Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 512.54

О $\{2,3\}$–ГРУППАХ БЕЗ ЭЛЕМЕНТОВ ПОРЯДКА 6

Э. Ябара

Аннотация. Дается описание $\{2,3\}$-групп, в которых порядок произведения любых двух элементов порядков, не превосходящих 4, не превосходит 9 и централизатор любой инволюции является локально циклической 2-группой. В частности, доказана локальная конечность таких групп.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.416

Ключевые слова: $\{2,3\}$-группа, локально конечная группа.

§ 1. Введение

Цель настоящей работы — уточнить результаты Д. В. Лыткиной и В. Д. Мазурова из [1] о $\{2,3\}$-группах без элементов порядка 6.

Для периодической группы G через $\pi(G)$ обозначим множество простых чисел, которые делят порядок некоторого элемента группы G. Пусть $\Omega(G) = \langle g \mid g^p = 1 \text{ для некоторого } p \in \pi(G)\rangle$. Через C_n обозначим циклическую группу порядка n, через D_{2n} — группу диэдра порядка $2n$, а через $S_3 \simeq D_6$ — симметрическую группу степени 3.

Будем говорить, что группа G *удовлетворяет условию* (H), если выполнены следующие два условия:

(H.1) $\pi(G) = \{2,3\}$,

(H.2) порядок произведения любых двух элементов порядков, не превосходящих 4, не превосходит 9.

Целью работы является доказательство следующего результата.

Теорема 1. *Пусть группа G удовлетворяет условию* (H) *и централизатор любой инволюции из G является локально циклической 2-группой. Тогда $G = O_3(G) \rtimes C$, где $O_3(G)$ абелева периода 9, а C — локально циклическая 2-группа, действующая регулярно на $O_3(G)$. В частности, G локально конечна.*

Теорема 1 позволяет обобщить основной результат из [1].

Теорема 2 [1]. *Пусть группа G удовлетворяет условию* (H) *и не содержит элементов порядка 6. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.*

(1) *$G = O_3(G) \rtimes T$, где $O_3(G)$ абелева периода 9, а T либо локально циклическая 2-группа, либо кватернионная группа порядка 8 или 16. В этом случае G локально конечна.*

(2) *$G = O_2(G) \rtimes R$, где $O_2(G)$ нильпотентна ступени нильпотентности, не превосходящей 2, а R — 3-группа с единственной подгруппой порядка 3, действующая свободно на $O_2(G)$.*

(3) *$G = O_2(G) \rtimes D$, где D является группой диэдра порядка 6 или 18, а $O_2(G)$ периода 4 и ступени нильпотентности, не превосходящей 2. В этом случае G локально конечна.*

Из теоремы 2 вытекают

Следствие 1. *Пусть G удовлетворяет условию* (H) *и не содержит элементов порядка* 6. *Тогда $\Omega(G)$ — локально конечная группа периода* 72. *Более того, $G/\Omega(G)$ является либо* 3*-группой, либо* 2*-группой (локально циклической либо изоморфной $C_2 \times C_2$ или D_8), либо $G/\Omega(G)$ изоморфна S_3.*

Следствие 2. *Пусть G удовлетворяет условию* (H) *и не содержит элементов порядка* 6. *Если G не содержит элементов порядка* 27, *то она локально конечна.*

§ 2. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе G обозначает группу, удовлетворяющую условиям теоремы 1. Положим

$$\Gamma_n(G) = \{g \in G \mid g \text{ порядка } n\}.$$

Группа K включает в себя $C_2 \times C_2$, если найдутся две подгруппы $L, N \leq K$ такие, что $N \lhd L$ и $L/N \simeq C_2 \times C_2$. Группа K называется $C_2 \times C_2$*-свободной*, если K не включает в себя $C_2 \times C_2$.

При доказательстве некоторых лемм используются вычисления в GAP [2].

Лемма 1. *Пусть $a, b \in \Gamma_2(G)$, тогда $(ab)^9 = 1$. В частности, все инволюции в G сопряжены, и $\Gamma_2(G) = a^G = a^{\Gamma_2(G)}$.*

Доказательство. Пусть a и b — две инволюции из G. Тогда $\langle a, b\rangle \simeq D_{2n}$, и поскольку G является $C_2 \times C_2$-свободной, то $n \in \{1, 3, 9\}$. Так как n нечетно, найдется $c \in \Gamma_2(D_{2n})$ такая, что $a = b^c$. Это доказывает вторую часть утверждения леммы. □

Лемма 2. *Пусть $a \in \Gamma_2(G)$, $x \in \Gamma_3(G)$, $t \in \Gamma_4(G)$ такие, что $x^a = x^{-1}$ и $t^2 = a$. Тогда $[x, x^t] = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим группы

$$H(i, j) = \langle t, x \mid t^4, x^3, (t^2x)^2, (tx)^i, [t, x]^j\rangle$$

($i, j \in \{8, 9\}$). Вычисления в GAP [2] показывают, что $H(8, 8) \simeq C_4$, $H(8, 9) \simeq (C_3 \times C_3) \rtimes C_4$, $H(9, 8) \simeq PSL(2, 17)$ и $H(9, 9) = 1$. □

Лемма 3. *Пусть $x \in \Gamma_3(G)$ и $a \in \Gamma_2(G)$ такие, что $x^a = x^{-1}$. Тогда $C_G(x)$ является абелевой* 3*-группой периода* 9, *которую инвертирует* a.

Доказательство. Очевидно, что $C = C_G(x)$ является a-инвариантной 3-подгруппой G. Пусть $K = C \rtimes \langle a\rangle$, тогда $C_K(a) = \langle a\rangle$, поэтому a действует на C без неподвижных точек. По [3, лемма 4] C абелева. Поскольку любой элемент из C является произведением двух инволюций из K, лемма следует из условия (H.2). □

Лемма 4. *Пусть $a \in \Gamma_2(G)$, $x \in \Gamma_9(G)$ такие, что $x^a = x^{-1}$, и пусть $t \in \Gamma_4(G)$ такой, что $t^2 = a$. Тогда $[x, x^t] = 1$.*

Доказательство. Положим $y = x^t$. По лемме 2 $[x^3, y^3] = 1$, поэтому $y^3, x \in C_G(x^3)$ и по лемме 3 $[x, y^3] = 1$. Аналогично $x^3, y \in C_G(y^3)$ и $[x^3, y] = 1$. Стало быть, $Z = \langle x^3, y^3\rangle \leq Z(\langle x, y\rangle)$, $\langle x, y\rangle \leq C_G(Z) \leq C_G(x^3)$, и по лемме 3 $\langle x, y\rangle$ абелева. □

Фиксируем элемент $t \in \Gamma_4(G)$ и положим

$$\Theta = t^G = \{t^g \mid g \in G\} \quad \text{и} \quad \Theta^- = \{u^{-1} \mid u \in \Theta\}.$$

Лемма 5. $\Theta \cap \Theta^- = \varnothing$ *и* $\Theta \cup \Theta^- = \Gamma_4(G)$.

Доказательство. Если $u \in \Theta \cap \Theta^-$, то найдется $g \in G$ такой, что $u^g = u^{-1}$. Очевидно, порядок g не может быть нечетным, поэтому g является 2-элементом. Если $g \in \Gamma_2(G)$, то $\langle u^2, g\rangle \simeq C_2 \times C_2$; противоречие. Если $g \in \Gamma_{2^n}(G)$ и $n \geq 2$, то $\langle u, g\rangle \leq C_G(g^{2^{n-1}})$; противоречие с тем, что централизатор любой инволюции из G является локально циклической 2-группой.

Пусть $\Theta = t^G$ и $u \in \Gamma_4(G)$ такой, что $u^2 \neq t^2$. Тогда $x = t^2u^2 \in \Gamma_3(G) \cup \Gamma_9(G)$ и по лемме 4 $\langle t, x\rangle$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle t\rangle$ и ядром $N = \langle x, x^t\rangle$. Пусть $y \in N$ такой, что $(t^2)^y = u^2$. Тогда $\langle t^y\rangle \leq C_G(u^2)$ и, следовательно, $t^y = u$ либо $t^y = u^{-1}$, поскольку $C_G(u^2)$ локально циклическая. □

Лемма 6. *Пусть* $t, u \in \Theta$. *Тогда* $(tu)^2 = (tu^{-1})^9 = 1$.

Доказательство. Пусть $x = t^2u^2$, тогда $F = \langle x, t\rangle$ — группа Фробениуса и, рассуждая, как в доказательстве леммы 5, имеем $u \in F$. Поскольку $\langle t\rangle$ и $\langle u\rangle$ являются дополнениями F и $x^9 = 1$, получаем заключение леммы. □

Лемма 7. *Пусть* $a, b, c \in \Gamma_2(G)$. *Тогда* $abc \in \Gamma_2(G)$.

Доказательство. По лемме 5 найдутся $t_1, t_2, t_3 \in \Theta$ такие, что $t_1^2 = a$, $t_2^2 = b$ и $t_3^2 = c$. По лемме 6 в группе $K = \langle t_1, t_2, t_3\rangle$ выполнены следующие соотношения:

$$\mathscr{R}(t_1, t_2, t_3) = \bigl\{\bigl(t_\ell t_m^{t_n}\bigr)^2 = \bigl(t_\ell^{-1} t_m^{t_n}\bigr)^9 = 1 \mid \ell, m, n \in \{1,2,3\}\bigr\}.$$

Вычисления в GAP [2] показывают, что $\langle t_1', t_2', t_3' \mid \mathscr{R}(t_1', t_2', t_3')\rangle$ изоморфна группе Фробениуса $(C_9 \times C_9 \times C_9 \times C_9) \rtimes C_4$. Таким образом, $\langle t_1, t_2, t_3\rangle \leq G$ является группой Фробениуса с дополнениями $\langle t_1\rangle$, $\langle t_2\rangle$ и $\langle t_3\rangle$, откуда следует заключение леммы. □

Лемма 8. *Пусть* $R = \langle \Gamma_2(G)\rangle$. *Тогда* $R = O_3(R) \rtimes \langle a\rangle$ *для любого* $a \in \Gamma_2(G)$. *Более того,* R *является группой Фробениуса, и* $O_3(R)$ *абелева периода* 9.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Gamma_2(G)$, тогда по лемме 7 $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^2 = 1$, если n нечетно, и $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^9 = 1$, если n четно. Пусть S — подмножество в G, состоящее из произведений четного числа инволюций. По лемме 7 если $s \in S$ и $a \in \Gamma_2(G)$, то $s^a = s^{-1}$ и, поскольку $s^9 = 1$, S является абелевой 3-подгруппой в G периода 9. Так как $\Gamma_2(G) = a^G = \{a^b \mid b \in \Gamma_2(G)\} = \{a^{ab} \mid b \in \Gamma_2(G)\}$ и $ab \in S$, то $R = S\langle a\rangle$ и $S = O_3(R)$. □

Доказательство теоремы 1. Пусть a — инволюция из G. Если $C_G(a)$ конечен, то G локально конечна [4, 14.3.8] и заключение следует из [1, лемма 2.1]. Поэтому можно считать, что порядок $C_G(a)$ бесконечен.

Пусть R и S — подгруппы в G, определенные в доказательстве леммы 8. Поскольку R нормальна в G, а S характеристическая в R, то S нормальна в G. Группа $\overline{G} = G/S$ содержит единственную инволюцию $\bar{a}$, которая должна лежать в центре $\overline{G}$, следовательно, $\overline{G}$ — 2-группа и по [1, лемма 1.5] локально циклическая или локально кватернионная. Произведение двух элементов из G, порядки которых не превосходят 4, имеет порядок, не превосходящий 9, поэтому если $\overline{G}$ локально кватернионная, то $\overline{G}$ конечна порядка не более 16, что противоречит предположению о бесконечности $C_G(a)$. Таким образом, группа $\overline{G}$ локально циклическая, и по лемме 8 группа S является 3-группой периода 9. □

§ 3. Доказательство остальных результатов

Доказательство теоремы 2. Пусть группа G удовлетворяет условию (Н) и не содержит элементов порядка 6. По теореме 1 G не содержит подгрупп, названных в [1] *запрещенными* (т. е. таких подгрупп Y, которые порождаются инволюцией и элементом порядка 3, при этом любая максимальная 2-подгруппа в Y локально циклическая). По [1] G удовлетворяет заключению теоремы 2.

Ограничения на периоды подгрупп в пп. (1)–(3) — очевидные следствия условия (Н.2). $\square$

Доказательство следствия 1. Сразу вытекает из теоремы 2. $\square$

Доказательство следствия 2. Пусть группа G удовлетворяет условию следствия 2. Единственный случай, когда группа G может быть не локально конечной, описан в п. (2) теоремы 2. В этом случае если $\Gamma_{27}(G) = \varnothing$, то $G/\Omega(G)$ — группа периода 3 и потому локально конечна [4, 14.2.3]. По следствию 1 $\Omega(G)$ локально конечна и по [4, 14.3.1] G локально конечна. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.* О $\{2,3\}$-группах, не содержащих элементов порядка 6 // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 6. С. 710–721.

2. *The GAP Group.* GAP – Groups, Algorithms, Programming – a system for computational discrete algebra. Version 4.7.8. 2015.

3. *Мазуров В. Д.* О группах периода 60 с заданными порядками элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 329–346.

4. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York; Berlin: Springer-Verl., 1982. (Grad. Texts Math.; V. 80).

Статья поступила 17 августа 2015 г.

Enrico Jabara (Ябара Энрико)
DFBC Università di Ca'Foscari,
Dorsoduro 3484/D, 30123 Venezia, Italy
jabara@unive.it