Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 517.98+530.1

p–АДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТВЕРДЫХ СФЕР С ТРЕМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

О. Н. Хакимов

Аннотация. Изучается p-адическая модель твердых сфер (ТС) с тремя состояниями на дереве Кэли. При $k = 2$ исследованы трансляционно-инвариантные и периодические p-адические меры Гиббса для модели ТС. Доказано, что при $p \neq 2$ любая p-адическая мера Гиббса ограничена. В частности, показано несуществование сильного фазового перехода для модели ТС на дереве Кэли порядка k.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.414

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, мера Гиббса, модель ТС, трансляционно-инвариантная мера, p-адические числа.

1. Определения и факты

В [1, 2] были изучены вещественные гиббсовские меры для модели ТС с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 1$. В данной работе изучим p-адический аналог этой модели.

Известно, что p-адические модели в физике не могут быть описаны с использованием обычной теории вероятностей [3–5]. В [3] абстрактная p-адическая теория вероятностей была развита посредством теории неархимедовых мер [6]. Вероятностные процессы на поле p-адических чисел изучались многими авторами (см. [7–12]). Неархимедов аналог теоремы Колмогорова был доказан в [10, 13, 14].

Описание предельных мер Гиббса для данного гамильтониана является одной из основных задач в теории гиббсовских мер. Полный анализ множества таких мер довольно трудоемкий, поэтому большая часть работ по этой тематике посвящена изучению гиббсовских мер на дереве Кэли [1, 15–18].

В [19] изучена p-адическая модель ТС с тремя состояниями на дереве Кэли порядка k. Было доказано, что если $k^2 - 4 \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, то существует единственная трансляционно-инвариантная p-адическая мера Гиббса для модели ТС. В данной работе исследуем случай $k^2 - 4 \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. В этом случае будет показана неединственность p-адических мер Гиббса для модели ТС. Также рассмотрим проблему ограниченности p-адических мер Гиббса при любом k.

1.1. p-Адические числа и меры. Каждое рациональное число $x \neq 0$ может быть представлено в виде $x = p^r \frac{n}{m}$, где $r, n \in \mathbb{Z}$, m — положительное число, $(n, m) = 1$, причем m и n не делятся на p, и p — фиксированное простое число. p-Адическая норма $|x|_p$ определяется по формуле

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Она удовлетворяет сильному неравенству треугольника:

$$|x+y|_p \le \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Это свойство показывает неархимедовость нормы. Из него непосредственно вытекают следующие свойства p-адической нормы:

1) если $|x|_p \ne |y|_p$, то $|x-y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$;

2) если $|x|_p = |y|_p$, то $|x-y|_p \le |x|_p$.

Пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p-адической норме приводит к полю p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ для каждого простого p [20].

Начиная с поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, можно получить либо поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо одно из полей p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ (теорема Островского). Каждое p-адическое число $x \ne 0$ имеет единственное каноническое разложение

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots), \tag{1.1}$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и x_j — целые числа, $0 \le x_j \le p-1$, $x_0 > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$, (см. [5, 20, 21]). В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

Теорема 1 [5]. *Уравнение* $x^2 = a$, $0 \ne a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1 p + \dots)$, $0 \le a_j \le p-1$, $a_0 > 0$, *имеет решение* $x \in \mathbb{Q}_p$ *тогда и только тогда, когда*

1) $\gamma(a)$ *четное*

2) $y^2 \equiv a_0 (\operatorname{mod} p)$ *разрешимо, если* $p \ne 2$, *и* $a_1 = a_2 = 0$, *если* $p = 2$.

Множество $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \le 1\}$ называется *множеством целых p-адических чисел*, $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \le 1\}$ — *множеством p-адических единиц*.

Следующая теорема известна как лемма Гензеля.

Теорема 2 [20]. *Пусть* $F(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$ *— многочлен с целыми p-адическими коэффициентами, а* $F'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + nc_n x^{n-1}$ *— его производная. Предположим, что* a_0 *— целое p-адическое число, для которого* $F(a_0) \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, *а* $F'(a_0) \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. *Тогда существует единственное целое p-адическое число a такое, что*

$$F(a) = 0 \quad \text{и} \quad a \equiv a_0 (\operatorname{mod} p).$$

Для $a \in \mathbb{Q}_p$ и $r > 0$ обозначим

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p < r\}.$$

p-Адический *логарифм* определяется как ряд

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n},$$

который сходится для $x \in B(1,1)$, p-адическая экспонента — как ряд

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

сходящийся для $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$.

Лемма 1. *Пусть* $x \in B(0, p^{-1/(p-1)}$. *Тогда*

$$|\exp_p(x)|_p = 1, \quad |\exp_p(x) - 1|_p = |x|_p, \quad |\log_p(1+x)|_p = |x|_p,$$

$$\log_p(\exp_p(x)) = x, \quad \exp_p(\log_p(1+x)) = 1 + x.$$

Более подробно об основах p-адического анализа и p-адической математической физики можно найти в [5, 20, 21].

Пусть $(X, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, где $\mathscr{B}$ — алгебра подмножеств в X. Функция $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{Q}_p$ называется *p-адической мерой*, если для любого набора $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{B}$ такого, что $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, имеет место

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

p-Адическая мера μ называется *вероятностной,* если $\mu(X) = 1$ (см. [13]). p-Адическая мера μ называется *ограниченной*, если $\{|\mu(A)|_p : A \in \mathscr{B}\} < \infty$ (см. [3]).

1.2. Дерево Кэли. Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево (граф без циклов), из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, V — множество вершин и L — множество ребер. Две вершины x и y называют *ближайшими соседями*, если существует ребро $l \in L$, соединяющее их, при этом пишут $l = \langle x, y\rangle$. Расстояние $d(x, y)$ — число ребер кратчайшего пути, соединяющего x и y.

Пусть $x^0 \in V$ — фиксированная точка. Введем следующие обозначения:

$$W_n = \{x \in V : d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=1}^{n} W_m,$$

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in W_n.$$

1.3. Модель ТС. Рассмотрим модель ТС с тремя состояниями на дереве Кэли. В этой модели каждой вершине $x \in V$ ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \{0, 1, 2\}$. Соотношение $\sigma(x) \in \{1, 2\}$ означает, что вершина $x \in V$ «занята», а $\sigma(x) = 0$ — что $x \in V$ «вакантна». Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x),\ x \in V\}$ на дереве Кэли есть функция из V в $\{0, 1, 2\}$. Конфигурация в V_n определяется аналогично.

Конфигурация σ называется *допустимой на дереве Кэли*, если $\sigma(x)+\sigma(y) \notin \{0, 3\}$ для любой пары ближайших соседей x и y в V. Обозначим через Ω и Ω_n множества всех допустимых конфигураций на V и V_n.

Для фиксированной $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}_p^3$ определим p-адический гамильтониан модели ТС на V_n:

$$H_\lambda(\sigma) = \sum_{x \in V_n} \log_p \lambda_{\sigma(x)}, \quad \sigma \in \Omega_n. \tag{1.2}$$

2. Построение p-адической меры Гиббса

Построим p-адическую меру Гиббса для модели (1.2). Так как в определении p-адической меры Гиббса используется $\exp_p(x)$, все следующие ниже величины должны принадлежать множеству

$$\mathscr{E}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1,\ |x - 1|_p < p^{-1/(p-1)}\}.$$

Как и в классическом случае, рассмотрим специальный класс меры Гиббса.

Для $\sigma \in \Omega_n$ определим $\#\sigma = \sum\limits_{x\in V_n} \mathbf{1}(\sigma(x) \geq 1))$ (т. е. $\#\sigma$ — число занятых вершин в σ).

Пусть $\mathbf{z} : x \to \mathbf{z}_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in \mathscr{E}_p^3$ — векторнозначная функция на V. Рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Для $\lambda \in \mathscr{E}_p$ рассмотрим p-адическое вероятностное распределение $\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}$ на Ω_n, которое определяется как

$$\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\sigma) = Z_{\mathbf{z},n}^{-1} \lambda^{\#\sigma} \prod_{x\in W_n} z_{\sigma(x),x}, \quad \sigma \in \Omega_n, \tag{2.1}$$

где $Z_{\mathbf{z},n}$ — нормирующая константа:

$$Z_{\mathbf{z},n} = \sum_{\omega\in\Omega_n} \lambda^{\#\omega} \prod_{x\in W_n} z_{\omega(x),x}. \tag{2.2}$$

Говорят, что p-адическое вероятностное распределение $\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}$ *согласовано*, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma \in \Omega_n$

$$\sum_{\substack{\omega\in\Omega_{n+1}:\\ \omega|_{\Omega_n}\equiv\sigma}} \mu_{\mathbf{z}}^{(n+1)}(\omega) = \mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\sigma). \tag{2.3}$$

В этом случае аналогично теореме Колмогорова [13] (см. также [10, 14]) существует единственная мера $\mu_{\mathbf{z}}$ на Ω такая, что $\mu_{\mathbf{z}}(\{\omega|_{\Omega_n} \equiv \sigma\}) = \mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\sigma)$ для всех n и $\sigma \in \Omega_n$.

Определение 1. Мера $\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}$, определенная равенством (2.1) и удовлетворяющая (2.3), называется *p-адической мерой Гиббса для модели* (1.2), соответствующей функции $\mathbf{z} : x \in V \setminus \{x^0\} \to \mathbf{z}_x$.

Если существуют две p-адические меры Гиббса $\mu_{\mathbf{z}}$ и $\mu_{\mathbf{t}}$ такие, что только одна из них ограничена, то говорят, что существует *фазовый переход*. Более того, если существует последовательность множеств $\{A_n\}$ такая, что $A_n \in \Omega_n$ и $|\mu_{\mathbf{z}}(A_n)|_p \to 0$, $|\mu_{\mathbf{t}}(A_n)|_p \to \infty$ при $n \to \infty$, то говорят, что существует *сильный фазовый переход*. Если существуют две ограниченные p-адические меры Гиббса, то говорят, что существует *квазифазовый переход* [18].

Следующая теорема дает условие на $\mathbf{z}_x$, гарантирующее согласованность распределения $\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}$.

Теорема 3 [19]. *Вероятностное распределение $\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, заданное формулой (2.1), согласовано тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:*

$$z'_{i,x} = \lambda \prod_{y\in S(x)} \frac{1 + z'_{i,y}}{z'_{1,y} + z'_{2,y}}, \quad i = 1, 2, \tag{2.4}$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x}/z_{0,x} \in \mathscr{E}_p$, $i = 1, 2$.

3. Трансляционно-инвариантная мера Гиббса

Решение вида $\mathbf{z}_x = (z_1, z_2) \in \mathscr{E}_p^2$, $x \neq x_0$, системы уравнений (2.4) называется *трансляционно-инвариантным.* Соответствующая p-адическая мера Гиббса трансляционно-инвариантного решения системы уравнений (2.4) называется *трансляционно-инвариантной мерой Гиббса.*

Для того чтобы найти трансляционно-инвариантные p-адические меры Гиббса для модели ТС, рассмотрим следующие уравнения:

$$z_i = \lambda\left(\frac{1+z_i}{z_1+z_2}\right)^k, \quad i=1,2. \tag{3.1}$$

Теорема 4 [19]. 1. *Пусть $p=2$. Если k делится на 4, то для модели* (1.2) *существует единственная трансляционно-инвариантная* 2*-адическая мера Гиббса.*

2. *Пусть $p\neq 2$. Если k^2-4 не делится на p, то для модели* (1.2) *существует единственная трансляционно-инвариантная p-адическая мера Гиббса.*

Замечание 1. Условия теоремы 4 не являются необходимыми для единственности трансляционно-инвариантных p-адических мер Гиббса [19]. Возникает естественный вопрос: существует ли фазовый переход для модели (1.2) на дереве Кэли порядка k? Очевидно, что при $k=2$ условие теоремы 4 не выполняется для любого простого числа p. В [19] показано, что при $k=2$ и $p=3$ существуют три трансляционно-инвариантные p-адические меры Гиббса.

В этой работе исследуем трансляционно-инвариантные p-адические меры Гиббса для модели (1.2) на дереве Кэли порядка два.

Утверждение 1. *Пусть $k=2$ и $p>3$. Тогда система уравнений* (3.1) *имеет единственное решение на инвариантном множестве $\{\mathbf{z}\in\mathscr{E}_p^2 : z_1=z_2\}$.*

Доказательство. Пусть $z_i=t$, $i=1,2$. Тогда из (3.1) получим

$$4t^3-\lambda(t+1)^2=0.$$

Функция $f(t)=4t^3-\lambda(t+1)^2$ является многочленом с целыми p-адическими коэффициентами. Учитывая, что $\lambda\in\mathscr{E}_p$ и $p>3$, из $f(1)=4(1-\lambda)$ и $f'(1)=8+4(1-\lambda)$ имеем $f(1)\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$ и $f(1)\not\equiv 0(\operatorname{mod} p)$. В силу леммы Гензеля существует единственное число $t^*\in\mathscr{E}_p$ такое, что $f(t^*)=0$. Это означает, что функциональное уравнение (3.1) имеет единственное решение $\mathbf{z}^*=(t^*,t^*)$ на множестве $\{\mathbf{z}\in\mathscr{E}_p^2 : z_1=z_2\}$. $\square$

Обозначим $M_p=\{a\in\mathbb{N} : a$ — квадратичный вычет по модулю $p\}$.

Утверждение 2. *Пусть $k=2$ и $p>3$. Если*

$$\lambda\in\bigcup_{a\in M_p}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathscr{E}_p : |16x-16-3ap^{2n}|_p<p^{-2n}\},$$

то система уравнений (3.1) *имеет два решения на инвариантном множестве $\{\mathbf{z}\in\mathscr{E}_p^2 : z_1\neq z_2\}$.*

Доказательство. Вычитая второе уравнение (3.1) из первого, получим

$$(z_1-z_2)\left(1-\lambda\frac{(2+z_1+z_2)}{(z_1+z_2)^2}\right)=0.$$

Так как $z_1\neq z_2$, имеем

$$(z_1+z_2)^2-\lambda(z_1+z_2)-2\lambda=0. \tag{3.2}$$

Решив квадратное уравнение (3.2), выводим

$$z_1+z_2=\frac{\lambda\pm\sqrt{\lambda(\lambda+8)}}{2}. \tag{3.3}$$

Поскольку $\lambda \in \mathscr{E}_p$ и $p > 3$, имеем

$$\lambda = 1 + \lambda_1 p + \lambda_2 p^2 + \ldots, \quad \lambda + 8 = 9 + \lambda_1 p + \lambda_2 p^2 + \ldots.$$

В силу теоремы 1 существуют числа $\sqrt{\lambda}$ и $\sqrt{\lambda+8}$ в $\mathbb{Q}_p$. С другой стороны, z_1 и z_2 должны удовлетворять $|z_1 + z_2 - 2|_p < 1$. Заметив, что

$$\sqrt{\lambda(\lambda+8)} = 3 + \lambda_1' p + \lambda_2' p^2 + \ldots,$$

получим для $z_1 + z_2 = \frac{\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda+8)}}{2}$

$$|z_1 + z_2 - 2|_p = |\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda+8)} - 4|_p = |(\lambda_1 + \lambda_2')p + \ldots|_p < 1$$

и для $z_1 + z_2 = \frac{\lambda-\sqrt{\lambda(\lambda+8)}}{2}$

$$|z_1 + z_2 - 2|_p = |\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda+8)} - 4|_p = |-6 + (\lambda_1' - \lambda_2')p + \ldots|_p = 1.$$

Подставляя $z_1 + z_2 = \frac{\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda+8)}}{2}$ в (3.1), найдем

$$z = \left(\frac{2(1+z)}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+8}}\right)^2, \tag{3.4}$$

откуда

$$z^{\pm} = \frac{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+8})(2\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{2(\lambda - 4 + \sqrt{\lambda(\lambda+8)})})}{8}. \tag{3.5}$$

Мы должны проверить существование $\sqrt{2(\lambda - 4 + \sqrt{\lambda(\lambda+8)})}$ в $\mathbb{Q}_p$ и $z^{\pm} \in \mathscr{E}_p$. В силу теоремы 1 число $\sqrt{2(\lambda - 4 + \sqrt{\lambda(\lambda+8)})}$ существует тогда и только тогда, когда существуют $n \in \mathbb{N}$, $a \in M$ и $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p$ такие, что

$$2(\lambda - 4 + \sqrt{\lambda(\lambda+8)}) = p^{2n}(a + \varepsilon p).$$

Отсюда найдем

$$\lambda = 1 + \frac{3a}{16}p^{2n} + \epsilon p^{2n+1}, \quad \text{где } |\epsilon|_p \le 1,$$

что эквивалентно $|16\lambda - 16 - 3ap^{2n}|_p < p^{-2n}$. Теперь проверим, что $z^{\pm} \in \mathscr{E}_p$. Пусть $|16\lambda - 16 - 3ap^{2n}|_p < p^{-2n}$ для некоторого натурального числа n и $a \in M_p$. Тогда

$$\begin{aligned} |z^{\pm} - 1|_p &= |(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+8})(2\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{2(\lambda - 4 + \sqrt{\lambda(\lambda+8)})}) - 8|_p \\ &= |(4 + \alpha p)(2 + \beta p \pm \gamma p^n) - 8|_p < 1, \quad \text{где } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_p. \end{aligned}$$

Это означает, что $z^{\pm} \in \mathscr{E}_p$. Таким образом, функциональное уравнение (3.1) имеет два решения $\mathbf{z}^{(1)} = (z^+, z^-)$ и $\mathbf{z}^{(2)} = (z^-, z^+)$ на множестве $\{\mathbf{z} \in \mathscr{E}_p^2 : z_1 \ne z_2\}$, если $|16\lambda - 16 + 3ap^{2n}|_p < p^{-2n}$. $\square$

Из утверждений 1 и 2 следует

Теорема 5. *Пусть $k=2$ и $p>3$. Тогда верны следующие утверждения:*
1) *если*

$$\lambda \notin \bigcup_{a\in M_p}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in \mathscr{E}_p : |16x-16-3ap^{2n}|_p<p^{-2n}\},$$

то существует единственная трансляционно-инвариантная p-адическая мера Гиббса для модели (1.2);
2) *если*

$$\lambda \in \bigcup_{a\in M_p}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in \mathscr{E}_p : |16x-16-3ap^{2n}|_p<p^{-2n}\},$$

то существуют три трансляционно-инвариантные p-адические меры Гиббса для модели (1.2).

Замечание 2. Теорему 5 можно считать полным описанием множества всех трансляционно-инвариантных p-адических мер Гиббса для модели (1.2) при $k=2$.

4. Периодическая мера Гиббса

В этом пункте исследуем периодические p-адические меры Гиббса для модели (1.2) и используем групповую структуру дерева Кэли. Пусть G_k — свободное произведение $k+1$ циклических групп $\{e,a_i\}$ второго порядка с образующими $a_1,a_2,\dots,a_{k+1}$ соответственно, т. е. $a_i^2=e$.

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерево Кэли порядка k и группой G_k (см. [22]).

Это соответствие строится следующим образом. Произвольной фиксированной вершине $x_0\in V$ поставим в соответствие единичный элемент e группы G_k. Так как рассматриваемый граф без ограничения общности можно считать плоским, каждой соседней вершине точки x_0 (т. е. e) поставим в соответствие образующую a_i, $i=1,2,\dots,k+1$, по положительному направлению.

Теперь в каждой вершине a_i определим слово длины два a_ia_j соседних вершин a_i. Поскольку одна из соседних вершин вершины a_i есть e, положим $a_ia_i=e$ и тогда нумерация остальных соседних вершин a_i производится однозначно по вышеприведенному правилу нумерации. Далее, для соседних вершин вершины a_ia_j определим слово длины три следующим образом. Так как одна из соседних для a_ia_j вершин есть a_i, положим $a_ia_ja_j=a_i$ и тогда нумерация остальных соседних вершин производится однозначно и они имеют вид $a_ia_ja_l$, $i,j,l=1,2,\dots,k+1$. Это соответствие согласуется с предыдущим шагом, так как $a_ia_ja_j=a_ia_j^2=a_i$. Таким образом, можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством вершин дерева Кэли Γ_k и группой G_k.

Представление, построенное выше, называется *правым*, так как в этом случае если x и y — соседние вершины, а g и $h\in G_k$ — соответствующие им элементы группы, то либо $g=ha_i$, либо $h=ga_j$ для некоторых i или j. Аналогично определяется левое представление. Для удобства будем писать x вместо g, если $x\mapsto g$.

Рассмотрим в группе G_k (соответственно на дереве Кэли) преобразование левого (правого) сдвига, определяемое следующим образом: для $y\in G_k$ положим

$$\tau_y(x)=yx \quad \text{для всех } x\in G_k.$$

Определение 2 [15]. Пусть $\widetilde{G}_k$ — нормальная подгруппа группы G_k. Множество $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_x : x \in G_k\}$ называется $\widetilde{G}_k$*-периодическим*, если $\mathbf{z}_{\tau_y(x)} = \mathbf{z}_x$ для любых $x \in G_k$ и $y \in \widetilde{G}_k$. Соответствующая p-адическая мера Гиббса $\mu_{\mathbf{z}}$ называется $\widetilde{G}_k$*-периодической*.

Очевидно, что G_k-периодическая мера трансляционно-инвариантна. Обозначим $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : \text{длина слова } x \text{ четная}\}$. Это множество является нормальной подгруппой индекса два [22].

Следующая теорема характеризует множество всех периодических p-адических мер Гиббса для модели (1.2).

Теорема 6. *Пусть $\widetilde{G}_k$ — нормальная подгруппа конечного индекса в G_k. Тогда любая $\widetilde{G}_k$-периодическая p-адическая мера Гиббса для модели* (1.2) *либо трансляционно-инвариантная, либо $G_k^{(2)}$-периодическая.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $F : \mathscr{E}_p^2 \to \mathscr{E}_p^2$, определенную как

$$F(\mathbf{z}) = (F_1(\mathbf{z}), F_2(\mathbf{z})), \quad \text{где } F_i(\mathbf{z}) = \frac{1+z_i}{z_1+z_2},\ i = 1, 2.$$

Легко проверить, что $F_i(\mathbf{z}) = F_i(\mathbf{t})$, $i = 1, 2$, в том и только в том случае, если $\mathbf{z} = \mathbf{t}$. Следовательно, $F(\mathbf{z}) = F(\mathbf{t})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{z} = \mathbf{t}$. Из этого свойства, как в доказательстве теоремы 2 в [1], следует, что любая $\widetilde{G}_k$-периодическая мера Гиббса либо трансляционно-инвариантная, либо $G_k^{(2)}$-периодическая. $\square$

Согласно теореме 6 для нахождения периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса для модели (1.2) достаточно исследовать следующую систему уравнений:

$$z_1 = \lambda\left(\frac{1+t_1}{t_1+t_2}\right)^k,\ z_2 = \lambda\left(\frac{1+t_2}{t_1+t_2}\right)^k,\ t_1 = \lambda\left(\frac{1+z_1}{z_1+z_2}\right)^k,\ t_2 = \lambda\left(\frac{1+z_2}{z_1+z_2}\right)^k,$$
$$z_1 \neq t_1,\ z_2 \neq t_2. \tag{4.1}$$

Рассмотрим (4.1) при $k = 2$. Предположим, что $z_1 = z_2 = z$. Тогда из (4.1) получим

$$z = f(f(z)), \quad \text{где } f(z) = \lambda\left(\frac{1+z}{2z}\right)^2.$$

Заметим, что всякое решение уравнения $f(z)-z = 0$ является решением уравнения $f(f(z)) - z = 0$. Но нас интересуют только периодические (не являющиеся трансляционно-инвариантными) решения. Поэтому рассмотрим уравнение

$$\frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z} = 0,$$

которое эквивалентно уравнению

$$\lambda z^2 - 2(2-\lambda)z + \lambda = 0. \tag{4.2}$$

Это уравнение имеет в $\mathbb{Q}_p$ решения

$$z^{\pm} = \frac{2-\lambda \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{\lambda},$$

если в $\mathbb{Q}_p$ существует $\sqrt{1-\lambda}$.

Для того чтобы решения $z^{\pm}$ уравнения (4.2) были искомыми, надо проверить, что $z^{\pm} \in \mathscr{E}_p$ и $f(z^{\pm}) - z^* \neq 0$. Сначала исследуем, при каких $\lambda \in \mathscr{E}_p$ число $\sqrt{1-\lambda}$ существует в $\mathbb{Q}_p$. Затем проверим, что $z^{\pm} \in \mathscr{E}_p$ и $f(z^{\pm}) - z^* \neq 0$.

Лемма 2. *Пусть $\lambda \in \mathscr{E}_p$. Число $\sqrt{1-\lambda}$ существует в $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда*

$$\lambda \in \bigcup_{a\in M_p}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathscr{E}_p : |x-1+ap^{2n}|_p < p^{-2n}\}, \quad \text{если } p>2, \tag{4.3}$$

$$\lambda \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\mathscr{E}_2 : |x-1+2^{2n}|_2 < 2^{-2n-2}\}, \quad \text{если } p=2. \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $p=2$. Тогда из $\lambda\in\mathscr{E}_2$ получим

$$\lambda = 1+\lambda_2 2^2+\lambda_3 2^3+\dots, \quad \text{где } \lambda_i\in\{0,1\},\ i=2,3,\dots.$$

Отсюда в силу теоремы 1 имеем уравнение

$$1-\lambda = 2^{2n}(1+\lambda'_{2n+3}2^3+\lambda'_{2n+4}2^4+\dots), \quad n\in\mathbb{N},$$

которое эквивалентно $|\lambda-1+2^{2n}|_2 < 2^{-2n-2}$.

Пусть $p>2$. Тогда из $\lambda\in\mathscr{E}_p$ следует, что

$$\lambda = 1+\lambda_1 p+\lambda_2 p^2+\dots, \quad \text{где } \lambda_i\in\{0,1,\dots,p-1\},\ i=1,2,\dots.$$

Тогда ввиду теоремы 1

$$1-\lambda = p^{2n}(a+\lambda'_{2n+1}p+\lambda'_{2n+2}p^2+\dots), \quad n\in\mathbb{N},\ a\in M_p.$$

Следовательно, $|\lambda-1+ap^{2n}|_p < p^{-2n}$. $\square$

Теперь проверим, что $z^\pm\in\mathscr{E}_p$. Заметив, что $|\lambda|_p=1$ и $|1-\lambda|_p=p^{-2n}$, и использовав свойство p-адической нормы, получим

$$|z^\pm-1|_p = \frac{|2(1-\lambda\pm\sqrt{1-\lambda})|_p}{|\lambda|_p} = |2p^n|_p < p^{-1/(p-1)}.$$

Это означает, что $z^\pm\in\mathscr{E}_p$.

Покажем, что $f(z^\pm)-z^\pm\neq 0$:

$$f(z^\pm)-z^\pm = \lambda\left(\frac{1+z^\pm}{2z^+}\right)^2 - z^\pm = \frac{-4\sqrt{1-\lambda}(1\pm\sqrt{1-\lambda})^2}{\lambda^2}.$$

Так как $0<|1-\lambda|_p<1$, имеем $|f(z^\pm)-z^\pm|_p\neq 0$. Следовательно, $z=(z^+,z^-)$, $t=(z^-,z^+)$ и $z=(z^-,z^+)$, $t=(z^+,z^-)$ являются решениями (4.1) при $k=2$.

Таким образом, доказано

Утверждение 3. *Пусть $k=2$. Тогда (4.1) имеет по крайней мере два решения на $\mathscr{E}_p^4$, если имеют место (4.3) и (4.4).*

Из этого утверждения вытекает следующая

Теорема 7. *Пусть имеет место (4.3) при $p>2$ или (4.4) при $p=2$. Тогда для модели (1.2) существуют по крайней мере две периодические p-адические меры Гиббса на дереве Кэли порядка два.*

5. Ограниченность p-адических мер Гиббса

В этом пункте будем исследовать ограниченность p-адических мер Гиббса для модели (1.2). Напомним, что p-адическая вероятностная мера может быть неограниченной.

Лемма 3. *Пусть $\mu_{\mathbf{z}}$ — p-адическая мера Гиббса для модели* (1.2). *Тогда для нормирующей константы* (2.2) *имеет место следующая рекуррентная формула:*

$$Z_{\mathbf{z},n+1} = A_{\mathbf{z},n} Z_{\mathbf{z},n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $A_{\mathbf{z},n}$ определяется по формуле (5.2).

Доказательство. Пусть функция $\mathbf{z}' : x \to \mathbf{z}'_x = (z'_{1,x}, z'_{2,x}) \in \mathscr{E}_p^2$ удовлетворяет функциональному уравнению (2.4). Тогда для любого $z_{0,x} \in \mathscr{E}_p$ существует функция $a_{\mathbf{z}}(x)$, $x \in V$, такая, что

$$\prod_{y\in S(x)} (\lambda z_{1,y} + \lambda z_{2,y}) = a_{\mathbf{z}}(x) z_{0,x}, \qquad \prod_{y\in S(x)} (z_{0,y} + \lambda z_{i,y}) = a_{\mathbf{z}}(x) z_{i,x}, \quad i = 1, 2, \tag{5.1}$$

где $z_{i,x} = z_{0,x} z'_{i,x}/\lambda$, $i = 1, 2$. Для любой конфигурации $\sigma \in \Omega_n$ имеет место

$$\prod_{x\in W_n} \prod_{\substack{y\in S(x),\\ \sigma(x)=0}} (\lambda z_{1,y} + \lambda z_{2,y}) \prod_{\substack{y\in S(x),\\ \sigma(x)=1}} (z_{0,y} + \lambda z_{1,y}) \prod_{\substack{y\in S(x),\\ \sigma(x)=2}} (z_{0,y} + \lambda z_{2,y})$$
$$= \prod_{x\in W_n} a_{\mathbf{z}}(x) z_{\sigma(x),x} = A_{\mathbf{z},n} \prod_{x\in W_n} z_{\sigma(x),x}, \quad \text{где } A_{\mathbf{z},n} = \prod_{x\in W_n} a_{\mathbf{z}}(x). \tag{5.2}$$

Учитывая (2.1) и (2.2), из (5.2) получаем

$$1 = \sum_{\omega\in\Omega_{n+1}} \mu_{\mathbf{z}}^{(n+1)}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega_{n+1}} \frac{1}{Z_{\mathbf{z},n+1}} \lambda^{\#\omega} \prod_{x\in W_{n+1}} z_{\omega(x),x}$$
$$= \frac{A_{\mathbf{z},n}}{Z_{\mathbf{z},n+1}} \sum_{\sigma\in\Omega_n} \lambda^{\#\sigma} \prod_{x\in W_n} z_{\sigma(x),x} = \frac{A_{\mathbf{z},n}}{Z_{\mathbf{z},n+1}} Z_{\mathbf{z},n}.$$

Отсюда $Z_{\mathbf{z},n+1} = A_{\mathbf{z},n} Z_{\mathbf{z},n}$. $\square$

Теорема 8. *p-Адическая мера Гиббса для модели* (1.2) *ограничена тогда и только тогда, когда $p \neq 2$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{z}' = (z'_{1,x}, z'_{2,x}) \in \mathscr{E}_p^2$ — решение функционального уравнения (2.4) и $\mu_{\mathbf{z}}$ — p-адическая мера Гиббса соответствующей функции $\mathbf{z} = \big(z_{0,x}, \frac{z_{0,x} z'_{1,x}}{\lambda}, \frac{z_{0,x} z'_{2,x}}{\lambda}\big)$, где $z_{0,x} \in \mathscr{E}_p$. Тогда в силу леммы 3 при всех $n \geq 1$ имеем

$$Z_{\mathbf{z},n} = \prod_{x\in V_{n-1}} a_{\mathbf{z}}(x), \quad \text{где } a_{\mathbf{z}}(x) = z_{0,x}^{k-1} (z'_{1,x} + z'_{2,x})^k.$$

Так как $z_{0,x}, z'_{1,x}, z'_{2,x} \in \mathscr{E}_p$, то

$$|a_{\mathbf{z}}(x)|_p = \begin{cases} 1, & \text{если } p \neq 2, \\ 2^{-k}, & \text{если } p = 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|Z_{\mathbf{z},n}|_p = \begin{cases} 1, & \text{если } p \neq 2, \\ 2^{-k|V_{n-1}|}, & \text{если } p = 2. \end{cases}$$

Отсюда для любой конфигурации $\sigma \in \Omega$ получим

$$\left|\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\sigma)\right|_p = \frac{\left|\lambda^{\#\sigma} \prod\limits_{x\in W_n} z_{\sigma(x),x}\right|_p}{|Z_{\mathbf{z},n}|_p} = \begin{cases} 1, & \text{если } p \neq 2, \\ 2^{k|V_{n-1}|}, & \text{если } p = 2. \end{cases}$$

Это означает, что мера $\mu_{\mathbf{z}}$ ограничена тогда и только тогда, когда $p \neq 2$. $\square$

Следствие 1. *Для модели* (1.2) *не существует фазового перехода. В частности, не существует сильного фазового перехода.*

Следствие 2. *Пусть* $k = 2$ *и* $p > 3$. *Если*

$$\lambda \in \bigcup_{a\in M_p} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathscr{E}_p : |16x - 16 - 3ap^{2n}|_p < p^{-2n}\},$$

то для модели (1.2) *существует квазифазовый переход.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Martin J. B., Rozikov U. A., Suhov Yu. M.* A three state Hard-Core model on a Cayley tree // J. Nonlinear Math. Phys. 2005. V. 12, N 3. P. 432–448.
2. *Rozikov U. A., Shoyusupov Sh. A.* Fertile HC models with three states on a Cayley tree // Theor. Math. Phys. 2008. V. 156, N 3. P. 1319–1330.
3. *Khrennikov A. Yu.* Non-Archimedean analysis: Quantum paradoxes, dynamical systems and biological models. Dordrecht: Kluwer, 1997.
4. *Marinari E., Parisi G.* On the p-adic five point function // Phys. Lett. B. 1988. V. 203. P. 52–54.
5. *Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I.* p-Adic analysis and mathematical physics. Singapore: World Sci., 1994.
6. *Van Rooij A. C. M.* Non-Archimedean functional analysis. New York: M. Dekker, 1978.
7. *Albeverio S., Karwowski W.* A random walk on p-adics, the generator and its spectrum // Stochastic Processes Appl. 1994. V. 53. P. 1–22.
8. *Albeverio S., Zhao X.* Measure-valued branching processes associated with random walks on p-adics // Ann. Probab. 2000. V. 28. P. 1680–1710.
9. *Yasuda K.* Extension of measures to infinite-dimensional spaces over p-adic field // Osaka J. Math. 2000. V. 37. P. 967–985.
10. *Ludkovsky S., Khrennikov A.* Stochastic processes in non-Archimedean spaces with values in non-Archimedean fields // Markov Process. Relat. Fields. 2003. V. 9, N 1. P. 131–162.
11. *Khrennikov A. Yu., Mukhamedov F. M., Mendes J. F.* On p-adic Gibbs measures of the countable state Potts model on the Cayley tree // Nonlinearity. 2007. V. 20. P. 2923–2937.
12. *Rozikov U. A., Khakimov O. N.* p-Adic Gibbs measures and Markov random fields on countable graphs // Theor. Math. Phys. 2013. V. 175, N 1. P. 518–525.
13. *Ganikhodjaev N. N., Mukhamedov F. M., Rozikov U. A.* Phase transitions of the Ising model on $\mathbb{Z}$ in the p-adic number field // Uzbek. Math. J. 1998. V. 4. P. 23–29.
14. *Khrennikov A., Ludkovsky S.* On infinite products of non-Archimedean spaces // Indag. Math. 2002. V. 13, N 2. P. 177–183.
15. *Gandolfo D., Rozikov U. A., Ruiz J.* On p-adic Gibbs measures for hard core model on a Cayley tree // Markov Process. Relat. Fields. 2012. V. 18. P. 701–720.
16. *Bleher P. M., Ruiz J., Zagrebnov V. A.* On the purity of the limiting Gibbs state for the Ising model on the Bethe lattice // J. Stat. Phys. 1995. V. 79. P. 473–482.
17. *Georgii H.-O.* Gibbs measures and phase transitions. Berlin: Walter de Gruyter, 1988.
18. *Mukhamedov F. M.* On p-adic quasi Gibbs measures for $q+1$-state Potts model on the Cayley tree // p-Adic Numb., Ultram. Anal. Appl. 2010. V. 2. P. 241–251.
19. *Khakimov O. N.* p-Adic Gibbs measures for the model of Hard Spheres with three states on the Cayley tree // Theor. Math. Phys. 2013. V. 177, N 1. P. 1339–1351.
20. *Koblitz N.* p-Adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions. Berlin: Springer-Verl., 1977.
21. *Schikhof W. H.* Ultrametric calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.

22. *Ganikhodjaev N. N., Rozikov U. A.* Description of periodic extreme Gibbs measures of some lattice model on the Cayley tree // Theor. Math. Phys. 1997. V. 111. P. 480–486.

Статья поступила 14 сентября 2015 г.

Хакимов Отабек Норбута угли
Институт математики,
ул. Дурмон йули, 29, Ташкент 100125, Узбекистан
`hakimovo@mail.ru`