*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5*

*УДК 512.579*

# СВОБОДНЫЕ ЛИЕВЫ АЛГЕБРЫ РОТА — БАКСТЕРА

**В. Ю. Губарев**

**Аннотация.** Построена свободная алгебра Ли с оператором Рота — Бакстера.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.509

**Ключевые слова:** алгебра Рота — Бакстера, свободная алгебра Ли, слово Линдона — Ширшова, частично коммутативная алгебра Ли.

## Введение

Определение 1. Линейный оператор $R$, заданный на алгебре $A$ над полем $\Bbbk$, называется *оператором Рота — Бакстера* (РБ-*оператор* для краткости) веса $\lambda \in \Bbbk$, если выполнено следующее соотношение:

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy), \quad x, y \in A. \tag{1}$$

Алгебра с заданным на ней РБ-оператором, называется *алгеброй Рота — Бакстера* (РБ-*алгебра* для краткости).

Изучение коммутативных РБ-алгебр началось с работы Бакстера 1960 г. [1], посвященной решению одной аналитической задачи. В работах Роты и др. [2, 3] изучались комбинаторные свойства РБ-операторов и РБ-алгебр. В 1980-х гг. была обнаружена тесная связь РБ-алгебр Ли с решениями уравнения Янга — Бакстера [4, 5]. К текущему моменту найдены приложения РБ-операторов в математической физике, комбинаторике, теории чисел и теории операд [6–11].

В работах Роты, Картье и Го [2, 3, 12] были предложены различные конструкции для описания свободных коммутативных РБ-алгебр. Фард и Го в 2008 г. при помощи деревьев получили описание свободной ассоциативной РБ-алгебры [13]. Л. А. Бокуть и др. в 2010 г. [14] получили описание свободной ассоциативной РБ-алгебры при помощи базисов Грёбнера — Ширшова.

В данной работе строится свободная лиева РБ-алгебра. В п. 1 приведены предварительные сведения, касающиеся слов Линдона — Ширшова и частично коммутативных слов Линдона — Ширшова. Последние образуют линейный базис частично коммутативной алгебры Ли [15]. В п. 2 дается определение абелева оператора, далее строятся свободные алгебры произвольного многообразия с абелевым оператором. В п. 3 изучается случай алгебр Ли. На линейном пространстве, порожденном частично коммутативными словами Линдона — Ширшова, вводится операция $*$ и доказывается, что относительно этой операции получается свободная лиева РБ-алгебра.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14–21–00065).

## 1. Предварительные сведения

Пусть Var — некоторое многообразие алгебр, заданное полилинейными тождествами. Пусть $G = \langle X, E\rangle$ — (неориентированный) граф без петель и мультиребер с множеством вершин $X$ и множеством ребер $E$.

Определение 2. *Частично абелевой алгеброй* $\langle A, \cdot\rangle$ многообразия Var с графом $G = \langle X, E\rangle$ называется алгебра многообразия Var с множеством порождающих $X$ и множеством определяющих соотношений $x_i \cdot x_j = 0$, где $(x_i, x_j) \in E$.

Для Var = Lie (многообразие алгебр Ли) такие алгебры известны под названием *частично коммутативных* [16]. В [15] построен базис частично коммутативной алгебры Ли. Чтобы привести этот важный для нас результат, потребуется дать несколько известных определений.

Пусть $X$ — вполне упорядоченное множество относительно порядка $<$, а $X^*$ — множество всех ассоциативных слов в алфавите $X$ (в том числе пустое слово, которое будем обозначать через 1). Распространим порядок на множестве $X^*$ индукцией по длине слова следующим образом. Во-первых, положим $u < 1$ для любого непустого слова $u$. Во-вторых, $u < v$, если $u = x_i u'$, $v = x_j v'$ при $x_i, x_j \in X$, $x_i < x_j$, или $x_i = x_j$ и $u' < v'$. В частности, начало любого слова больше самого слова. Такой порядок называется *лексикографическим.*

Определение 3. Слово $u \in X^*$ называется *ассоциативным словом Линдона — Ширшова*, если для любых непустых $v, w \in X^*$ таких, что $u = vw$, справедливо $wv < u$.

Например, слово $x_3x_3x_2x_3x_2x_1$ является ассоциативным словом Линдона — Ширшова при $x_3 > x_2 > x_1$.

Рассмотрим множество $X^+$ всех неассоциативных слов алфавита $X$ (здесь пустое слово исключим из рассмотрения), т. е. слов со всеми возможными способами расстановки скобок.

Определение 4. Неассоциативное слово $[u] \in X^+$ называется *неассоциативным словом Линдона — Ширшова* (далее *LS-словом*), если выполняются следующие условия:

— ассоциативное слово $u$, полученное из $[u]$ стиранием скобок, является ассоциативным словом Линдона — Ширшова;

— если $[u] = ([u_1], [u_2])$, то $[u_1]$ и $[u_2]$ — $LS$-слова, $u_1 > u_2$;

— если $[u_1] = ([u_{11}], [u_{12}])$, то $u_2 \geq u_{12}$.

Слова данного вида независимо появились для алгебр в [17], а их аналог для групп — в [18].

А. И. Ширшов доказал [17], что множество всех $LS$-слов в алфавите $X$ является линейным базисом свободной алгебры Ли с множеством порождающих $X$. В той же работе показано, что на любом ассоциативном слове Линдона — Ширшова можно единственным образом расставить скобки так, чтобы получилось $LS$-слово.

Определение 5 [15]. Определим по индукции *частично коммутативные слова Линдона — Ширшова* (далее *PCLS-слова*) на множестве порождающих $X$ с графом коммутативности $G$:

— элементы множества $X$ являются $PCLS$-словами;

— $LS$-слово $[u]$ в алфавите $X$ длины больше 1 является $PCLS$-словом, если $[u] = ([v], [w])$, где $[v]$, $[w]$ — $PCLS$-слова, причем в графе $G$ первая буква слова $[w]$ не соединена ребром хотя бы с одной буквой слова $[v]$.

В [15] доказано, что базисом частично коммутативной алгебры Ли, порожденной $X$, с графом коммутативности $G$ является множество всех $PCLS$-слов от $X$ с графом $G$. Этот результат получен для конечного множества $X$, но он полностью переносится и на множество порождающих произвольной мощности.

Множества всех $LS$- и $PCLS$-слов в алфавите $X$ будем обозначать через $LS\langle X\rangle$ и $PCLS\langle X\rangle$ (при фиксированном графе $G$) соответственно.

Объединение непересекающихся множеств $A$ и $B$ будем обозначать через $A\dot\cup B$.

## 2. Свободная алгебра многообразия Var с абелевым оператором

Определение 6. Линейный оператор $R$, заданный на алгебре $A$, называется *абелевым оператором*, если выполнено следующее соотношение:

$$R(x)R(y) = 0, \quad x, y \in A. \tag{2}$$

Свободную алгебру многообразия Var с абелевым оператором $R$, порожденную множеством $X$, будем обозначать через $\mathrm{RAVar}\langle X\rangle$.

Перед тем как построить свободную алгебру с абелевым оператором, приведем конструкцию построения свободной алгебры $\mathrm{RVar}\langle X\rangle$ многообразия Var, порожденную множеством $X$ с линейным оператором $R$.

Через $\widetilde{S}$ будем обозначать копию множества $S$, полагая, что $\widetilde{S}\cap S = \varnothing$. Рассмотрим следующие свободные алгебры многообразия Var:

$$A_1 = \mathrm{Var}\langle X\rangle,\ A_2 = \mathrm{Var}\langle X\cup \widetilde{X}_1\rangle, \dots, A_{n+1} = \mathrm{Var}\langle X\cup\widetilde{X}_n\rangle, \dots, A_\infty = \bigcup A_i, \tag{3}$$

где $X_i$ — линейный базис $A_i$ такой, что $X_i$ состоит из мономов от порождающих $A_i$ и $X_i\subset X_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$ (считаем, что $T\subset S$ влечет $\widetilde{T}\subset\widetilde{S}$). Тем самым имеется вложение алгебр $A_i$ в $A_{i+1}$, $i\geq 1$. Обозначим через $X_\infty = \bigcup X_i$ базис алгебры $A_\infty$ многообразия Var. Определим действие линейного оператора $R$ на базисе $A_\infty$ как $a\in X_i\to\tilde a\in X_{i+1}$.

**Утверждение 1.** *Алгебра $A_\infty$ является свободной алгеброй многообразия* Var *с линейным оператором $R$.*

Доказательство. По построению алгебра $A_\infty$ является алгеброй многообразия Var с линейным оператором $R$, порожденной множеством $X$ (в сигнатуре с $R$).

Докажем универсальность алгебры $A_\infty$. Пусть дано отображение $f : X\to L$, где $L$ — алгебра многообразия Var с линейным оператором $T$. Докажем, что $f$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\varphi : A_\infty\to L$ алгебр с линейным оператором.

Достаточно доказать индукцией по $i = 1, 2, \dots$, что $f$ единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебр $\varphi : A_i\to L$, удовлетворяющего условию $\varphi(R(a)) = T\varphi(a)$ для любого $R(a)\in A_i$. Для $i = 1$ это понятно. Пусть утверждение доказано для $i$, докажем его для $i+1$. Множество порождающих $X$ и $\widetilde{X}_i = R(X_i)$ алгебры $A_{i+1}$ по индукционному предположению гомоморфизмом $\varphi$ однозначно переводится в $f(x)$, $x\in X$, и $T(\varphi(a))$, $a\in X_i$. Тем самым уже построенный гомоморфизм $\varphi : A_i\to L$ однозначно продолжается до гомоморфизма алгебры $A_{i+1}$ в $L$ с сохранением условия $\varphi(R(a)) = T\varphi(a)$ для любого $R(a)\in A_{i+1}$. Утверждение доказано.

Для произвольного слова $u$ из алгебры $\mathrm{RVar}\langle X\rangle$ число вхождений символа $R$ в его запись назовем *$R$-степенью слова* $u$ (обозначение $\deg_R(u)$).

Пусть $K$ — $R$-идеал в $\mathrm{RVar}\langle X\rangle$, порожденный элементами $R(a)R(b)$, $a, b \in X_\infty$. Определим алгебры $C_i = A_i/(A_i \cap K)$, $i = 1, 2, \dots$, $C_\infty = \bigcup C_i$. Из теоремы о гомоморфизмах следует

**Утверждение 2.** *Алгебра $C_\infty$ является свободной алгеброй многообразия* $\mathrm{Var}$ *с абелевым оператором $R$.*

**Утверждение 3.** *Верно следующее:*

$$C_{i+1} \cong T_{i+1} = \mathrm{Var}\langle X \cup R(Z_i) \mid R(a)R(b) = 0,\ a, b \in Z_i\rangle, \quad i = 0, 1, \dots,$$

*где $Z_0 = \varnothing$, $Z_i + A_i \cap K$ (для $Z_i \subseteq X_i$) — базис алгебры $C_i$, $Z_i \subset Z_{i+1}$, $i \geq 1$.*

Доказательство. При $i = 1$ изоморфизм существует, в качестве $Z_1$ берем $X_1$. Пусть для $i \leq k$ утверждение доказано. Так как $A_{k+1} = \mathrm{Var}\langle X \cup R(X_k)\rangle \subseteq \mathrm{Var}\langle X \cup R(Z_k)\rangle + A_{k+1} \cap K$, алгебра $C_{k+1}$ изоморфна фактор-алгебре $\mathrm{Var}\langle X \cup R(Z_k)\rangle / \mathrm{Var}\langle X \cup R(Z_k)\rangle \cap (A_{k+1} \cap K)$.

Обозначим через $I$ идеал в алгебре $\mathrm{Var}\langle X \cup R(Z_k)\rangle$, порожденный множеством $R(a)R(b)$, $a, b \in Z_k$. Включение $I \subset \mathrm{Var}\langle X \cup R(Z_k)\rangle \cap (A_{k+1} \cap K)$ ясно. Предположим, что существует ненулевой элемент $u \in (\mathrm{Var}\langle X \cup R(Z_k)\rangle \cap (A_{k+1} \cap K)) \setminus I$. Тогда, с одной стороны, $u$ как ненулевой элемент $\mathrm{Var}\langle X \cup R(Z_k)\rangle \setminus I$ равен $(0 \neq) u_1$ — линейной комбинации элементов из $A_{k+1}$ от порождающих $X$ и $R(Z_k)$, в записи которых не встречаются ни произведения $R(a)R(b)$, $a, b \in Z_k$, ни произведения $R(a)R(b)$, $a, b \in Z_i$, $i < k$, внутри действия $R$. С другой стороны, $u$ как элемент $K$ есть линейная комбинация элементов, в записи которых встречаются: а) произведения $R(a)R(b)$, $a, b \in Z_k$, б) произведения $R(a)R(b)$, $a, b \in Z_i$, $i < k$, внутри действия $R$. Если применять тождества многообразия $\mathrm{Var}$ к элементам вида б), то также будут получаться элементы вида б). Приравнивая два представления $u$ в $A_{k+1}$, получим противоречие. Тем самым алгебры $C_{k+1}$ и $T_{k+1}$ изоморфны. Утверждение доказано.

Отметим, что алгебры $C_i$, $i \geq 1$, изоморфны частично абелевым алгебрам $T_i$ многообразия $\mathrm{Var}$ с нулевым произведением порождающих вида $R(u)$ (далее будем такие порождающие называть *$R$-буквами*, а алгебры $C_i$ отождествлять с $T_i$).

Замечание 1. Для многообразия коммутативных алгебр базис свободной алгебры $\mathrm{RA\,Com}\langle X\rangle$ состоит из слов вида $R(u_1 R(u_2 R(u_3 R(\dots R(u_n))\dots)))$, где $u_j$, $j = 1, \dots, n-1$, — мономы от $X$ или пустое слово, $u_n$ — моном от $X$.

Базис свободной ассоциативной алгебры с абелевым оператором $R$ состоит из тех слов $X_\infty$, в которых две $R$-буквы не идут подряд.

Рассмотрим многообразие алгебр Ли. Обозначим через $\widetilde{X}$ множество, состоящее из $X$ и всех $R$-букв из $X_\infty$. Рассматривая $u \in X_\infty$ как слово Линдона — Ширшова от множества порождающих $\widetilde{X}$, можем определить степень $u$ (обозначение $\deg u$). Например, для слова $u = [R([R(x_1), x_2]), x_3]$ имеем $\deg u = 2$, поскольку слово $u$ состоит из двух букв в алфавите $\widetilde{X}$: $R([R(x_1), x_2])$ и $x_3$.

Продолжим введенный на множестве $X$ в п. 1 порядок на слова из $X_\infty$ как лексикографический порядок на словах Линдона — Ширшова в алфавите $\widetilde{X}$ с $x < R(u)$ для любых $x \in X$, $u \in X_\infty$ и $R(u) < R(v)$, если и только если $u < v$.

Заметим, что граф, определяющий частичную коммутативность алгебры $C_i$, является кликой на $R$-буквах из $\widetilde{X}$. Тем самым для записи базиса алгебр

$C_i$ достаточно воспользоваться $PCLS$-словами:

$$Z_1 = LS\langle X\rangle,\ Z_2 = PCLS\langle X \cup R(Z_1)\rangle, \dots,$$
$$Z_{n+1} = PCLS\langle X \cup R(Z_n)\rangle, \dots, Z_\infty = \bigcup Z_i.$$

Тогда $Z_\infty$ — базис RA Lie$\langle X\rangle$.

Произведение $[R(x),[R(x),y]]$ для $x, y \in X$ согласно определению 5 есть $PCLS$-слово, а $[R(x),[R(y),z]]$, $x, y, z \in X$, при $x > y$ не является $PCLS$-словом. Вообще, произведение $[u, v]$ двух $PCLS$-слов $u, v$ при $u > v$ будет $LS$-словом, но не $PCLS$-словом, только если $u = R(u')$ и первая буква $v$ равна $R(v')$, причем $u' > v'$.

## 3. Свободная лиева алгебра Рота — Бакстера

Зафиксируем Var = Lie и обозначим произведение в алгебре $C_\infty$ через $[\,,]$. Ниже, если не оговорено обратное, рассматриваются РБ-операторы веса нуль. Обозначим через RB Lie$\langle X\rangle$ свободную лиеву алгебру Рота — Бакстера, порожденную множеством $X$.

Зададим пространство $D$ как линейную оболочку множества $Z_\infty$. Определим произведение $u * v$ для $u, v \in Z_\infty$. Начнем определение с индукции по суммарной $R$-степени $u$ и $v$: $r(u, v) = \deg_R(u) + \deg_R(v)$. При $r(u, v) = 0$ полагаем $u * v$ равным $[u, v]$ в Lie$\langle X\rangle$.

Предположим, что определили $u * v$ для всех $u, v \in Z_\infty$ с $r(u, v) \le r$, рассмотрим слова $u, v$ $R$-степени $r(u, v) = r + 1$. Достаточно определить $u * v$ для $u > v$: произведение $u * v$ определим нулевым при $u = v$ и равным $-v * u$ при $u < v$.

Будем вести вторую индукцию по суммарной степени слов $q(u, v) = \deg(u) + \deg(v)$. При $q(u, v) = 2$ либо $u = R(w)$, $v = x_i$, либо $u = R(w_1)$, $v = R(w_2)$. В первом случае $u * v = [R(w), x_i] \in Z_\infty$. Во втором случае

$$R(w_1) * R(w_2) := R(R(w_1) * w_2) + R(w_1 * R(w_2)). \tag{4}$$

В правой части (4) $R$ действует на произведения $PCLS$-слов меньшей суммарной $R$-степени, поэтому они определены по индукционному предположению.

Пусть произведение $*$ определено для всех слов с $q(u, v) \le q$, будем рассматривать такие слова $u, v$, что $q(u, v) = q + 1 \ge 3$.

Зафиксируем множество $E$ букв из $\widetilde{X}$, участвующих в записи хотя бы одного из слов $u$ и $v$, тогда множество слов в алфавите $E$ степени $q$ конечно. Третью индукцию будем вести по убыванию $\min(u, v)$ относительно порядка $<$. Будем одновременно с определением $*$ доказывать по индукции, что

$$\begin{gathered} u * v = \sum_i \alpha_i w_i + f, \\ \deg f < q(u, v),\ \deg w_i = q(u, v),\ \alpha_i \in \Bbbk,\ w_i = [w_{i1}, w_{i2}],\ w_{i2} \ge \min(u, v), \end{gathered} \tag{5}$$

причем все слова $w_i$ выражаются в алфавите $E$.

Легко проверить, что (5) выполнено для случаев $r = 0$ и $q = 2$. Базой индукции по параметру $\min(u, v)$ среди слов в алфавите $E$ степени $q$ будет служить определение произведения $u * v$ для $u$ и $v$, равных самому старшему слову $w_0$ степени $q$ в алфавите $E$, тогда $w_0 * w_0 = 0$.

Как и прежде, заметим, что для определения $u * v$ для произвольных $u, v$ достаточно рассматривать случай, когда $u > v$.

Предполагаем, что $*$ определена для всех слов $u, v \geq \widetilde{w}$ степени $q$ в алфавите $E$. Для пары слов $u, v$ возможны три случая.

Случай 1: $[u, v] \in Z_\infty$. Тогда $u * v = [u, v]$.

Случай 2: произведение $u$ и $v$ в $C_\infty$ не является $LS$-словом, т. е. $u = [u_1, u_2]$ и $u_1 > u_2 > v$. Определим

$$[u_1, u_2] * v = (u_1 * v) * u_2 + u_1 * (u_2 * v). \tag{6}$$

Произведения $(u_1 * v)$ и $(u_2 * v)$ определены, поскольку $\deg u_i < \deg u$, $i = 1, 2$. Произведение $(u_1 * v)$ равняется сумме линейной комбинации $\Sigma_1$ слов степени меньше, чем $\deg u_1 + \deg v$, и линейной комбинации $\Sigma_2 = \sum \lambda_i w_i$, $\lambda_i \in \Bbbk$, $PCLS$-слов $w_i = [w_{i1}, w_{i2}]$ той же степени, при этом $w_{i2} \geq \min(u_1, v) = v$. Произведение $\Sigma_1 * u_2$ также определено индукцией по степени. Поскольку все $w_i$ и $u_2$ больше $v$, произведение $w_i * u_2$ определено по индукции и для него выполнено (5). Аналогично рассматривается $u_1 * (u_2 * v)$. Следовательно, $u * v$ определено и удовлетворяет (5).

Случай 3: произведение $u$ и $v$ в $C_\infty$ является $LS$-словом, но не является $PCLS$-словом. По определению 5 это возможно, только если $u = R(u_0)$ и первая буква $v$ равна $R(v_0)$ и $u_0 > v_0$. Пусть $v = [v_1, v_2]$. Если $v_1 = R(v_0)$, то определяем $u * v$ как

$$R(u_0) * [R(v_0), v_2] = R(R(u_0) * v_0) * v_2 + R(u_0 * R(v_0)) * v_2 - [[R(u_0), v_2], R(v_0)],$$

причем степень первого и второго слагаемых в правой части меньше $q$, а слово $[[R(u_0), v_2], R(v_0)]$ есть $PCLS$-слово. При этом

$$\min([R(u_0), v_2], R(v_0)) \geq [R(v_0), v_2] = \min(R(u_0), [R(v_0), v_2]).$$

Если $v = [R(v_0), t_1, \dots, t_k]$ (здесь и далее будем использовать краткое обозначение $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_f]$ для $[[\dots[[a_1, a_2], a_3] \dots], a_f]$) для некоторых слов $t_i$, $R(u_0) > R(v_0) > t_k \geq t_{k-1} \geq \dots \geq t_1$, то

$$\begin{aligned} R(u_0) &* [R(v_0), t_1, \dots, t_k] \\ &= [R(R(u_0) * v_0 + u_0 * R(v_0)), t_1, \dots, t_k] - [[R(u_0), t_1, \dots, t_k], R(v_0)] \\ &\qquad + \sum [R(v_0), t_{i_1}, \dots, t_{i_s}] * [R(u_0), t_{j_1}, \dots, t_{j_{k-s}}]), \end{aligned} \tag{7}$$

где суммирование происходит по наборам $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ и $j_1 < \dots < j_{k-s}$ таким, что $\{i_1, \dots, i_s\} \dot\cup \{j_1, \dots, j_{k-s}\} = \{1, \dots, k\}$, $1 \leq s < k$. Все слагаемые определены индукцией по порядку младшего множителя. Выполнение условия (5) для слагаемых в сумме (7) также следует из предположения индукции.

Через $(a_1, a_2, \dots, a_f)$ далее будем обозначать произведение $((\dots((a_1 * a_2) * a_3) \dots) * a_f)$, а для $I = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ через $(R(v), t_I)$ — произведение $(R(v), t_{j_1}, \dots, t_{j_s})$, где $\{j_1, \dots, j_s\} = I$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_s$. Аналогично определим $[R(v), t_I]$.

**Теорема 1.** *Алгебра $D$ является алгеброй Ли с оператором Рота — Бакстера.*

Доказательство. Легко видеть, что $D$ — антикоммутативная алгебра. Из определения операции $*$ следует, что оператор $u \to R(u)$, $u \in Z_\infty$, является оператором Рота — Бакстера на $D$. Докажем выполнение тождества Якоби

$$J(a, b, c) = (a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0$$

для произвольной тройки $PCLS$-слов $a, b, c$ индукцией по их суммарной $R$-степени $r$. При $r = 0$ это очевидно.

Вторая индукция будет идти по общей суммарной степени $q$ слов $a, b, c$. Пусть $q = 3$, без ограничения общности будем считать, что $a > b > c$, так как при совпадении каких-то элементов из $a, b, c$ тождество Якоби выполняется в силу антикоммутативности. Возможны следующие случаи.

1. $a = R(a')$, $b = R(b')$, $c = R(c')$, тогда $J(a, b, c)$ по определению $*$ равно $R(\Delta)$, где $\Delta = J(a, b, c') + J(a, b', c) + J(a', b, c)$ (см. также [11]). Поскольку суммарная $R$-степень слагаемых в $\Delta$ меньше $r$, значит, $\Delta = 0$.

2. $a = R(a')$, $b = R(b')$, $c \in X$, тогда

$$J(a, b, c) = R(R(a')*b')*c + R(a'*R(b'))*c + (R(b')*c)*R(a') + (c*R(a'))*R(b'). \quad (8)$$

Произведение $(R(b') * c) * R(a')$ равняется $-R(a') * [R(b'), c] = -(R(R(a') * b') * c + R(a' * R(b')) * c) + (R(a') * c) * R(b')$, отсюда следует выполнение тождества Якоби.

3. $a = R(a')$, $b, c \in X$, тогда $J(a, b, c) = [R(a'), b]*c + (b*c)*R(a') + (c*R(a'))*b$. В силу порядка $a > b > c$ расписываем по (6) $[R(a'), b]*c = (R(a')*c)*b + R(a')*(b*c)$, что вместе с антикоммутативностью и выводит тождество Якоби.

Пусть тождество Якоби доказано для слов $a, b, c$ с суммарной степенью, меньшей $q$, рассмотрим тройку $PCLS$-слов $a, b, c$ суммарной степени $q \geq 4$. Зафиксируем множество $E$ букв из $\widetilde{X}$, участвующих в записи хотя бы одного из слов $a, b, c$, тогда множество слов в алфавите $E$ степени $q$ конечно.

Индукционный переход по $q$ будем доказывать дополнительной индукцией по убыванию параметра $c_0 = \min(a, b, c)$ и, если $c_0$ не изменяется, по убыванию $b_0 = \min(\{a, b, c\} \setminus \{c_0\})$ среди слов в алфавите $E$ степени $q$.

Базой индукции по параметру $\min(a, b, c)$ будет служить выполнение тождества Якоби при $a, b, c$, равных самому старшему слову $w_0$ степени $q$ в алфавите $E$. Базой индукции по параметру $b_0$ является очевидное выполнение тождества Якоби для $a = b = w_0$ и произвольного $c$. Докажем индукционный шаг.

Заметим, что тождество Якоби достаточно проверять для попарно различных $a, b, c$, иначе оно следует из антикоммутативности. Можно считать, что $a > b > c$.

Дальнейшее доказательство выполнения тождества Якоби состоит из рассмотрения следующих случаев: произведение $a$ и $b$ является $PCLS$-словом (случай 1), не является $LS$-словом (случай 2), является $LS$, но не $PCLS$-словом. В последнем варианте либо $b$ есть $R$-буква (случаи 3 и 4 в зависимости от первой буквы $c$), либо $b = [b_1, b_2]$ (случай 5 при $b_2 \leq c$, случай 6 при $b_2 > c$).

Случай 1: произведение $a$ и $b$ является $PCLS$-словом. Тогда $(a * b) * c = [a, b] * c = (a * c) * b + a * (b * c)$ согласно определению $*$.

Случай 2: $a = [a_1, a_2]$ и $a_2 > b$, тогда и $a_2 > c$. Таким образом, $J(a, b, c) = (([a_1, a_2]) * b) * c - [a_1, a_2] * (b * c) - ([a_1, a_2] * c) * b$,

$$\begin{aligned} &(([a_1, a_2]) * b) * c = ((a_1 * b) * a_2 + a_1 * (a_2 * b)) * c \\ &= ((a_1 * b) * c) * a_2 - (a_2 * c) * (a_1 * b) + (a_1 * c) * (a_2 * b) + a_1 * ((a_2 * b) * c), \end{aligned} \quad (9)$$

$$-[a_1, a_2] * (b * c) = -(a_1 * (b * c)) * a_2 - a_1 * (a_2 * (b * c)), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -([a_1, a_2] * c) * b = -((a_1 * c) * a_2) * b - (a_1 * (a_2 * c)) * b = -((a_1 * c) * b) * a_2 \\ - (a_1 * c) * (a_2 * b) - a_1 * ((a_2 * c) * b) - (a_1 * b) * (a_2 * c). \end{aligned} \quad (11)$$

Сумма правых частей равенств (9)–(11) равняется $J(a_1,b,c)*a_2+a_1*J(a_2,b,c)$ и по индукции равна нулю. Равенства (9)–(11) корректны в силу индукции по суммарной степени $q$ и паре $(c_0,b_0)$.

Как отмечено выше, произведение $a$ и $b$ в алгебре $C_\infty$ будет $LS$-словом, но не $PCLS$-словом, только если $a$ и первая буква $b$ являются различными $R$-буквами.

Случай 3: $a=R(x)$, $b=R(y)$, первая буква слова $c$ равна $b$ или $c$ не содержит $R$-букв. Тогда $a*(b*c)=R(x)*[R(y),c]=R(R(x)*y+x*R(y))*c-[[R(x),c],R(y)]$ по определению $*$, что доказывает тождество Якоби.

Случай 4: $a=R(x)$, $b=R(y)$, первая буква $c$ равна $R(z)<b$. Запишем $c$ как $[R(z),t_1,\dots,t_k]$, тогда

$$a*(b*c)=R(x)*\Big(\sum(R(z),t_I)*(R(y),t_{I'})+[R(y)*R(z),t_K]+R(z)*[R(y),t_K]\Big).$$

Здесь и ниже $I,I'$ обозначают непустые подмножества множества $K=\{1,\dots,k\}$ такие, что $K=I\dot\cup I'$. Суммирование происходит по всем таким разбиениям $K$.

Применяя тождество Якоби к первой сумме, а затем (7) к последним двум слагаемым в скобках правой части, получаем

$$\begin{aligned}a*(b*c)&=\sum((R(z),t_J)*(R(x),t_{J'}))*(R(y),t_{J''})+\sum((R(x)*R(z),t_I)*(R(y),t_{I'})\\&+\sum(R(z)*(R(x),t_I))*(R(y),t_{I'})+\sum(R(z),t_I)*(R(x)*R(y),t_{I'})\\&+\sum(R(z),t_I)*(R(y)*(R(x),t_{I'}))+\sum(R(z),t_J)*((R(y),t_{J'})*(R(x),t_{J''}))\\&+(R(x)*(R(y)*R(z)),t_1,\dots,t_k)+(R(y)*R(z))*[R(x),t_1,\dots,t_k]\\&+\sum(R(y)*R(z),t_I)*(R(x),t_{I'})+(R(x)*R(z))*[R(y),t_1,\dots,t_k]\\&+R(z)*[R(x)*R(y),t_1,\dots,t_k]+R(z)*(R(y)*[R(x),t_1,\dots,t_k])\\&+R(z)*\Big(\sum(R(y),t_I)*(R(x),t_{I'})\Big),\end{aligned}\tag{12}$$

где $J,J',J''$ обозначают непустые подмножества $K$ такие, что $K=J\dot\cup J'\dot\cup J''$. Суммирование происходит по всем таким разбиениям $K$.

Аналогично записываем

$$\begin{aligned}b*(a*c)&=\sum((R(z),t_J)*(R(y),t_{J'}))*(R(x),t_{J''})+\sum((R(y)*R(z),t_I)*(R(x),t_{I'})\\&+\sum(R(z)*(R(y),t_I))*(R(x),t_{I'})+\sum(R(z),t_I)*(R(y)*R(x),t_{I'})\\&+\sum(R(z),t_I)*(R(x)*(R(y),t_{I'}))+\sum(R(z),t_J)*((R(x),t_{J'})*(R(y),t_{J''}))\\&+(R(y)*(R(x)*R(z)),t_1,\dots,t_k)+(R(x)*R(z))*[R(y),t_1,\dots,t_k]\\&+\sum(R(x)*R(z),t_I)*(R(y),t_{I'})+(R(y)*R(z))*[R(x),t_1,\dots,t_k]\\&+R(z)*[R(y)*R(x),t_1,\dots,t_k]+R(z)*(R(x)*[R(y),t_1,\dots,t_k])\\&+R(z)*\Big(\sum(R(x),t_I)*(R(y),t_{I'})\Big).\end{aligned}\tag{13}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}R(z)*[R(x)*R(y),t_1,\dots,t_k]&=\dots(R(z)*(R(x)*R(y)),t_1,\dots,t_k)\\&+(a*b)*c-\sum(R(z),t_I)*(R(x)*R(y),t_{I'}).\end{aligned}\tag{14}$$

Все записанные равенства корректны ввиду индукционного предположения по $c_0$. Складывая $a*(b*c)$, $-b*(a*c)$ и $-(a*b)*c$ из (12)–(14), получим

$$\begin{aligned}J(a,b,c)&=\sum((R(z),t_J)*(R(x),t_{J'}))*(R(y),t_{J''})\\+\sum(R(z),t_J)*((R(y),t_{J'})*(R(x),t_{J''}))&-\sum((R(z),t_J)*(R(y),t_{J'}))*(R(x),t_{J''})\\&+R(z)*\Big(R(y)*[R(x),t_1,\dots,t_k]+\Big(\sum(R(y),t_I)*(R(x),t_{I'})\Big)\\&-(R(y)*R(x),t_1,\dots,t_k)-R(x)*[R(y),t_1,\dots,t_k]\Big)\\&+\sum(R(z),t_I)*(R(y)*(R(x),t_{I'})-(R(x),t_{(K\setminus I)'})*(R(y),t_{(K\setminus I)''})\\&-(R(y)*R(x),t_{I'})-R(x)*(R(y),t_{I'}))=0,\end{aligned}$$

где $(K\setminus I)'\dot\cup(K\setminus I)''=K\setminus I$ и суммирование происходит по всем таким разбиениям.

Случай 5: $a=R(x)$, $b=[b_1,b_2]$, $b_2\le c$, тогда $[b_1,b_2]*c$ есть $PCLS$-слово. Пусть $b=[R(y),t_1,\dots,t_k]$, тогда

$$\begin{aligned}a*(b*c)&=R(x)*[R(y),t_1,\dots,t_k,c]\\&=[R(R(x)*y+x*R(y)),t_1,\dots,t_k,c]+R(y)*[R(x),t_1,\dots,t_k,c]\\&+\sum(R(y),t_{I_c})*(R(x),t_{I'_c}),\end{aligned}\tag{15}$$

где $t_{k+1}=c$, $I_c\dot\cup I'_c=\{1,\dots,k,k+1\}$,

$$\begin{aligned}c*(a*b)&=-[R(R(x)*y+x*R(y)),t_1,\dots,t_k,c]-(R(y)*[R(x),t_1,\dots,t_k])*c\\&-\Big(\sum(R(y),t_I)*(R(x),t_{I'})\Big)*c,\end{aligned}\tag{16}$$

где $I\dot\cup I'=\{1,\dots,k\}$. Наконец,

$$b*(c*a)=-[R(y),t_1,\dots,t_k]*(R(x)*c).\tag{17}$$

Используя индукцию по $b_0$, сократим обе суммы в (15), (16), за исключением произведений с множителями $R(x)*c$ и $R(y)*c$, но такие произведения сократятся с оставшимися слагаемыми выражений (15)–(17) при помощи равенства $J(s,R(y),c)=0$, $s=[R(x),t_1,\dots,t_k]$, выполненного в силу индукции по $b_0$.

Случай 6: $a=R(x)$, $b=[b_1,b_2]$, $b_2>c$. Пусть $b=[R(y),t_1,\dots,t_k]$, тогда

$$\begin{aligned}(a*b)*c&=[R(x)*R(y),t_1,\dots,t_k]*c\\&+(R(y)*[R(x),t_1,\dots,t_k])*c+\sum((R(y),t_I)*(R(x),t_{I'}))*c\\&=(\dots(R(x)*R(y))*c,t_1,\dots,t_k)+\sum_s(R(x)*R(y),t_1,\dots,t_s*c,\dots,t_k)\\&+(R(y)*c)*[R(x),t_1,\dots,t_k]+R(y)*(R(x)*c,t_1,\dots,t_k)\\&+R(y)*\sum_s(R(x),t_1,\dots,t_s*c,\dots,t_k)\\&+\sum((R(y),t_I)*c)*(R(x),t_{I'})+\sum(R(y),t_I)*((R(x),t_{I'})*c);\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a*(b*c) &= R(x)*(R(y)*c,t_1,\dots,t_k) + R(x)*\sum_s (R(y),t_1,\dots,t_s*c,\dots,t_k)\\
&= [R(x)*(R(y)*c),t_1,\dots,t_k] + (R(y)*c)*[R(x),t_1,\dots,t_k]\\
&\quad + \sum (R(y)*c,t_I)*(R(x),t_{I'}) + \sum_s (R(x)*R(y),t_1,\dots,t_s*c,\dots,t_k)\\
&\quad + R(y)*\sum_s (R(x),t_1,\dots,t_s*c,\dots,t_k) + \sum_{s,I} (R(y),t_{I,s})*(R(x),t_{I',s}),
\end{aligned}
$$

где $I\dot\cup I' = \{1,\dots,k\}$; $s=1,\dots,k$; $t_{I,s}$ (или $t_{I',s}$) равняется $t_I$ с заменой $t_s$ на $t_s*c$, если $s\in I$, и $t_I$ иначе;

$$
(a*c)*b = ((R(x)*c)*R(y),t_K) + R(y)*(R(x)*c,t_K) + \sum (R(y),t_I)*(R(x)*c,t_{I'}).
$$

Индукция по $c_0$ обеспечивает корректность всех применений тождества Якоби. Сравнивая слагаемые в выражении $J(a,b,c)=(a*b)*c-a*(b*c)-(a*c)*b$, получим

$$
\begin{aligned}
J(a,b,c) &= \sum ((R(y),t_I)*c)*(R(x),t_{I'}) + \sum ((R(y),t_I)*((R(x),t_{I'})*c)\\
&\quad - \sum (R(y),t_I)*(R(x)*c,t_{I'}) - \sum (R(y)*c,t_I)*(R(x),t_{I'})\\
&\quad - \sum_{s,I} (R(y),t_{I,s})*(R(x),t_{I',s}).
\end{aligned}
$$

Переписывая выражения $(R(y),t_I)*c)$ и $(R(x),t_{I'})*c)$ при помощи тождества Якоби, получим $J(a,b,c)=0$. Теорема доказана.

**Лемма.** *Любой элемент свободной алгебры* $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$ *выражается в виде линейной комбинации* $PCLS$*-слов* $Z_\infty$.

Доказательство. В общей конструкции (3) построения $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$ в качестве $X_i$ возьмем $LS$-слова от порождающих $X\cup R(X_{i-1})$, $i\ge 1$, $X_0=\varnothing$. Тогда базис $A_\infty$ образуют $LS$-слова от множества порождающих $\bigcup\limits_{i\ge1} R(X_i)\cup X$. Докажем, что все такие базисные слова линейно выражаются через $PCLS$-слова первичной индукцией по $R$-степени $r(u)$ и затем индукцией по степени $q(u)$. При $r(u)=0$ слово $u\in LS\langle X\rangle$ уже является $PCLS$-словом. При $q(u)=1$ либо $u\in X$ (тем самым это $PCLS$-слово), либо $u=R(u_0)$. Остается применить индукционное предположение для $u_0$.

Докажем индукционный переход. Пусть $u$ — слово из $\mathrm{RLie}\langle X\rangle$ степени $q=q(u)\ge 2$. Тогда $u$ линейно выражается через $PCLS$-слова той же степени $q$ и слова Линдона — Ширшова также степени $q$, содержащие в своей записи произведение $R(s)*R(t)$. Раскрывая все такие произведения как $R(R(s)*t+s*R(t))$, получим слова уже меньшей степени $q(u)-1$, для них выполнено индукционное предположение. Лемма доказана.

**Теорема 2.** *Множество* $Z_\infty$ *является базисом алгебры* $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$.

Доказательство. По построению алгебра $D$ является РБ-алгеброй Ли, порожденной множеством $X$. Значит, $D$ является образом под действием некоторого гомоморфизма $\varphi$ алгебры свободной РБ-алгеброй Ли, порожденной множеством $X$. Гомоморфизм $\varphi$ обладает нулевым ядром, в противном случае не все элементы $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$ линейно выражались бы через $D$. Тем самым $D$ — свободная РБ-алгебра Ли. Теорема доказана.

По сути, базисом алгебры $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$ является множество всех $PCLS$-слов в алфавите $\widetilde{X}$.

Замечание 2. Доказательство полноты в теореме 1 верно для любого многообразия Var при условии, что в этом многообразии определен аналог операции $*$.

Замечание 3. Несложно проверить, что результаты теорем 1 и 2 верны для РБ-операторов ненулевого веса $\lambda$ при определении $R(a)*R(b)$ как $R(R(a)*b+a*R(b)+\lambda a*b)$. Существенным изменением при доказательстве будет подсчет выражения $J(R(x),R(y),R(z))$ как $R(\Delta)$ для

$$\Delta = J(x,R(y),R(z)) + J(R(x),y,R(z)) + J(R(x),R(y),z) \\ + \lambda(J(x,y,R(z)) + J(x,R(y),z) + J(R(x),y,z)) + \lambda^2 J(x,y,z).$$

Замечание 4. Мы определили на пространстве $\mathrm{RA\,Lie}\langle X\rangle$ операцию $*$, а затем доказали, что она удовлетворяет тождествам алгебры Ли. Аналогичную процедуру можно проделать для $\mathrm{Var}=\mathrm{As},\mathrm{Com}$. Более того, если ввести на $\mathrm{RB\,Var}\langle X\rangle$ фильтрацию по степени в алфавите $X_\infty$, где $\mathrm{Var}\in\{\mathrm{Lie},\mathrm{As},\mathrm{Com}\}$, то для присоединенной градуированной алгебры получим изоморфизм

$$\mathrm{gr\,RB\,Var}\langle X\rangle \cong \mathrm{RAVar}\langle X\rangle \tag{18}$$

как алгебр многообразия Var.

Вследствие результата теоремы 1 и замечания 4 возникает

**Гипотеза.** *Для произвольных множества $X$ и многообразия* Var *выполнено* (18).

Замечание 5. В [19] введен оператор Нийенхейса (Nijenhuis operator) — линейный оператор $N$ на алгебре $A$, удовлетворяющий тождеству $N(x)N(y) = N(N(x)y + xN(y) - N(xy))$. В [20] описаны свободные ассоциативные алгебры с оператором Нийенхейса.

Для любого полилинейного терма $t(x_1,\dots,x_n)=(x_1\dots x_n)$ с какой-то расстановкой скобок индукцией по $n$ можно показать, что

$$t(N(x_1),\dots,N(x_n)) \\ = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}N^i\Big(\sum_{j_1,\dots,j_i} t(N(x_1),N(x_2),\dots,x_{j_1},\dots,x_{j_i},\dots,N(x_n))\Big), \tag{19}$$

где внутренняя сумма берется по всем подмножествам $\{j_1,\dots,j_i\}$ в $\{1,2,\dots,n\}$.

Так же, как и выше, можно доказать, что на пространстве $\mathrm{RA\,Lie}\langle X\rangle$ задается структура свободной лиевой алгебры с оператором Нийенхейса, порожденной множеством $X$, и верен аналог (18). Ключевые выкладки, связанные с проверкой ассоциативности и тождества Якоби для аналога $*$ на элементах $N(x),N(y),N(z)$, будут следовать из (19).

Автор выражает благодарность П. С. Колесникову за полезные обсуждения и замечания. Автор благодарит рецензента за полезные рекомендации.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Baxter G.* An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity // Pac. J. Math. 1960. V. 10. P. 731–742.

**2.** *Rota G.-C.* Baxter algebras and combinatorial identities. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75. P. 325–329.

**3.** *Cartier P.* On the structure of free Baxter algebras // Adv. Math. 1972. V. 9. P. 253–265.

**4.** *Белавин А. А., Дринфельд В. Г.* О решениях классического уравнения Янга — Бакстера для простых алгебр Ли // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 3. С. 1–29.

**5.** *Семенов-Тян-Шанский М. А.* Что такое классическая $r$-матрица // Функцион. анализ и его прил. 1983. Т. 17, № 4. С. 17–33.

**6.** *Aguiar M.* Pre-Poisson algebras // Lett. Math. Phys. 2000. V. 54. P. 263–277.

**7.** *Andrews G. E., Guo L., Keigher W., Ono K.* Baxter algebras and Hopf algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355. P. 4639–4656.

**8.** *Connes A., Kreimer D.* Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem // Comm. Math. Phys. 2000. V. 210, N 1. P. 249–273.

**9.** *Connes A., Kreimer D.* Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem. II. The $L$-function, diffeomorphisms and the renormalization group // Comm. Math. Phys. 2001. V. 216, N 1. P. 215–241.

**10.** *Ebrahimi-Fard K., Guo L.* Quasi-shuffles, mixable shuffles and Hopf algebras // J. Algebr. Comb. 2006. V. 24. P. 83–101.

**11.** *Gubarev V., Kolesnikov P.* Embedding of dendriform algebras into Rota–Baxter algebras // Cent. Eur. J. Math. 2013. V. 11, N 2. P. 226–245.

**12.** *Guo L., Keigher W.* On free Baxter algebras: completions and the internal construction // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 101–127.

**13.** *Ebrahimi-Fard K., Guo L.* Free Rota–Baxter algebras and rooted trees // J. Algebra Appl. 2008. V. 7. P. 167–194.

**14.** *Бокуть Л. А., Чэн Ю., Ден Ш.* Базисы Грёбнера — Ширшова для алгебр Рота — Бакстера // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1237–1250.

**15.** *Порошенко Е. Н.* О базисах частично коммутативных алгебрах Ли // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 5. С. 595–614.

**16.** *Duchamp G., Krob D.* Free partially commutative structures // J. Algebra. 1993. V. 156, N 2. P. 318–361.

**17.** *Ширшов А. И.* О свободных кольцах Ли // Мат. сб. 1958. Т. 45, № 2. С. 113–122.

**18.** *Chen K. T., Fox R. H., Lyndon R. C.* Free differential calculus. IV. The quotient groups of the lower central series // Ann. Math. 1958. V. 68, N 2. P. 81–95.

**19.** *Cariñena J., Grabowski J, Marmo G.* Quantum bi-Hamiltonian systems // Int. J. Modern Phys. A. 2000. V. 15. P. 4797–4810.

**20.** *Guo L., Lei P.* Nijenhuis algebras, NS algebras, and $N$-dendriform algebras // Frontiers Math. 2012. V. 7. P. 827–846.


*Статья поступила 8 декабря 2015 г.*

Губарев Всеволод Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
wsewolod89@gmail.com