существует аффинорная метрическая структура с радикалом ранга $r \geq 1$, то M есть слоение со слоями размерности r, а $\operatorname{rad}\alpha$ есть голономное распределение на M.*

Для аффинорной метрической структуры рабочее расслоение D в общем случае может быть как голономным, так и неголономным распределением. Класс аффинорных метрических структур с неголономным рабочим расслоением дает

Предложение 4.2. *Пусть (α, D, Φ, g) — аффинорная метрическая структура на многообразии M с нетривиальным радикалом и $D \subseteq \ker\alpha$. Тогда рабочее расслоение D является неголономным распределением на M.*

Доказательство. Предположим, что рабочее расслоение D голономно. Тогда по теореме Фробениуса распределение D инволютивно и $[X, Y] \in \ker\alpha$ для любых $X, Y \in D$. Используя инвариантное определение внешнего дифференциала 1-формы, для любых $X, Y \in D$ получаем

$$2d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = 0.$$

Поскольку $TM = D \oplus \operatorname{rad}\alpha$, то $d\alpha(X, Y) = 0$ для любых $X, Y \in C^0(TM)$. Но радикал замкнутой 1-формы есть TM, что противоречит условию нетривиальности $\operatorname{rad}\alpha$.

Если рабочее расслоение аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, g) на многообразии M является вполне неголономным распределением, то пара (D, g) есть субриманова структура на M. Простейшим примером аффинорной метрической структуры с вполне неголономным рабочим расслоением является контактная метрическая структура на многообразии нечетной размерности. Обобщая этот пример, получаем

Предложение 4.3. *Любая аффинорная метрическая структура* $(\alpha, D, \varPhi, g)$ *с нетривиальным радикалом на многообразии* M *произвольной размерности* ≥ 3 *такая, что* $[D, D] = \operatorname{rad}\alpha$, *задает на* M *субриманову структуру.*

Следующая теорема позволяет получить еще один класс примеров многообразий с аффинорной метрической структурой.

Теорема 4.4. *Пусть* $P \xrightarrow{\pi} M$ *— главное расслоение с проекцией* π *над кэлеровым многообразием* M *и фундаментальная 2-форма кэлеровой структуры на* M *точна. Тогда на* M *существует аффинорная метрическая структура с радикалом ранга* $k - 2n$, *где* k *— вещественная размерность многообразия* P *и* n *— комплексная размерность многообразия* M.

Доказательство. Пусть Ω — фундаментальная 2-форма кэлеровой структуры на многообразии M. Поскольку на M существует 1-форма η такая, что $d\eta = \Omega$, 1-форма $\alpha = \eta \circ d\pi$ есть регулярная незамкнутая 1-форма на многообразии P с радикалом ранга $k - 2n$. Далее, действуя, как в доказательстве теоремы 3.5, получаем рабочее расслоение D, аффинор $\varPhi$ и риманову метрику g на многообразии P. Теперь $(\alpha, D, \varPhi, g)$ есть аффинорная метрическая структура на многообразии P.

Замечание 4.5. Так как на любом компактном многообразии без границы фундаментальная 2-форма кэлеровой структуры задает класс когомологий $H^2(M, \mathbb{R})$, эта 2-форма не может быть точной. Поэтому для расслоений с компактной замкнутой базой невозможно получить аффинорную метрическую структуру с помощью теоремы 4.4. Более того, рабочее расслоение любой субтвисторной структуры с точной фундаментальной 2-формой либо неголономно, либо голономно, но все его интегральные подмногообразия некомпактны.

Поскольку нечетномерную сферу S^{2n+1} можно рассматривать как расслоение со слоем S^1 над $\mathbb{C}P^n$, по теореме Гузби — Янга на S^{2n+1} существует аффинорная метрическая структура с радикалом ранга 1. Это показывает, что в отличие от кэлеровых структур на компактных многообразиях без края могут существовать субтвисторные структуры с точной фундаментальной 2-формой.

В качестве последнего класса примеров многообразий с аффинорной метрической структурой приведем нильмногообразия. Пусть $M = G/H$ — нильмногообразие размерности ≥ 3, где G — нильпотентная группа Ли, действующая на M транзитивно и эффективно, H — дискретная подгруппа изотропии некоторого элемента $o \in M$. Поскольку любая левоинвариантная аффинорная метрическая структура на группе Ли G индуцирует G-инвариантную аффинорную метрическую структуру на однородном пространстве M, достаточно построить левоинвариантную аффинорную метрическую структуру на группе G. На любой нильпотентной группе Ли существует левоинвариантная почти комплексная структура. Нильпотентные группы Ли, допускающие левоинвариантную комплексную структуру, были классифицированы Саламоном в [7]. В частности, из [7] следует, что не любая нильпотентная группа Ли допускает левоинвариантную комплексную структуру. Покажем, что на любой нильпотентной группе Ли существует левоинвариантная субкомплексная структура.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G. Положим $C_0 = \mathfrak{g}$, $C_{k+1} = [C_k, \mathfrak{g}]$, где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X и Y в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентен, существует индекс s такой, что $[C_s, \mathfrak{g}] = 0$, т. е. C_s есть центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть α — незамкнутая левоинвариантная 1-форма на группе Ли G. Такая 1-форма всегда существует на нильпотентной группе Ли в силу существования нильпотентного базиса в пространстве $\mathfrak{g}^*$ (см. [7]). Так как центр алгебры Ли всегда лежит в радикале любой левоинвариантной 1-формы, 1-форма α имеет нетривиальный радикал. Обозначим через D ортогональное дополнение расслоения $\operatorname{rad}\alpha$ относительно некоторой левоинвариантной метрики g_0 на группе Ли G. На группе Ли всегда можно построить левоинвариантный аффинор Φ, ассоциированный с 1-формой α. Для этого достаточно построить комплексную структуру в векторном пространстве D_e, положительно ассоциированную с 2-формой $d\alpha|_D$. Здесь e — единица группы G. Зададим на группе G левоинвариантную симметричную 2-форму $\beta = g_0 \circ A$, где A — проекция $T_eG \to \operatorname{rad}\alpha_e$. Тогда симметричная 2-форма

$$g : g(X,Y) = d\alpha(X,\Phi Y) + \beta(X,Y) \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}$$

есть левоинвариантная риманова метрика на группе G со свойствами, как в определении 3.3. Получаем левоинвариантную аффинорную метрическую структуру (α, D, Φ, g) с нетривиальным радикалом. Таким образом, приходим к следующему результату.

Предложение 4.6. *На любом нильмногообразии размерности ≥ 3 существует инвариантная аффинорная метрическая структура, а следовательно, и субкомплексная структура с нетривиальным радикалом.*

Пусть (α, D, Φ, g) — аффинорная метрическая структура на многообразии M. Из теоремы Рисса о линейном функционале (см. [8]) следует, что на M существует векторное поле ξ такое, что $\alpha = \mathrm{I}_\xi\, g = \xi^*$. Это векторное поле называется *характеристическим векторным полем.* Аффинорная метрическая структура называется *строгой*, если ее характеристическое векторное поле лежит в радикале 1-формы α. Простейшим примером строгих аффинорных метрических структур являются контактные метрические структуры.

Замечание 4.7. Сразу из определения характеристического векторного поля для аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, g) следует, что во всех точках, в которых $\xi \neq 0$, будет $g(\xi,\xi) > 0$ и вектор ξ ортогонален $\ker\alpha$ относительно метрики g.

Характеристическое векторное поле позволяет определить важный класс аффинорных метрических структур — K-*аффинорные метрические структуры,* которые рассмотрим далее.

§ 5. K-аффинорные метрические структуры

Пусть M — гладкое многообразие размерности ≥ 3 с аффинорной метрической структурой. Будем обозначать производную Ли тензорного поля T на M вдоль векторного поля X через $\mathrm{L}_X\, T$. Известно, что векторное поле X на многообразии с римановой метрикой g киллингово тогда и только тогда, когда $\mathrm{L}_X\, g = 0$ (см. [4]).

Определение 5.1. Аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, g) с характеристическим векторным полем ξ называется K-*аффинорной*, если характеристическое векторное поле ξ киллингово, т. е. $\mathrm{L}_\xi\, g = 0$.

Будем отождествлять связность Леви-Чивиты на расслоении ортогональных реперов и ковариантную производную, соответствующую этой связности. Первым важным результатом для K-аффинорных метрических структур является

Теорема 5.2. *Пусть (α, D, Φ, g) — К-аффинорная метрическая структура на многообразии M с характеристическим векторным полем ξ и ∇ — связность Леви-Чивиты римановой метрики g. Тогда $\Phi = \nabla\xi$ на M.*

Доказательство этой теоремы для К-контактных метрических структур дано в [1], для К-аффинорных метрических структур — в [2]. Также в [2] доказан следующий результат.

Теорема 5.3. *Пусть (α, D, Φ, g) — К-аффинорная метрическая структура на многообразии M с характеристическим векторным полем ξ и ∇ — связность Леви-Чивиты метрики g. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *(α, D, Φ, g) является строгой аффинорной метрической структурой, т. е. $\xi \in \operatorname{rad}\alpha$;*

(2) *ξ является геодезическим векторным полем, т. е. $\nabla_\xi \xi = 0$;*

(3) *характеристическое векторное поле ξ имеет постоянную длину на M.*

Из п. (3) теоремы 5.3 следует, что если на многообразии M существует К-аффинорная метрическая структура, то на M существует векторное поле, отличное от нуля во всех точках из M. Отсюда вытекает, что класс Эйлера многообразия M должен быть равен нулю (см. [7]). Таким образом, получаем необходимое условие существования на многообразии К-аффинорной метрической структуры.

Предложение 5.4. *Если на многообразии M размерности ≥ 3 существует К-аффинорная метрическая структура, то многообразие M имеет нулевой класс Эйлера.*

Для контактных метрических структур доказано, что секционная кривизна в любом двумерном направлении, содержащем характеристическое векторное поле, равна единице. Докажем обобщение этого результата для аффинорных метрических структур с радикалом произвольного ранга.

Лемма 5.5. *Пусть (α, D, Φ, g) — К-аффинорная метрическая структура на многообразии M с характеристическим векторным полем ξ и ∇ — связность Леви-Чивиты метрики g. Обозначим через D_X непрерывное поле внутренних дифференцирований на M такое, что $D_X Y = [X, Y]$ для любого $Y \in C^1(TM)$. Тогда*

(1) *$g(D_\xi Y, Z) = -g(Y, D_\xi Z)$ для любых ортогональных векторных полей Y и Z на M;*

(2) *$\nabla_\xi X = \Phi X + D_\xi X$ для любого векторного поля X на M.*

Доказательство. Производную Ли метрики g можно выразить через скобки Ли векторных полей следующим образом (см. [4, 5]):

$$\mathrm{L}_X\, g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]).$$

В силу определения 5.1 для ортогональных векторных полей Y, Z и характеристического векторного поля ξ получаем

$$g(D_\xi Y, Z) = -g(Y, D_\xi Z).$$

Поскольку ∇ — риманова связность с нулевым кручением, из равенства

$$\nabla_\xi X - \nabla_X \xi - [\xi, X] = 0, \quad X \in C^1(TM),$$

и теоремы 5.2 получаем

$$\nabla_\xi X = \Phi X + D_\xi X$$

для любого векторного поля X.

Теорема 5.6. *Пусть* (α, D, Φ, g) — K-*аффинорная метрическая структура на многообразии* M *размерности* ≥ 3 *с характеристическим векторным полем* ξ *и* $k(\xi, X)$ — *секционная кривизна метрики* g *в направлении векторных полей* ξ *и* X. *Тогда* $k(\xi, X) = 1$, *если* $X \in D$, *и* $k(\xi, X) = 0$, *если* $X \in \operatorname{rad}\alpha$.

Доказательство. Так как $g(\xi, \xi) = \mathrm{const} > 0$, можно считать, что длина векторного поля ξ равна 1 во всех точках. Заметим, что для любого векторного поля $X \in C^0(TM)$ векторные поля ΦX и X ортогональны. Поскольку секционная кривизна не зависит от выбора базисных векторных полей, используя лемму 5.5 и теорему 5.2, для любого векторного поля X, ортогонального характеристическому векторному полю ξ, получаем

$$\begin{aligned} g(X,X)k(\xi,X) &= g(\nabla_{[\xi,X]}\xi, x) + g(\nabla_X\nabla_\xi\xi, X) - g(\nabla_\xi\nabla_X\xi, X) \\ &= g(\nabla_{D_\xi X}\xi, X) - g(\nabla_\xi \Phi X, X) = g(\Phi D_\xi X, X) - g(D_\xi \Phi X, X) - g(\Phi^2 X, X) \\ &= -g(D_\xi X, \Phi X) - g(D_\xi \Phi X, X) - g(\Phi^2 X, X) = -g(\Phi^2 X, X). \end{aligned}$$

Так как $\ker\Phi = \operatorname{rad}\alpha$ и $\Phi^2|_D = -\mathrm{id}$, при $X \in d$ получаем $k(\xi, X) = 1$, при $X \in \operatorname{rad}\alpha$ получаем $k(\xi, X) = 0$.

Поскольку для ортонормированного репера $\xi = e_1, e_2, \dots, e_n$, $n = \dim(M)$, кривизна Риччи в направлении характеристического векторного поля есть сумма $\sum_{k=2}^{n} k(e_1, e_k)$, считая, что базисные векторные поля $e_1, \dots, e_r$, $r = \dim(\operatorname{rad}\alpha)$ лежат в $\operatorname{rad}\alpha$, получаем

Следствие 5.7. *Пусть* (α, D, Φ, g) — K-*аффинорная метрическая структура на многообразии* M *размерности* $n \geq 3$ *с радикалом ранга* $r \geq 1$. *Тогда кривизна Риччи метрики* g *в направлении характеристического векторного поля* ξ *равна* $n - r$.

Поскольку кривизна Риччи эйнштейновой метрики имеет постоянный знак во всех направлениях, кривизна Риччи эйнштейновой K-аффинорной метрической структуры всегда положительна. По теореме Чигера — Громола (см. [4, гл. 6]) многообразие с римановой метрикой положительной кривизны Риччи компактно и имеет конечную первую фундаментальную группу. В силу следствия 5.7 получаем

Следствие 5.8. *Если многообразие* M *размерности* ≥ 3 *допускает* K-*аффинорную эйнштейнову метрическую структуру, то* M *компактно и имеет конечную первую фундаментальную группу.*

Замечание 5.9. Из следствия 5.7 также вытекает, что для K-аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, g) метрика g не может быть метрикой Калаби — Яу.

§ 6. Субкэлеровы структуры

Здесь рассмотрим субтвисторные структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой и голономным рабочим расслоением. Пусть M — вещественное многообразие размерности $n \geq 3$ и (Ω, D, Φ, g) — субтвисторная структура на M. В силу следствия 2.5 ранг распределения D равен $2r$. Если рабочее расслоение D голономно, то многообразие M является слоением, т. е. через каждую точку $x \in M$ проходит интегральное подмногообразие Q_x: $T_yQ_x = D_y$ для любого $y \in Q_x$. Внешняя 2-форма Ω невырожденна на подмногообразии Q_x.

Ограничение аффинора Φ на Q_x задает почти комплексную структуру J на подмногообразии Q_x, сохраняющую невырожденную 2-форму Ω.

Говорят, что почти комплексная структура J на многообразии Q размерности $2r$ *интегрируема*, если для любой точки $x \in Q$ существует открытая координатная окрестность U с вещественными координатами $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r)$ такими, что в любой точке из U выполняются условия Коши — Римана:

$$dy_k = J^* dx_k, \quad k = 1, 2, \dots, r. \tag{6.1}$$

При выполнении условий (6.1) комплексные координаты $z_k = x_k + iy_k, i = \sqrt{-1}$, в окрестности U согласованы с действием почти комплексной структуры на комплексификации распределения D: $D|_Q = TQ$. Интегрируемая почти комплексная структура является комплексной структурой на Q. Таким образом, Q становится комплексным подмногообразием в M. В случае замкнутой 2-формы Ω многообразие Q есть кэлерово подмногообразие в M. Кроме того, из теоремы 2.2 следует, что в случае замкнутой 2-формы Ω через любую точку $x \in Q$ проходит подмногообразие, ортогональное Q.

Определение 6.1. *Субкэлеровой структурой на вещественном многообразии* M называется субтвисторная структура $(\Omega, D, \varPhi, g)$ вместе с подмногообразием $Q \subset M$ такая, что $d\Omega = 0$ и Q — комплексное подмногообразие в M: $T_xQ = D_x$ в любой точке $x \in Q$, а ограничение аффинора $\varPhi$ на Q является интегрируемой почти комплексной, т. е. комплексной, структурой на Q.

Замечание 6.2. Из определения субкэлеровой структуры и теоремы Фробениуса следует, что субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и инволютивным рабочим расслоением определяет субкэлерову структуру, если ограничение аффинора на одно из интегральных подмногообразий для рабочего расслоения есть комплексная структура на этом подмногообразии.

Пример многообразия с субкэлеровой структурой позволяет получить следующий результат.

Предложение 6.3. *Пусть $P \xrightarrow{\pi} M$ — главное расслоение над комплексным многообразием M. Если на M существует кэлерова структура, а в главном расслоении P существует инволютивная связность, то на многообразии P существует субкэлерова структура.*

Доказательство. Пусть D — инволютивная связность в главном расслоении P. По теореме 3.5 на многообразии P существует субтвисторная структура $(\Omega, D, \varPhi, g)$ с инволютивным рабочим расслоением D. По теореме Фробениуса через каждую точку $x \in P$ проходит интегральное подмногообразие Q_x: $T_yQ_x = D_y$ для любого $y \in Q_x$. Пусть x_0 — фиксированная точка в P и $Q = \bigcup\limits_{x \in P} Q_x : Q_x \ni x_0$. Тогда Q есть подмногообразие четной размерности в P и $TQ = D|_Q$. Поскольку ограничение аффинора $\varPhi$ на подмногообразие Q изоморфно комплексной структуре на многообразии M, $\varPhi$ есть комплексная структура на Q. Теперь $(Q, \Omega, D, \varPhi, g)$ есть субкэлерова структура на P.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть M — вещественное многообразие размерности ≥ 3 и S — подмногообразие четной коразмерности, гладко действующее на M, т. е. каждой точке $x \in S$ сопоставлен гладкий эпиморфизм $R_X : M \mapsto M$. Пусть π — гладкая проекция $m \mapsto M/S$. Если на M существует субкэлерова структура с фундаментальной 2-формой Ω и $TS = \operatorname{rad} \Omega|_S$, то в M существует кэлерово подмногообразие Q, ортогональное S в каждой его точке.

Если индекс пересечения многообразий Q и S равен 1, то ограничение проекции π на Q задает диффеоморфизм $Q \mapsto M/S$ и M/S есть кэлерово многообразие. Это дает следующий способ получения кэлеровых структур на многообразиях с помощью субкэлеровой структуры на пространстве орбит.

Предложение 6.4. *Пусть P — пространство орбит действия гладкого многообразия S на вещественное гладкое многообразие M четной размерности. Тогда любая субкэлерова структура (Q, Ω, D, Φ, g) на P такая, что $TS = \operatorname{rad}\Omega|_S$ и индекс пересечения многообразий Q и S равен 1 в каждой точке, индуцирует кэлерову структуру на M.*

В [3] введено понятие нормальной аффинорной метрической структуры на группе Ли и показано, что любая левоинвариантная нормальная аффинорная метрическая структура на группе Ли порождает субкэлерову структуру. Заметим, что аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, g) с инволютивным рабочим расслоением D такова, что ограничение аффинора Φ на любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ порождает субкэлерову структуру с фундаментальной 2-формой $d\alpha$. Покажем, что строгая аффинорная метрическая структура не может индуцировать субкэлерову структуру.

Предложение 6.5. *Строгая аффинорная метрическая структура с нетривиальным радикалом на вещественном многообразии размерности ≥ 3 не порождает субкэлерову структуру.*

Доказательство. Предположим, что на многообразии M существует строгая аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, g) с характеристическим векторным полем $\xi \in \operatorname{rad}\alpha$ такая, что $(Q, d\alpha, D, \Phi, g)$ есть субкэлерова структура. Здесь Q — комплексное подмногообразие в M такое, что $TQ = D|_Q$. Из условия $\xi \in \operatorname{rad}\alpha$ и ортогональности распределений $\operatorname{rad}\alpha$ и D относительно метрики g следует, что $\alpha \equiv 0$ на Q и $TQ \subseteq \ker\alpha$. Используя эти условия и инвариантное определение внешнего дифференциала 1-формы, для любых векторных полей X, Y на Q получаем

$$2d\alpha(X, Y) = -\alpha([X, Y]) = 0.$$

Таким образом, $d\alpha = 0$ на Q. Для любой точки $x \in Q$ будет $T_xM = \operatorname{rad}\alpha_x \oplus D_x$. Имеем $d\alpha_x = 0$. Поскольку α — регулярная 1-форма, $d\alpha = 0$ на всем M, т. е. $\operatorname{rad}\alpha = TM$, что невозможно.

Особый класс субкэлеровых аффинорных структур составляют структуры, для которых ограничение характеристического векторного поля на подмногообразие Q является векторным полем на Q. Пример такой структуры приведен ниже.

Пусть Q — кэлерово многообразие, J — комплексная структура на Q, h — кэлерова метрика на Q, Ω — фундаментальная 2-форма кэлеровой метрики h и $H^2(Q, \mathbb{R}) = 0$. В этом случае на Q существует регулярная 1-форма α такая, что $d\alpha = \Omega$ и $\operatorname{rad}\alpha = \{0\}$.

Положим $M = Q \times R$, где R — риманово многообразие размерности k с римановой метрикой g_0. Продолжим 1-форму α до 1-формы на M, полагая $\alpha|_R = 0$. Тогда $\operatorname{rad}\alpha = TR$ на M. Зададим аффинор Φ на M следующим образом: $\Phi|_Q = J$, $\Phi|_R = 0$. Положим $D = (TQ, 0)$, $g = h + g_0$. Получаем субкэлерову структуру (Q, Ω, D, Φ, g).

Пусть ξ — характеристическое векторное поле на M и ξ' — проекция ξ на TR. Тогда для любого векторного поля $X \in C^1(TR)$

$$0 = \alpha(X) = g(\xi, X) = g_0(\xi', X).$$

Из невырожденности метрики g_0 на R следует, что $\xi' = 0$. Отсюда $\xi \in D = (TQ, 0)$. Обобщая этот пример, получаем

Предложение 6.6. *Если на многообразии Q существует кэлерова структура с точной фундаментальной 2-формой, то на многообразии $M = Q \times R$, где R — вещественное риманово многообразие размерности K, существует субкэлерова структура с радикалом ранга k.*

В силу замечания 4.5 в предложении 6.6 многообразие Q не может быть компактным многообразием без края. Однако многообразие R может быть компактным многообразием без края, как показывает следующий пример.

Пусть $G = \mathrm{E}(1) \rtimes \mathrm{SO}(n)$ — полупрямое произведение группы аффинных преобразований вещественной прямой $\mathbb{R}$ и специальной ортогональной группы. В алгебре Ли $\mathfrak{e}(1)$ существует базис e_1, e_2 такой, что $[e_1, e_2] = e_2$. Рассмотрим на G левоинвариантную 1-форму $\alpha = e_2^*$. Поскольку для любых $X \in \mathfrak{so}(n), Y \in \mathfrak{g}$ будет $[X, Y] \in \mathfrak{so}(n)$ и $\mathfrak{so}(n) \subset \ker\alpha$, получаем $\operatorname{rad}\alpha = \mathfrak{so}(n)$. Определим на подгруппе $\mathrm{E}(1)$ комплексную структуру J: $Je_1 = e_2$, $Je_2 = -e_1$, и кэлерову метрику g_0: $g_0(X, Y) = d\alpha(X, JY)$. Так как форма Киллинга — Картана B невырождена и отрицательно определена на группе $\mathrm{SO}(n)$, то $-B$ есть риманова метрика на $\mathrm{SO}(n)$. Полагая $\Phi|_{\mathrm{SO}(n)} = 0$, $\Phi|_{\mathrm{E}(1)} = J$, $D = (0, \mathfrak{so}(n))$, получаем субкэлерову структуру $(\mathrm{E}(1), d\alpha, D, \Phi, g_0 - B)$ на группе G с радикалом ранга $\frac{n^2-n}{2}$. При этом любое интегральное подмногообразие R такое, что $TR = \operatorname{rad}\alpha$, диффеоморфно группе $\mathrm{SO}(n)$, которая является компактным многообразием без края.

Пусть (Ω, D, Φ, g) — субтвисторная структура на M, $d\Omega = 0$ и J — ограничение аффинора Φ на D. Обозначим через $\mathbb{C}(D)$ комплексификацию рабочего расслоения D: $\mathbb{C}(D) = \mathbb{C} \otimes D$. Комплексная структура J на $\mathbb{C}(D)$ имеет два собственных значения $\pm i$. Обозначим распределение собственных подпространств, соответствующих собственному значению i, через $V_{(1,0)}$, а распределение собственных подпространств, соответствующих собственному значению $-i$, — через $V_{(0,1)}$. Эти распределения комплексно сопряжены в $\mathbb{C}(D)$ и выполняются разложения

$$\mathbb{C}(D) = V_{(1,0)} \oplus V_{(0,1)}, \quad \mathbb{C}(D^*) = V^*_{(1,0)} \oplus V^*_{(0,1)}.$$

Если $Q : D|_Q = TQ$ — интегральное подмногообразие в M, то J — почти комплексная структура на Q. Интегрируемость почти комплексной структуры J на Q эквивалентна условию, что распределения $V_{(1,0)}$ и $V_{(0,1)}$ инволютивны (см. [5, гл. 9]).

Если рабочее расслоение D инволютивно, то по теореме Фробениуса D голономно. Как показано выше, в этом случае в M существует почти кэлерово подмногообразие Q такое, что $D|_Q = TQ$. Если распределения $V_{(1,0)}$ и $V_{(0,1)}$ также инволютивны, то ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура на Q и Q становится кэлеровым подмногообразием. Это означает, что субтвисторная структура (Ω, D, Φ, g) порождает субкэлерову структуру (Q, Ω, D, Φ, g). Таким образом, получаем следующий итоговый результат.

Теорема 6.7. *Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, g) такая, что $d\Omega = 0$ на вещественном многообразии M размерности ≥ 3, порождает на M субкэлерову структуру тогда и только тогда, когда распределения $D, V_{(1,0)}, V_{(0,1)}$ на M инволютивны.*

Замечание 6.8. В теореме 6.7 распределение D считается вещественным, а распределения $V_{(1,0)}$ и $V_{(0,1)}$ считаются комплексными распределениями в $\mathbb{C}(D)$. Также расслоения $D, V_{(1,0)}, V_{(0,1)}$ можно рассматривать как аннуляторы соответствующих систем линейно независимых вещественных или комплексных 1-форм.

Замечание 6.9. Аффинорная метрическая структура с нетривиальным радикалом и рабочим расслоением D на многообразии M размерности ≥ 3 индуцирует на M почти субкэлерову структуру, когда распределение D голономно, и индуцирует на M субриманову структуру, когда распределение D вполне неголономно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blair D. E.* Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Boston: Birkhäuser, 2010.
2. *Корнев Е. С.* Аффинорные структуры на векторных расслоениях // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1283–1296.
3. *Корнев Е. С.* Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 107–123.
4. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна (в 2-х т.). М.: Мир, 1990.
5. *Кобаяси Ш., Намидзу К.* Основы дифференциальной геометрии (в 2-х т.). М.: Наука, 1981.
6. *Милнор Дж., Сташеф Дж.* Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
7. *Salamon S. M.* Complex structures on nilpotent Lie algebras // J. Pure Appl. Algebra. 2001. V. 157, N 2-3. P. 311–333.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 14 октября 2015 г.

Корнев Евгений Сергеевич
Кемеровский гос. университет,
кафедра фундаментальной математики,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043
q148@mail.ru