Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 517.957

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КРИЧЕВЕРА — НОВИКОВА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов, Б. Т. Сапарбаева

Аннотация. Изучаются коммутирующие дифференциальные операторы ранга два с полиномиальными коэффициентами. Доказано, что для любой фиксированной спектральной кривой вида $w^2 = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$ с произвольными коэффициентами c_i существуют коммутирующие несамосопряженные операторы порядков 4 и 6 с полиномиальными коэффициентами произвольной степени.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.510

Ключевые слова: коммутирующие дифференциальные операторы.

Посвящается А. П. Веселову в честь его 60-летия.

1. Введение

В статье изучаются пары коммутирующих дифференциальных операторов порядков 4 и 6 ранга два. Общий вид таких операторов в терминах специальных функций на эллиптической спектральной кривой найден И. М. Кричевером и С. П. Новиковым [1]. Оператор порядка 4 имеет вид

$$L_{KN} = \left(\partial_x^2 + V_1(x)\right)^2 + V_2(x)\partial_x + \partial_x V_2(x) + V_3(x), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} V_1(x) = &-\frac{1}{4c_x^2} + \frac{c_{xx}^2}{4c_x^2} + 2(\zeta(\gamma_0 + c) - \zeta(2c) - \zeta(\gamma_0 - c))c_x - \frac{c_{xxx}}{2c_x} \\ &+ c_x^2(2\wp(2c) - \wp(\gamma_0 + c) - \wp(\gamma_0 - c) - (\zeta(\gamma_0 + c) - \zeta(2c) - \zeta(\gamma_0 - c))^2), \end{aligned}$$

$$V_2(x) = c_x(\wp(\gamma_0 - c(x)) - \wp(\gamma_0 + c(x))), \quad V_3(x) = -(\wp(\gamma_0 - c(x)) + \wp(\gamma_0 + c(x))),$$

$\wp(z)$, $\zeta(z)$ — функции Вейерштрасса, $c(x)$ — произвольная функция, γ_0 — постоянная. Оператор L_{KN} коммутирует с оператором $\widetilde{L}_{KN}$ порядка 6. Эти операторы удовлетворяют тождеству

$$\widetilde{L}_{KN}^2 = 4L_{KN}^3 + g_2L_{KN} + g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbb{C}.$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00178–а), работа второго и третьего авторов выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14–11–00441).

Совместные собственные функции L_{KN} и $\widetilde{L}_{KN}$ образуют векторное расслоение ранга два над аффинной алгебраической (спектральной) кривой

$$w^2 = 4z^3 + g_2 z + g_3$$

(общую теорию операторов ранга больше 1 см. в [2]). Операторы L_{KN}, $\widetilde{L}_{KN}$ изучались в [3–11]. Примечательно, что операторы Кричевера — Новикова могут иметь полиномиальные коэффициенты. Первые примеры таких операторов были найдены Диксмье [12]:

$$L_D = \left(\partial_x^2 - x^3 - a\right)^2 - 2x, \quad \widetilde{L}_D = \left(\partial_x^2 - x^3 - a\right)^3 - \frac{3}{2}\left(x\left(\partial_x^2 - x^3 - a\right) + \left(\partial_x^2 - x^3 - a\right)x\right),$$

при этом $\widetilde{L}_D^2 = L_D^3 + a$.

П. Г. Гриневич [11] нашел условия, когда операторы Кричевера — Новикова имеют рациональные коэффициенты.

Теорема 1.1 [11]. *Пара коммутирующих операторов L_{KN}, $\widetilde{L}_{KN}$ с неособой алгебраической кривой Γ, определяемой уравнением $w^2 = P(z) = 4z^3 + g_2 z + g_3$, имеет рациональные коэффициенты тогда и только тогда, когда*

$$c(x) = \int\limits_{q(x)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

где $q(x)$ — произвольная рациональная функция. Если $\gamma_0 = 0$, $q(x) = x$ и $P(z) = 4z^3 + 4a$, то L_{KN}, $1/2\widetilde{L}_{KN}$ совпадают с операторами Диксмье L_D, $\widetilde{L}_D$.

Формально самосопряженные операторы с полиномиальными коэффициентами изучались в [13]. В этой статье мы изучаем общий (несамосопряженный) случай и показываем, что для любой эллиптической спектральной кривой существуют несамосопряженные операторы порядка 4 и 6 с полиномиальными коэффициентами произвольной степени. Основным результатом является

Теорема 1.2. *Для произвольной спектральной кривой Γ, заданной уравнением*

$$w^2 = F(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad c_i \in \mathbb{C},$$

произвольных $(z_0, w_0) \in \Gamma$, $w_0 \neq 0$, и произвольного целого $n \geq 1$ существуют полиномы

$$R = \delta_{2n+2} x^{2n+2} + \dots + \delta_0, \quad P = \beta_n x^n + \dots + \beta_0$$

с $\delta_{2n+2} \neq 0$, $\beta_n \neq 0$ такие, что оператор

$$L_4 = \left(\partial_x^2 + R\right)^2 + (4w_0 P_x)\partial_x + \partial_x(4w_0 P_x) - 16F(z_0)P^2 + 4F'(z_0)P - \frac{1}{2}F''(z_0) + z_0$$

коммутирует с оператором L_6 порядка 6 с полиномиальными коэффициентами. Спектральной кривой операторов L_4, L_6 является Γ.

Отметим, что операторы ранга три в случае эллиптических спектральных кривых найдены О. И. Моховым [14]. Было бы интересно найти среди этих операторов операторы с полиномиальными коэффициентами. Отметим также, что недавно получены новые результаты о коммутирующих операторах ранга больше 1 в случае спектральных кривых рода больше единицы (см. [15–24]).

2. Доказательство теоремы 1.2

Коэффициенты оператора L_{KN} выражены через функциональный параметр $c(x)$ с помощью функций Вейерштрасса (см. (1)). Такая параметризация не очень удобна для изучения операторов с полиномиальными коэффициентами. Для доказательства теоремы 1.2 понадобится другая параметризация через функциональный параметр коэффициентов L_{KN}.

Лемма 2.1. *Пусть* Γ — *кривая, заданная уравнением*

$$w^2 = F(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Тогда оператор

$$L_4 = \big(\partial_x^2 + R\big)^2 + (4w_0 P_x)\partial_x + \partial_x(4w_0 P_x) - 16F(z_0)P^2 + 4F'(z_0)P - \frac{1}{2}F''(z_0) + z_0, \quad (2)$$

где $(z_0, w_0) \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{W(x) + 2z_0 + c_2}, \\ R(x) &= \frac{1}{4P_x^2}\big(2P(x) - 16F(z_0)P^4(x) + 8F'(z_0)P^3(x) \\ &\quad - 2F''(z_0)P^2(x) + P_{xx}^2 - 2P_x P_{xxx}\big), \end{aligned} \quad (3)$$

$W(x)$ — *произвольная гладкая функция, коммутирует с некоторым оператором шестого порядка* L_6. *При этом спектральной кривой* L_4 *и* L_6 *является* Γ.

Доказательство. Рассмотрим коммутирующие формально самосопряженные операторы $\widetilde{L}_4$, $\widetilde{L}_6$ порядков 4 и 6 со спектральной кривой Γ. Оператор $\widetilde{L}_4$ может быть записан в виде

$$\widetilde{L}_4 = \big(\partial_x^2 + V(x)\big)^2 + W(x).$$

Тогда $V(x)$ выражается через $W(x)$ следующим образом:

$$V(x) = \frac{-16F\big(-\frac{1}{2}(c_2 + W)\big) + W_{xx}^2 - 2W_x W_{xxx}}{4W_x^2}$$

(см., например, [22] или [4]). Оператор $\widetilde{L}_4 - z_0$ разлагается на множители следующим образом (см. [22]):

$$\widetilde{L}_4 - z_0 = \big(\partial_x^2 + V(x)\big)^2 + W(x) - z_0 = \big(\partial_x^2 + \chi_1\partial_x + \chi_2\big)\big(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0\big), \quad (4)$$

где

$$\chi_0 = -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V, \quad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q}, \quad \chi_2 = \frac{3Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - \frac{Q_x^2}{Q^2} + V,$$
$$Q = z_0 + \frac{1}{2}(W + c_2).$$

При этом

$$\widetilde{L}_6 - w_0 = l_4\big(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0\big), \quad (5)$$

где l_4 — некоторый оператор четвертого порядка. По теореме Лазама — Превиато [6, следствие 2] несамосопряженные операторы Кричевера — Новикова могут быть получены из формально самосопряженных операторов $\widetilde{L}_4 - z_0$ и $\widetilde{L}_6 - w_0$ с помощью преобразования Дарбу, т. е. перестановкой множителей в (4) и (5):

$$L_4 = \big(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0\big)\big(\partial_x^2 + \chi_1\partial_x + \chi_2\big) + z_0, \quad L_6 = \big(\partial_x^2 - \chi_1\partial_x - \chi_0\big)l_4 + w_0.$$

Прямыми вычислениями можно убедиться, что L_4 принимает вид (2). $\square$

Далее предполагаем, что $w_0 \neq 0$ (иначе L_4 формально самосопряженный).

Лемма 2.2. *Оператор L_4 имеет полиномиальные коэффициенты тогда и только тогда, когда $P(x)$ и $R(x)$ — полиномы.*

Доказательство. Если P и R — полиномы, то очевидно, что L_4 имеет полиномиальные коэффициенты. Покажем обратное утверждение. Для этого перепишем L_4 в следующем виде:

$$L_4 = \partial_x^4 + a_2(x)\partial_x^2 + a_1(x)\partial_x + a_0(x),$$

где из (2) следует, что

$$a_2 = 2R = \frac{1}{2P_x^2}(2P(x) - 16F(z_0)P^4(x) + 8F'(z_0)P^3(x) - 2F''(z_0)P^2(x) + P_{xx}^2 - 2P_xP_{xxx}),$$

$$a_1 = 2R_x + 8w_0P_x.$$

Следовательно, $a_{2x} - a_1 = 8w_0P_x$. Таким образом, если a_1 и a_2 — полиномы, то и P_x — полином, а значит, и P — полином. $\square$

Из (3) следует, что

$$4P_x^2R = 2P - 16F(z_0)P^4 + 8F'(z_0)P^3 - 2F''(z_0)P^2 + P_{xx}^2 - 2P_xP_{xxx}. \tag{6}$$

Далее предполагаем, что P, R — полиномы вида

$$R = \alpha_{2n+2}^2x^{2n+2} + \dots + \alpha_0^2, \quad P = \beta_nx^n + \dots + \beta_0, \quad \alpha_{2n+2} \neq 0,\ \beta_n \neq 0. \tag{7}$$

Теорема 2.1. *Для любого $n > 0$ существует решение уравнения* (6) *вида* (7).

Доказательство. Продифференцируем обе части (6) по x, а затем разделим на P_x. Получим

$$32F(z_0)P^3 + 4RP_{xx} + 2R_xP_x - 12F'(z_0)P^2 + 2F''(z_0)P + P_{xxxx} - 1 = 0. \tag{8}$$

Уравнение (6) эквивалентно системе уравнений: уравнению (8) и уравнению на свободный член в (6):

$$2\alpha_0^2\beta_1^2 = \beta_0 - 8F(z_0)\beta_0^4 + 4F'(z_0)\beta_0^3 - F''(z_0)\beta_0^2 + 2\beta_2^2 - 6\beta_1\beta_3. \tag{9}$$

Уравнение (8) эквивалентно системе из $3n+1$ уравнений с $3n+4$ переменными α_i, β_j. Заметим, что все уравнения имеют степень 3 и множество их решений состоит из точек в $\mathbb{C}^{3n+4}$ (с координатами α_i, β_j), которые лежат в пересечении $3n+1$ кубик, заданных этими уравнениями. По теореме 7.2 из [25, гл. 1] пересечение X этих кубик с квартикой (9) в $\mathbb{P}^{3n+4}$ (с однородными координатами α_i, β_j, u) непусто и каждая его неприводимая компонента имеет размерность, большую или равную 2. По этой же причине пересечение X с гиперплоскостью $Z = \{u = 0\}$ на бесконечности непусто и каждая его неприводимая компонента имеет размерность, большую или равную 1.

Для доказательства утверждения достаточно доказать, что для любого фиксированного $n > 0$ существует одномерная неприводимая компонента $X \cap Z$. Из этого факта можем заключить, что аффинная часть пересечения X непуста (на самом деле увидим, что эта аффинная часть содержит точку с ненулевыми координатами α_{2n+2} и β_n).

Однородные части наших уравнений в $\mathbb{P}^{3n+4}$, которые не зависят от u, могут быть легко записаны: для уравнения (8) это в точности коэффициенты при x^i уравнения

$$KP^3 + 4RP_{xx} + 2R_xP_x = 0, \tag{10}$$

где $K = 32F(z_0)$, и для уравнения (9) это

$$\alpha_0^2\beta_1^2 + 4F(z_0)\beta_0^4 = 0. \tag{11}$$

Следующим наблюдением является то, что уравнения (10) всегда имеют решения вида

$$O = (\alpha_{2n+2} \neq 0 : \beta_n \neq 0 : 0 : \cdots : 0), \quad \text{т. е. } R = \alpha_{2n+2}^2 x^{2n+2},\ P = \beta_n x^n$$

для любого $n > 0$. Поэтому можно положить, например, $\beta_n = 1$, $\alpha_{2n+2} = i\sqrt{K}/(\sqrt{8}n)$.

Докажем, что для любого фиксированного $n > 0$ любая неприводимая компонента $X \cap Z$, содержащая O, имеет размерность 1. Рассмотрим открытую аффинную окрестность O: $\beta_n = 1$, и пересечение $X \cap Z$ с аффинной гиперплоскостью $\beta_0 = 0$. Так как пересечение содержит ту же точку O, оно непусто, поэтому каждая его неприводимая компонента имеет размерность, большую или равную нулю. Докажем что это пересечение содержит в точности две точки: O и $O' = (-\alpha_{2n+2} : 1 : 0 \cdots : 0)$ (а следовательно, все неприводимые компоненты $X \cap Z$, содержащие O, имеют размерность один).

Из (11) следует, что либо $\alpha_0 = 0$, либо $\beta_1 = 0$. Если $\beta_0 = \beta_1 = 0$, то из уравнения (10) вытекает, что $\alpha_0 = 0$. С другой стороны, можно рассмотреть (10) как обыкновенное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами на функцию $R(x)$. Решением этого уравнения является

$$R = \frac{-KP^4/8 + C}{P_x^2}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Так как $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, постоянная C должна быть нулем. Но тогда P должно делиться на P_x, т. е. $P = x^n$, ибо $\beta_n = 1$ и $\beta_0 = 0$. Поэтому имеется только одно решение (P, R) у (10) и только два решения O, O' у соответствующих однородных уравнений.

Это означает что имеется точка в аффинной карте $u \neq 0$ в X, которая близка к O, т. е. ее координаты α_{2n+2} и β_n ненулевые. $\square$

Замечание 2.1. Практически дословно таким же способом можно дать более короткое доказательство теоремы 1.1 в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 6. С. 47–68.
2. *Кричевер И. М.* Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12, № 3. С. 20–31.
3. *Гриневич П. Г., Новиков С. П.* О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 25–26.
4. *Grunbaum F.* Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six // Phys. D. 1988. V. 31, N 3. P. 424–433.
5. *Latham G.* Rank 2 commuting ordinary differential operators and Darboux conjugates of KdV // Appl. Math. Lett. 1995. V. 8, N 6. P. 73–78.

6. *Latham G., Previato E.* Darboux transformations for higher-rank Kadomtsev–Petviashvili and Krichever–Novikov equations // Acta Appl. Math. 1995. V. 39. P. 405–433.

7. *Previato E., Wilson G.* Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves // Compositio Math. 1992. V. 81, N 1. P. 107–119.

8. *Dehornoy P.* Operateurs differentiels et courbes elliptiques // Compositio Math. 1981. V. 43, N 1. P. 71–99.

9. *Mokhov O. I.* On commutative subalgebras of Weyl algebra, which are associated with an elliptic curve // Reports on theory of rings, algebras and modules / Inter. conf. on algebra in memory of A. I. Shirshov (1921–1981). (Barnaul, USSR, 20–25 August, 1991). C. 85.

10. *Mokhov O. I.* On the commutative subalgebras of Weyl algebra, which are generated by the Chebyshev polynomials // 3rd Inter. Conf. on algebra in Memory of M. I. Kargapolov (1928–1976) (Krasnoyarsk, Russia, 23–28 August, 1993). Krasnoyarsk:: Inoprof, 1993. P. 421.

11. *Гриневич П. Г.* Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 19–24.

12. *Dixmier J.* Sur les algèbres de Weyl // Bull. Soc. Math. France. 1968. V. 96. P. 209–242.

13. *Mironov A. E., Zheglov A. B.* Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra // Int. Math. Res. Notices. 2015. doi: 10.1093/imrn/rnv218. Published online.

14. *Мохов О. И.* Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные дифференциальные уравнения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 6. С. 1291–1315.

15. *Мохов О. И.* О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 314–316.

16. *Mokhov O. I.* Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2014. V. 234. P. 309–322.

17. *Давлетшина В. Н.* О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 109–112.

18. *Давлетшина В. Н.* Коммутирующие дифференциальные операторы ранга два с тригонометрическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 513–519.

19. *Давлетшина В. Н., Шамаев Э. И.* О коммутирующих дифференциальных операторах ранга два // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 744–749.

20. *Zuo D.* Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2 // SIGMA. 2012. V. 8. P. 044.

21. *Оганесян В. С.* Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 произвольного рода g с полиномиальными коэффициентами // Успехи мат. наук. 2015. Т. 70, № 1. С. 179–180.

22. *Mironov A. E.* Self-adjoint commuting ordinary differential operators // Invent Math. 2014. V. 197, N 2. P. 417–431.

23. *Mironov A. E.* Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2014. V. 234. P. 309–322.

24. *Миронов А. Е., Сапарбаева Б. Т.* О собственных функциях одномерного оператора Шредингера с полиномиальным потенциалом // Докл. АН. 2015. Т. 461, № 3. С. 261–262.

25. *Hartshorne R.* Algebraic geometry. New York; Berlin; Heilderberg: Springer-Verl., 1977.

Статья поступила 20 января 2016 г.

Жеглов Александр Борисович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, ГСП1, Москва 119899
`azheglov@mech.math.msu.su`

Миронов Андрей Евгеньевич, Сапарбаева Баян Талгатовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`mironov@math.nsc.ru`, `saparbayevabt@gmail.com`