Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 512.54+512.55+512.57

КОММУТАТОРНАЯ ШИРИНА НЕКОТОРЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛИ И НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

В. А. Романьков

Аннотация. Вычислены точные значения коммутаторной ширины абсолютно свободных и свободных разрешимых колец Ли конечного ранга, а также свободных и свободных разрешимых алгебр Ли конечного ранга над произвольным полем. Вычислены значения коммутаторной ширины свободных нильпотентных и свободных метабелевых нильпотентных алгебр Ли ранга два или ступени нильпотентности два над произвольным полем. Значения коммутаторной ширины для свободных нильпотентных и свободных метабелевых нильпотентных алгебр Ли конечного ранга не меньше трех над произвольным полем вычислены при условии, что ступень нильпотентности превышает ранг не менее, чем на два. В случае свободных нильпотентных и свободных метабелевых нильпотентных колец Ли произвольного конечного ранга, а также свободных нильпотентных и свободных метабелевых нильпотентных алгебр Ли над полем рациональных чисел произвольного конечного ранга значения коммутаторной ширины вычислены без каких-либо ограничений.

Из полученных результатов, в частности, следует, что свободные или неабелевы свободные разрешимые кольца Ли различных конечных рангов, а также свободные или неабелевы свободные разрешимые алгебры Ли над произвольным полем различных конечных рангов элементарно не эквивалентны между собой.

Вычислены точные значения коммутаторной ширины свободных $\mathbb{Q}$-степенных нильпотентных, свободных нильпотентных, свободных метабелевых и свободных метабелевых нильпотентных групп конечного ранга.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.410

Ключевые слова: свободная (разрешимая, метабелева, нильпотентная, метабелева нильпотентная) алгебра Ли, свободное (разрешимое, метабелево, нильпотентное, метабелево нильпотентное) кольцо Ли, свободная ($\mathbb{Q}$-степенная нильпотентная, метабелева, нильпотентная, метабелева нильпотентная) группа, коммутаторная ширина, элементарная эквивалентность.

1. Введение

Пусть L — алгебра Ли $L^{\mathbb{F}}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ или кольцо Ли $L^{\mathbb{Z}}$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Произведение двух элементов v, w из L обозначим через $[v, w]$ и назовем *коммутатором* этих элементов. *Коммутаторной шириной* элемента u, принадлежащего коммутанту (квадрату) L^2, назовем наименьшее число m такое, что u представляется в виде суммы m коммутаторов элементов из L. Обозначим этот факт через $m = \mathrm{width}(u)$. *Коммутаторной шириной* $\mathrm{width}(L)$ алгебры (кольца) L назовем $\max\limits_{u \in L^2}(\mathrm{width}(u))$. Назовем $u \in L^2$ элементом *максимальной ширины*, если $\mathrm{width}(u) = \mathrm{width}(L)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16.01.00577–a).

Первой из двух основных целей данной работы является вычисление точных значений коммутаторной ширины $\mathrm{width}(F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{F}}))$ свободной алгебры Ли $F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{F}})$ (в другой терминологии, относительно свободной алгебры) ранга n в некоторых многообразиях алгебр Ли $\mathscr{G}^{\mathbb{F}}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$. Особое внимание уделяется относительно свободным алгебрам Ли над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Также вычисляются точные значения коммутаторной ширины $\mathrm{width}(F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{Z}}))$ свободного кольца Ли $F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{Z}})$ ранга n в аналогичных многообразиях $\mathscr{G}^{\mathbb{Z}}$ колец Ли.

Прежде всего обращается внимание на нильпотентные и метабелевы многообразия алгебр Ли. В дальнейшем через $\mathscr{N}_k^{\mathbb{F}}$ обозначается многообразие всех нильпотентных алгебр Ли ступени нильпотентности не выше, чем k, а через $N_{n,k}^{\mathbb{F}} = F_n\big(\mathscr{N}_k^{\mathbb{F}}\big)$ обозначается свободная в $\mathscr{N}_k^{\mathbb{F}}$ алгебра Ли ранга n. Через $\mathscr{S}_d^{\mathbb{F}}$ обозначается многообразие всех разрешимых алгебр Ли ступени разрешимости не выше, чем d. В этом случае $S_{n,d}^{\mathbb{F}} = F_n\big(\mathscr{S}_d^{\mathbb{F}}\big)$ — свободная разрешимая алгебра Ли ранга n ступени разрешимости d. Специальное обозначение $\mathscr{M}^{\mathbb{F}}$ используется для многообразия $\mathscr{S}_2^{\mathbb{F}}$ всех метабелевых алгебр Ли. Через $M_n^{\mathbb{F}} = F_n(\mathscr{M}^{\mathbb{F}})$ обозначается свободная метабелева алгебра Ли ранга n. Через $\mathscr{M}_k^{\mathbb{F}} = \mathscr{M}^{\mathbb{F}} \cap \mathscr{N}_k^{\mathbb{F}}$ обозначается многообразие всех метабелевых нильпотентных алгебр Ли ступени нильпотентности не выше, чем k, а через $M_{n,k}^{\mathbb{F}}$ — свободная алгебра ранга n в этом многообразии. Через $\mathscr{L}^{\mathbb{F}}$ обозначается многообразие всех алгебр Ли, тогда $L_n^{\mathbb{F}} = F_n(\mathscr{L}^{\mathbb{F}})$ — свободная алгебра Ли ранга n. Если говорится о соответствующих многообразиях колец Ли и свободных в этих многообразиях кольцах, то пишем $\mathscr{L}^{\mathbb{Z}}$, $\mathscr{N}_k^{\mathbb{Z}}$, $L_n^{\mathbb{Z}}, N_{n,k}^{\mathbb{Z}}$ и т. п.

Отправной точкой для получения оценок коммутаторной ширины алгебр и колец Ли служит следующая легко доказуемая

Лемма 1. *Пусть L — алгебра или кольцо Ли, порожденное элементами $x_1, \dots, x_n$. Тогда любой элемент коммутанта L^2 допускает представление вида*

$$u = \sum_{i=1}^{n} [v_i, x_i], \quad v_i \in L. \tag{1}$$

В частности, отсюда следует, что $\mathrm{width}(L) \leq n$.

Доказательство леммы 1 приводится в разд. 2.

Основные результаты об относительно свободных алгебрах Ли над произвольным полем $\mathbb{F}$ и часть основных результатов об относительно свободных кольцах Ли приведены в следующих утверждениях, доказательства которых отнесены в разд. 3.

Предложение 2. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда при $n \geq 2$ справедливы равенства*

$$\mathrm{width}\big(M_{n,2}^{\mathbb{F}}\big) = \mathrm{width}\big(N_{n,2}^{\mathbb{F}}\big) = [n/2].$$

Также верны равенства

$$\mathrm{width}\big(M_{n,2}^{\mathbb{Z}}\big) = \mathrm{width}\big(N_{n,2}^{\mathbb{Z}}\big) = [n/2].$$

Предложение 3. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда справедливы следующие равенства:*

1) $\mathrm{width}\left(M_{2,3}^{\mathbb{F}}\right) = \mathrm{width}\left(N_{2,3}^{\mathbb{F}}\right) = 1$,
2) $\mathrm{width}\left(M_{2,3}^{\mathbb{Z}}\right) = \mathrm{width}\left(N_{2,3}^{\mathbb{Z}}\right) = 1$,
3) *для* $k \geq 4$ $\mathrm{width}\left(M_{2,k}^{\mathbb{F}}\right) = 2$,
4) *для* $k \geq 4$ $\mathrm{width}\left(M_{2,k}^{\mathbb{Z}}\right) = 2$.

Следствие 4. 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathscr{G}^{\mathbb{F}}$ — многообразие алгебр Ли, содержащее в качестве подмногообразия $\mathscr{M}_4^{\mathbb{F}}$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{width}(F_2(\mathscr{G}^{\mathbb{F}})) = 2.$$

В частности, это равенство верно в случаях, если $\mathscr{G}^{\mathbb{F}}$ — нильпотентное многообразие $\mathscr{N}_k^{\mathbb{F}}$ или метабелево нильпотентное многообразие $\mathscr{M}_k^{\mathbb{F}}$ для $k \geq 4$, разрешимое многообразие $\mathscr{S}_d^{\mathbb{F}}$ для $d \geq 2$ (в том числе метабелево многообразие $\mathscr{M}^{\mathbb{F}}$) или многообразие $\mathscr{L}^{\mathbb{F}}$ всех алгебр Ли.

2. *Пусть $\mathscr{G}^{\mathbb{Z}}$ — многообразие колец Ли, содержащее в качестве подмногообразия $\mathscr{M}_4^{\mathbb{Z}}$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{width}(F_2(\mathscr{G}^{\mathbb{Z}})) = 2.$$

В частности, это равенство верно в случаях, если $\mathscr{G}$ — нильпотентное многообразие $\mathscr{N}_k^{\mathbb{Z}}$ или метабелево нильпотентное многообразие $\mathscr{M}_k^{\mathbb{Z}}$ для $k \geq 4$, разрешимое многообразие $\mathscr{S}_d^{\mathbb{Z}}$ для $d \geq 2$ (в том числе метабелево многообразие $\mathscr{M}^{\mathbb{Z}}$) или многообразие $\mathscr{L}^{\mathbb{Z}}$ всех колец Ли.

Пусть L — алгебра Ли. Будем говорить, что представление элемента $u \in L^2$ вида

$$u = \sum_{i=1}^{l} [v_i, w_i] \tag{2}$$

имеет *ранг* m, если элементы $v_1, w_1, \dots, v_l, w_l$ порождают по модулю L^2 подпространство размерности m.

Теорема 5. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда при $n \geq 2$ и $k \geq n+2$ справедливо равенство* $\mathrm{width}\big(M_{n,k}^{\mathbb{F}}\big) = n$.

Следствие 6. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathscr{G}^{\mathbb{F}}$ — многообразие алгебр Ли содержащее в качестве подмногообразия $\mathscr{M}_{n+2}^{\mathbb{F}}$. Тогда при $n \geq 2$ справедливо равенство*

$$\mathrm{width}(F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{F}})) = n.$$

В частности, это равенство верно в случаях, если $\mathscr{G}^{\mathbb{F}}$ — нильпотентное многообразие $\mathscr{N}_k^{\mathbb{F}}$ или метабелево нильпотентное многообразие $\mathscr{M}_k^{\mathbb{F}}$ для $k \geq n+2$, а также если $\mathscr{G}^{\mathbb{F}}$ — разрешимое многообразие $\mathscr{S}_d^{\mathbb{F}}$ для $d \geq 2$ (в том числе метабелево многообразие $\mathscr{M}^{\mathbb{F}}$) или многообразие $\mathscr{L}^{\mathbb{F}}$ всех алгебр Ли.

Приведем утверждения, являющиеся основными результатами работы об алгебрах Ли над полем рациональных чисел и частью основных результатов о кольцах Ли.

Следующая теорема позволяет получить точные значения коммутаторной ширины свободных алгебр Ли и некоторых относительно свободных разрешимых и нильпотентных алгебр Ли над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а также точные значения коммутаторной ширины соответствующих абсолютно и относительно свободных колец Ли.

Теорема 7. *Пусть M — свободная метабелева нильпотентная алгебра Ли $M_{n,3}^{\mathbb{Q}}$ над $\mathbb{Q}$ или свободное метабелево нильпотентное кольцо Ли $M_{n,3}^{\mathbb{Z}}$ ранга $n \geq 3$ ступени нильпотентности 3 с множеством свободных порождающих $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда любой элемент из M^3 вида*

$$d_n = \sum_{i=1}^{n-1} p_i [x_{i+1}, x_i; 2] - p_n [x_n, x_1, x_n], \tag{3}$$

где $p_1, \dots, p_n$ — попарно взаимно простые целые числа, свободные от квадратов (т. е. не делящиеся на квадрат простого числа) и отличные от 1 и -1, не представим в виде суммы коммутаторов ранга $m < n$. Элемент d_n не представим в виде суммы $l < n$ коммутаторов, следовательно, он является элементом максимальной ширины. Элемент d_n не принадлежит коммутанту подкольца из M, порожденного менее, чем n, элементами.

Следствие 8. *Пусть $\mathscr{G}^{\mathbb{Q}}$ — многообразие алгебр Ли над полем $\mathbb{Q}$, содержащее в качестве подмногообразия $\mathscr{M}_3^{\mathbb{Q}}$. Тогда для любого $n \geq 3$ справедливо равенство*

$$\mathrm{width}(F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{Q}})) = n.$$

В частности, это равенство верно в случаях, если $\mathscr{G}^{\mathbb{Q}}$ — нильпотентное многообразие $\mathscr{N}_k^{\mathbb{Q}}$ или метабелево нильпотентное многообразие $\mathscr{M}_k^{\mathbb{Q}}$ для $k \geq 3$, а также если $\mathscr{G}^{\mathbb{Q}}$ — разрешимое многообразие $\mathscr{S}_d^{\mathbb{Q}}$ для $d \geq 2$ (в том числе метабелево многообразие $\mathscr{M}^{\mathbb{Q}}$) или многообразие $\mathscr{L}^{\mathbb{Q}}$ всех алгебр Ли.

Аналогичные утверждения имеют место для многообразий колец Ли, содержащих в качестве подмногообразия $\mathscr{M}_3^{\mathbb{Z}}$. Тогда для любого $n \geq 3$ справедливо равенство

$$\mathrm{width}(F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{Z}})) = n.$$

В частности, это равенство верно в случаях, если $\mathscr{G}^{\mathbb{Z}}$ — нильпотентное многообразие $\mathscr{N}_k^{\mathbb{Z}}$ или метабелево нильпотентное многообразие $\mathscr{M}_k^{\mathbb{Z}}$ для $k \geq 3$, а также если $\mathscr{G}^{\mathbb{Z}}$ — разрешимое многообразие $\mathscr{S}_d^{\mathbb{Z}}$ для $d \geq 2$ (в том числе метабелево многообразие $\mathscr{M}^{\mathbb{Z}}$) или многообразие $\mathscr{L}^{\mathbb{Z}}$ всех колец Ли.

Теорема 7 и следствие 8 доказаны в разд. 5.

Отметим следующее утверждение об элементарной эквивалентности алгебр и колец Ли.

Следствие 9. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathscr{G}^{\mathbb{F}}$ — многообразие алгебр Ли содержащее в качестве подмногообразия $\mathscr{M}^{\mathbb{F}}$. Тогда свободные алгебры $F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{F}})$ и $F_m(\mathscr{G}^{\mathbb{F}})$ различных конечных рангов n и m соответственно не элементарно эквивалентны. Аналогичное утверждение справедливо и для колец Ли $F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{Z}})$ и $F_m(\mathscr{G}^{\mathbb{Z}})$.*

Следствие 9 также доказано в разд. 5.

Заметим, что Е. Н. Порошенко [1] представил алгоритм вычисления коммутаторной ширины элемента коммутанта алгебры $M_n^{\mathbb{F}}$ любого конечного ранга n над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики с алгоритмически разрешимой проблемой существования решения у произвольной системы линейных уравнений. Другими словами, он доказал алгоритмическую разрешимость уравнений вида $\sum\limits_{i=1}^{m} [x_i, y_i] = g$, в котором x_i, y_i $(i = 1, \dots, m)$ — неизвестные, g — фиксированный элемент. Уравнения вида $w(x_1, \dots, x_m) = g$, где левая часть — слово от неизвестных $x_1, \dots, x_m$, а g — фиксированный элемент, как в группах, так и в алгебрах (кольцах), называются *расщепляемыми.* В [2] показана алгоритмическая неразрешимость расщепляемых уравнений в целом ряде колец Ли, а также в свободных нильпотентных группах, структурах, рассматриваемых в настоящей работе.

Аналоги приведенных утверждений справедливы также для некоторых относительно свободных (нильпотентных и метабелевых) групп. Точные утверждения формулируются ниже, а доказательства приводятся в разд. 6. Тем самым достигается вторая основная цель данной работы. А именно, дается альтернативное доказательство справедливости известных оценок коммутаторной ширины свободных нильпотентных и свободных метабелевых групп из малодоступных работ [3, 4] с уточнениями из [5]. См. по этому поводу [6, 7].

Пусть G — произвольная группа. *Шириной* $\mathrm{width}(g)$ элемента g коммутанта G' называется наименьшее число m такое, что g представляется как произведение m коммутаторов элементов группы G. *Коммутаторная ширина* $\mathrm{width}(G)$ группы G определяется как $\max\limits_{g \in G'}(\mathrm{width}(g))$, если это значение существует. Элемент $g \in G'$ такой, что $\mathrm{width}(g) = \mathrm{width}(G)$, называется элементом *максимальной ширины*. В противном случае говорят, что коммутаторная ширина группы G *бесконечна*. Понятие *коммутаторной ширины* является частным случаем понятия *вербальной ширины* произвольной вербальной подгруппы группы G. См. по этому поводу [6, 7].

Коммутаторная ширина группы G может оказаться бесконечной даже в случае, если G конечно порождена. Как показано в [8], любая собственная неединичная вербальная подгруппа (в том числе и коммутант) некоммутативной свободной группы или свободного произведения, отличного от бесконечной группы диэдра, имеет бесконечную ширину. В этом принципиальное отличие алгебр Ли от групп.

Вместе с тем известны различные классы конечно порожденных групп, в которых любая вербальная подгруппа имеет конечную ширину. Это выполнено, если группа является расширением абелевой группы с помощью нильпотентной группы [9], полициклической группой [10], и в ряде других случаев. Конечность коммутаторной ширины также имеет место для конечно порожденных разрешимых групп ступени разрешимости не больше, чем три [11]. Вопрос М. И. Каргаполова [12, вопрос 4.34] о конечности коммутаторной ширины произвольной конечно порожденной разрешимой группы остается до сих пор открытым.

Пусть $\overline{N}_{n,k}$ обозначает свободную нильпотентную группу ранга n в многообразии $\overline{\mathscr{N}}_k$ всех нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше, чем k, а $\overline{M}_{n,k}$ — свободную нильпотентную метабелеву группу ранга n в многообразии $\overline{\mathscr{M}}_k$ всех метабелевых нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше, чем k. Естественно определяются группы и многообразия $\overline{M}_n$ и $\overline{\mathscr{M}}$, $\overline{S}_{n,d}$ и $\overline{\mathscr{S}}_d$.

Через $\overline{N}_{n,k}^{\mathbb{Q}}$ обозначим пополнение группы $\overline{N}_{n,k}$, являющееся свободной нильпотентной $\mathbb{Q}$-степенной группой ранга n, т. е. свободной группой в многообразии $\overline{\mathscr{N}}_k^{\mathbb{Q}}$ всех нильпотентных $\mathbb{Q}$-степенных групп ступени нильпотентности не выше, чем k, иначе говоря, свободной группой в категории делимых нильпотентных групп без кручения. Аналогично определяются группы и многообразия $\overline{M}_{n,k}^{\mathbb{Q}}$ и $\overline{\mathscr{M}}_k^{\mathbb{Q}}$. Относительно определений и свойств $\mathbb{Q}$-степенных групп см. [13, 14].

Может оказаться так, что коммутаторная ширина бесконечно порожденной группы конечна. Кроме тривиальных примеров абелевых и близких к ним групп или декартовых произведений групп ограниченной коммутаторной ширины отметим следующий пример. Коммутаторная ширина групп $\overline{N}_{n,k}^{\mathbb{Q}}$ и $\overline{M}_{n,k}^{\mathbb{Q}}$ при $n, k \geq 2$ конечна (более того, она достаточно очевидным образом ограничена сверху числом n). В то же время эти группы не конечно порождены в обычном смысле. Точные утверждения об этом и их доказательства приводятся далее.

Не так много работ посвящено вычислению точных значений ширины вербальных подгрупп. В [3, 4] доказано, что коммутаторная ширина группы $\overline{N}_{n,2}$ так же, как и коммутаторная ширина группы $\overline{M}^{\mathbb{Q}}_{n,2}$ при $n \geq 2$, равна $[n/2]$, а коммутаторная ширина группы $\overline{N}_{n,k}$ при $n \geq 2$ и $k \geq 3$ равна n. Следует отметить, что допущенная неточность в случае группы $\overline{N}_{2,3}$ исправлена в [5]. В [3, 4] также установлено, что при $n \geq 2$ и $k \geq 4$ или $n \geq 3$ и $k \geq 3$ коммутаторная ширина группы $\overline{M}^{\mathbb{Q}}_{n,k}$ и коммутаторная ширина группы $\overline{N}^{\mathbb{Q}}_{n,k}$ равна n. В исключительном случае группы $\overline{M}^{\mathbb{Q}}_{2,3} = \overline{N}^{\mathbb{Q}}_{2,3}$ коммутаторная ширина равна 1. В данной работе мы приводим альтернативные доказательства ряда отмеченных только что результатов. Основная причина для этого — труднодоступность работ [3, 4], к тому же в работе [4] результаты приведены без доказательств.

Отметим также, что из результатов [3, 4, 15] следует, что коммутаторная ширина произвольной свободной метабелевой группы $\overline{M}_n$ ранга $n \geq 2$ равна n. Более того, доказано, что коммутаторная ширина свободной группы $G = F_n(\overline{\mathscr{G}})$ многообразия $\overline{\mathscr{G}}$, состоящего из всех нильпотентных ступени нильпотентности $\leq k$ расширений абелевых групп, при $n \geq 2$, $k \geq 1$ равна n (см. [5]). В [16] вычислены значения вербальной ширины степени $\overline{N}^{t}_{n,2}$ произвольной группы $\overline{N}_{n,2}$.

Еще меньше известно результатов, представляющих точные значения ширины вербальных подалгебр. В [17] доказано, что ширина $\operatorname{width}(A_r^2)$ квадрата свободной ассоциативной алгебры A_r ранга $r \geq 2$ равна r. Отсюда следует, что свободные ассоциативные алгебры различных конечных рангов над произвольным полем элементарно не эквивалентны между собой.

Результаты, заключающие в себе точные значения ширины вербальных подалгебр и подгрупп, неоднократно применялись для получения утверждений о структуре алгебр и групп и их элементарных теориях. Отметим в этой связи [18–21], а также замечательную теорему Николова — Сегала [22], согласно которой любая подгруппа конечного индекса конечно порожденной проконечной группы замкнута.

Перейдем к формулировкам результатов, полученных в данной работе в случае групп.

Для конечно порожденных нильпотентных $\mathbb{Q}$-степенных и обычных групп имеет место полный аналог леммы 1.

Лемма 10. *Пусть G — нильпотентная или $\mathbb{Q}$-степенная нильпотентная группа, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$. Тогда любой элемент коммутанта G' допускает представление вида*

$$g = \prod_{i=1}^{n} [f_i, x_i], \quad f_i \in G. \tag{4}$$

В частности, $\operatorname{width}(G) \leq n$.

Мы не приводим доказательства этого хорошо известного результата, неоднократно отмеченного в литературе (см., например, [7]).

Сформулируем результаты в случае нильпотентных групп ступени нильпотентности 2.

Предложение 11. *При $n \geq 2$ справедливы равенства*

$$\operatorname{width}\big(\overline{N}^{\mathbb{Q}}_{n,2}\big) = \operatorname{width}\big(\overline{M}^{\mathbb{Q}}_{n,2}\big) = \operatorname{width}(\overline{N}_{n,2}) = \operatorname{width}(\overline{M}_{n,2}) = [n/2].$$

Следующее утверждение является аналогом предложения 3. Отметим, что числовые значения в нем несколько отличаются от соответствующих значений в предложении 3.

Предложение 12. *Справедливы следующие равенства:*
1) $\operatorname{width}\big(\overline{M}_{2,3}^{\mathbb{Q}}\big) = \operatorname{width}\big(\overline{N}_{2,3}^{\mathbb{Q}}\big) = 1$,
2) *для* $k \geq 4$ $\operatorname{width}\big(\overline{M}_{2,k}^{\mathbb{Q}}\big) = 2$,
3) *для* $k \geq 3$ $\operatorname{width}(\overline{M}_{2,k}) = 2$.

Следствие 13. 1. *Пусть* $\overline{\mathscr{G}}^{\mathbb{Q}}$ *— многообразие $\mathbb{Q}$-степенных групп, содержащее в качестве подмногообразия* $\overline{\mathscr{M}}_4^{\mathbb{Q}}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\operatorname{width}(F_2(\overline{\mathscr{G}}^{\mathbb{Q}})) = 2.$$

В частности, это равенство верно в случаях, если $\overline{\mathscr{G}}^{\mathbb{Q}}$ *— нильпотентное многообразие* $\overline{\mathscr{N}}_k^{\mathbb{Q}}$ *или метабелево нильпотентное многообразие* $\overline{\mathscr{M}}_k^{\mathbb{Q}}$ *для* $k \geq 4$.

2. *Пусть* $\overline{\mathscr{G}}$ *— многообразие групп, содержащее в качестве подмногообразия многообразие* $\overline{\mathscr{M}}_3$. *Тогда справедливо равенство*

$$\operatorname{width}(F_2(\overline{\mathscr{G}})) = 2.$$

В частности, это равенство верно в случаях, если $\overline{\mathscr{G}}$ *— нильпотентное многообразие* $\overline{\mathscr{N}}_k$ *или метабелево нильпотентное многообразие* $\overline{\mathscr{M}}_k$ *для* $k \geq 3$, *разрешимое многообразие* $\overline{\mathscr{S}}_d$ *для* $d \geq 2$ *(в том числе метабелево многообразие* $\overline{\mathscr{M}}$*).*

Доказательства предложения 12 и следствия 13 приведены в разд. 6.

Пусть G — $\mathbb{Q}$-степенная или обычная нильпотентная группа. Будем говорить, что представление

$$w = \prod_{i=1}^{l} [g_i, f_i], \quad g_i, f_i \in G, \tag{5}$$

элемента w коммутанта G' имеет *ранг* m, если элементы $g_1, f_1, \dots, g_l, f_l$ порождают по модулю G' свободную абелеву (Q-степенную) подгруппу ранга m. В случае $\mathbb{Q}$-степенной группы G эта подгруппа имеет структуру линейного пространства над $\mathbb{Q}$ и ее ранг есть размерность этого пространства.

Следующая теорема является аналогом теоремы 7.

Теорема 14. *Пусть G — свободная метабелева нильпотентная $\mathbb{Q}$-степенная группа* $\overline{M}_{n,3}^{\mathbb{Q}}$ *или свободная метабелева нильпотентная группа* $\overline{M}_{n,3} = \overline{N}_{n,3}$ *ранга $n \geq 3$ ступени нильпотентности 3 с множеством свободных порождающих $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда любой элемент из третьего члена $\gamma_3 G$ нижнего центрального ряда группы G вида*

$$d_n = \prod_{i=1}^{n-1} [x_{i+1}, x_i; 2]^{p_i} \cdot [x_n, x_1, x_n]^{-p_n}, \tag{6}$$

где $p_1, \dots, p_n$ — попарно взаимно простые целые числа, свободные от квадратов и отличные от 1 и -1, не представим в виде произведения коммутаторов ранга $m < n$. Элемент d_n не представим в виде произведения $l < n$ коммутаторов, следовательно, он является элементом максимальной ширины. Элемент d_n не принадлежит коммутанту ($\mathbb{Q}$-степенной) подгруппы, порожденной (как $\mathbb{Q}$-степенная подгруппа) меньше, чем n, элементами.

Следствие 15. 1. *Пусть* $\overline{\mathscr{G}}^{\mathbb{Q}}$ *— многообразие* $\mathbb{Q}$*-степенных нильпотентных групп, содержащее в качестве подмногообразия многообразие* $\overline{\mathscr{M}}_3^{\mathbb{Q}}$*. Тогда для любого* $n \geq 3$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{width}(F_n(\overline{\mathscr{G}}^{\mathbb{Q}})) = n.$$

В частности, это равенство верно в случаях, если $\overline{\mathscr{G}}^{\mathbb{Q}}$ *— нильпотентное многообразие* $\overline{\mathscr{N}}_k^{\mathbb{Q}}$ *или метабелево нильпотентное многообразие* $\overline{\mathscr{M}}_k^{\mathbb{Q}}$ *для* $k \geq 3$.

2. *Пусть* $\overline{\mathscr{G}}$*– многообразие нильпотентных групп содержащее в качестве подмногообразия* $\overline{\mathscr{M}}_3$*. Тогда для любого* $n \geq 2$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{width}(F_n(\overline{\mathscr{G}})) = n.$$

В частности, это равенство верно в случаях, если $\mathscr{G}$ *— нильпотентное многообразие* $\overline{\mathscr{N}}_k$ *или метабелево нильпотентное многообразие* $\overline{\mathscr{M}}_k$ *для* $k \geq 3$.

Доказательства теоремы 14 и следствия 15 приведены в разд. 6.

Структура настоящей работы следующая. В разд. 2 представлены некоторые необходимые предварительные сведения. Разд. 3 посвящен доказательству наших основных результатов для алгебр Ли над произвольным полем и некоторых результатов для колец Ли. В разд. 4 представлены примеры вычисления коммутаторной ширины относительно свободных алгебр Ли, доказательства которых геометричны. В разд. 5 представлены доказательства основных результатов для алгебр Ли над полем рациональных чисел и соответствующих результатов для колец Ли. Разд. 6 посвящен доказательству основных результатов об относительно свободных группах.

2. Предварительные сведения

Пусть L — алгебра или кольцо Ли, порожденное множеством $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Произвольный элемент $u \in L$ записывается в виде $\sum\limits_{i=1} \alpha_i x_i + v$, где v — сумма простых левонормированных коммутаторов от элементов из X_n веса ≥ 2. Напомним, что коммутатор вида $[[\ldots[g_1, g_2], g_3], \ldots, g_m]$ называется *простым левонормированным коммутатором веса* (*длины*) m и обозначается через $[g_1, g_2, \ldots, g_m]$. Для коммутаторов вида $[g, f, f, \ldots, f]$ веса $m+1$, имеющих m вхождений элемента f, используем обозначение $[g, f; m]$.

Как следует из [23], базис алгебры $M_n^{\mathbb{F}}$ можно выбрать состоящим из элементов множества свободных порождающих $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множества всех лиевых мономов (коммутаторов) веса ≥ 2 вида

$$[[\ldots[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \ldots, x_{i_m}], \tag{7}$$

где $m \geq 2, x_{i_2} < x_{i_1}, x_{i_2} \leq x_{i_3} \leq \cdots \leq x_{i_m}$. Такие элементы (включая $x_1, \ldots, x_n$) называются *базисными коммутаторами.* Базисом $\left(M_n^{\mathbb{F}}\right)^2$ служит множество базисных коммутаторов веса ≥ 2.

Если X_n — множество свободных порождающих кольца $M_n^{\mathbb{Z}}$, то базисные коммутаторы указанного вида также являются базисом $M_n^{\mathbb{Z}}$ как свободного $\mathbb{Z}$-модуля, а базисные коммутаторы веса ≥ 2 составляют базис свободного подмодуля $\left(M_n^{\mathbb{Z}}\right)^2$.

Заметим, что в метабелевых алгебрах и кольцах Ли при любом m и любой подстановке $\sigma \in \mathbb{S}_m$ выполнено тождество $[x, y, z_1, \ldots, z_m]$=$[x, y, z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(m)}]$.

В качестве базиса алгебры $M^{\mathbb{F}}_{n,k}$ или кольца $M^{\mathbb{Z}}_{n,k}$ также можно взять множество всех базисных коммутаторов веса, не превышающего k.

Доказательство леммы 1. Как отмечалось выше, любой элемент u коммутанта L^2 алгебры L допускает запись в виде линейной комбинации простых левонормированных коммутаторов от $x_1, \dots, x_n$ веса не меньше, чем 2, от порождающих элементов $x_1, \dots, x_n$ алгебры L. Ясно, что линейную комбинацию всех коммутаторов в такой записи, заканчивающихся на один и тот же порождающий элемент x_i, можно записать как один коммутатор, заканчивающийся на x_i. А именно,

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j [u_j, x_i] = \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j, x_i \right]. \tag{8}$$

Значит, u представляется, как в утверждении леммы, после переписки всех линейных комбинаций базисных коммутаторов, соответствующих $x_1, \dots, x_n$.

Лемма доказана. □

В случае групп коммутатор $[x, y]$ понимается как $xyx^{-1}y^{-1}$. Коммутатор вида $[[\dots[g_1, g_2], g_3], \dots, g_m]$ называется *простым левонормированным коммутатором веса* (*длины*) m и обозначается через $[g_1, g_2, \dots, g_m]$. Для коммутаторов вида $[g, f, f, \dots, f]$ веса $m + 1$, имеющих m вхождений элемента f, используем обозначение $[g, f; m]$. Заметим также, что в метабелевых группах при любом m и любой подстановке $\sigma \in \mathbb{S}_m$ выполнено тождество $[x, y, z_1, \dots, z_m] = [x, y, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}]$.

Коммутаторные соотношения выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered} [xy, z] = [y, z][x, z][z, y, x], \quad [x, yz] = [x, y][x, z][z, x, y], \\ [x, y^{-1}] = [x, y]^{-1}[y^{-1}, x, y]^{-1}, \quad [x^{-1}, y] = [y, x^{-1}, x]^{-1}[x, y]^{-1}. \end{gathered} \tag{9}$$

Следующие соотношения выполнены в $\mathbb{Q}$-степенной нильпотентной группе ступени нильпотентности 3 при любом $\varepsilon \in \mathbb{Q}$:

$$[g^{\varepsilon}, f] = [g, f]^{\varepsilon}[f, g; 2]^{\varepsilon(\varepsilon-1)/2}, \quad [g, f^{\varepsilon}] = [g, f]^{\varepsilon}[g, f; 2]^{-\varepsilon(\varepsilon-1)/2}. \tag{10}$$

3. Коммутаторная ширина некоторых относительно свободных алгебр и колец Ли

Вначале рассмотрим случай алгебр и колец Ли ступени нильпотентности два.

Доказательство предложения 2. В случае алгебр заметим, что $M^{\mathbb{F}}_{n,2} = N^{\mathbb{F}}_{n,2}$. Пусть $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ обозначает множество свободных порождающих алгебры $M = M^{\mathbb{F}}_{n,2}$. Произвольный элемент коммутанта M^2 однозначно записывается в виде

$$u = \sum_{i,j=1,\dots,n; i>j} \alpha_{i,j}[x_i, x_j], \quad \alpha_{i,j} \in \mathbb{F}. \tag{11}$$

Правую часть в этом выражении можно рассматривать как кососимметрическую форму. Хорошо известно (см., например, [24]), что невырожденным линейным преобразованием, соответствующим замене множества свободных порождающих алгебры M, эта форма приводится к виду

$$u = \sum_{i,j=1,\dots,r} [y_i, z_i], \tag{12}$$

где $2r \leq n$ — ранг формы, y_i, z_i для $i = 1, \ldots, r$ — различные элементы измененного множества свободных порождающих алгебры M. Значит, элемент u допускает представление в виде суммы не более, чем $[n/2]$, коммутаторов. В общем случае эту оценку улучшить нельзя, так как при невырожденных линейных преобразованиях ранг формы не изменяется. Элемент $u = \sum\limits_{i=1,3,\ldots,n-\varepsilon} [x_i, x_{i+1}]$, где $\varepsilon = 1$ при четном и $\varepsilon = 2$ при нечетном $n \geq 2$, не представим в виде суммы менее, чем $[n/2]$, слагаемых. Таким образом, он является элементом максимальной ширины. Отсюда следует равенство $\mathrm{width}(M) = [n/2]$.

Перейдем к случаю колец. Так же, как и в случае алгебр, заметим, что $M^{\mathbb{Z}}_{n.2} = N^{\mathbb{Z}}_{n.2}$. Пусть $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ обозначает множество свободных порождающих кольца $M = M^{\mathbb{Z}}_{n.2}$. Произвольный элемент коммутанта M^2 однозначно записывается в виде

$$u = \sum_{i,j=1,\ldots,n; i>j} \alpha_{i,j}[x_i, x_j], \quad \alpha_{i,j} \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Правую часть в этом выражении можно рассматривать как кососимметрическую форму. Хорошо известно (см., например, [24]), что такая форма над кольцом главных идеалов (в данном случае над $\mathbb{Z}$) невырожденным линейным преобразованием, соответствующим замене множества свободных порождающих кольца M, приводится к виду

$$u = \sum_{i,j=1,\ldots,r} \beta_i[y_i, z_i], \quad \beta_i \in \mathbb{Z}, \tag{14}$$

где $2r \leq n$ — ранг формы, y_i, z_i для $i = 1, \ldots, r$ — различные элементы измененного множества свободных порождающих кольца M. Получаем равенства $\beta_i[y_i, z_i] = [\beta_i y_i, z_i]$ для $i = 1, \ldots, r$, преобразующие правую часть (14) в сумму $r \leq [n/2]$ коммутаторов. Значит, $[n/2]$ — верхняя граница коммутаторной ширины кольца M. Так как M естественно вложена в алгебру $M^{\mathbb{F}}_{n,2}$ с множеством свободных порождающих X_n, а элемент $u = \sum\limits_{i=1,3,\ldots,n-\varepsilon} [x_i, x_{i+1}]$, определенный выше, принадлежит M, соображения о ранге, как и в случае алгебр, заканчивают доказательство.

Предложение доказано. $\square$

Отдельно рассмотрим случай свободных алгебр Ли ранга два.

Доказательство предложения 3. 1. Пусть $X_2 = \{x_1, x_2\}$ — множество свободных порождающих элементов алгебры $M^{\mathbb{F}}_{2,3}$, совпадающей с $N^{\mathbb{F}}_{2,3}$. Произвольный элемент u коммутанта $\left(M^{\mathbb{F}}_{2,3}\right)^2$ однозначно записывается в виде $\alpha[x_2, x_1] + \beta[x_2, x_1, x_2] + \gamma[x_2, x_1; 2]$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$. Если $\alpha = 0$, то $u = [[x_2, x_1], \beta x_2 + \gamma x_1]$. Если $\alpha \neq 0$, то $u = [\alpha x_2 + \gamma[x_2, x_1], x_1 - \alpha^{-1}\beta[x_2, x_1]]$. Утверждение 1 доказано.

2. Пусть $X_2 = \{x_1, x_2\}$ — множество свободных порождающих элементов кольца $M^{\mathbb{Z}}_{2,3}$, совпадающего с $N^{\mathbb{Z}}_{2,3}$. Произвольный элемент u коммутанта $\left(M^{\mathbb{Z}}_{2,3}\right)^2$ однозначно записывается в виде $\alpha[x_2, x_1] + \beta[x_2, x_1, x_2] + \gamma[x_2, x_1; 2]$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Если $\alpha = 0$, то $u = [[x_2, x_1], \beta x_2 + \gamma x_1]$.

Пусть $\alpha \neq 0$, $\alpha = \rho\alpha_1, \beta = \rho\beta_1$, где ρ — наибольший общий делитель чисел α и β. Тогда найдутся целые числа λ и μ такие, что $\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 = \gamma$. Отсюда получаем представление

$$u = [\mu x_1 + \rho x_2 + \lambda[x_2, x_1], \alpha_1 x_1 - \beta_1[x_2, x_1]].$$

Утверждение 2 доказано.

3. Пусть $X_2 = \{x_1, x_2\}$ — множество свободных порождающих элементов алгебры $M^{\mathbb{F}}_{2,4}$. Полагаем $u = [x_2, x_1; 2] + [x_2, x_1, x_2; 2]$. Покажем, что $\mathrm{width}(u) = 2$. Для доказательства предположим противное, что $\mathrm{width}(u) = 1$. Тогда существуют элементы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \lambda_i$ $(i = 1, 2)$ поля $\mathbb{F}$ такие, что

$$u = [\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 [x_2, x_1] + \delta_1 [x_2, x_1; 2] + \lambda_1 [x_2, x_1, x_2],\\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 [x_2, x_1] + \delta_2 [x_2, x_1; 2] + \lambda_2 [x_2, x_1, x_2]]. \quad (15)$$

Предположим, что вектор (α_1, β_1) ненулевой. В противном случае сразу переходим к заключению, что одну из линейных частей множителей коммутатора можно считать нулевой. Так как коэффициент перед $[x_2, x_1]$ в стандартном представлении элемента u равен нулю, найдется коэффициент $\mu \in \mathbb{F}$, для которого $(\alpha_2, \beta_2) = \mu(\alpha_1, \beta_1)$. Вычтем из второго множителя коммутатора правой части (15) первый, умноженный на μ. Значение u при этом не изменится, но приобретет вид

$$u = [\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2, \gamma_2 [x_2, x_1] + \delta_2 [x_2, x_1; 2] + \lambda_2 [x_2, x_1, x_2]]\\ = -\alpha_1 \gamma_2 [x_2, x_1; 2] - \beta_1 \gamma_2 [x_2, x_1, x_2] - \alpha_1 \delta_2 [x_2, x_1; 3]\\ - (\alpha_1 \lambda_2 + \beta_1 \delta_2)[x_2, x_1, x_1, x_2] - \beta_1 \lambda_2 [x_2, x_1, x_2; 2]. \quad (16)$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\alpha_1 \gamma_2 = -1, \quad \beta_1 \gamma_2 = 0, \quad \alpha_1 \delta_2 = \alpha_1 \lambda_2 + \beta_1 \delta_2 = 0, \quad \beta_1 \lambda_2 = -1. \quad (17)$$

Легко видеть, что система несовместна ввиду последовательно вытекающих из нее неравенств и значений: $\alpha_1 \neq 0$, $\delta_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Значит, $\mathrm{width}(u) = 2$. Отсюда и из леммы 1 получаем равенство $\mathrm{width}\left(M^{\mathbb{Q}}_{2,4}\right) = 2$.

Утверждение относительно произвольной алгебры $M^{\mathbb{F}}_{2,k}$ для $k \geq 4$ следует из того, что алгебра $M^{\mathbb{F}}_{2,4}$ является гомоморфным образом алгебры $M^{\mathbb{F}}_{2,k}$. Утверждение 3 доказано.

4. Кольцо $M^{\mathbb{Z}}_{2,4}$ с множеством свободных порождающих X_2 естественно вложено в алгебру $M^{\mathbb{Q}}_{2,4}$. Элемент u, построенный в доказательстве п. 3, принадлежит $\left(M^{\mathbb{Z}}_{2,4}\right)^2$. Поэтому он не может быть коммутатором в $\left(M^{\mathbb{Z}}_{2,4}\right)$. Отсюда и из леммы 1 получаем равенство $\mathrm{width}\left(M^{\mathbb{Z}}_{2,4}\right) = 2$. Утверждение относительно произвольного кольца $M^{\mathbb{Z}}_{2,k}$ для $k \geq 4$ следует из того, что кольцо $M^{\mathbb{Z}}_{2,4}$ является гомоморфным образом кольца $M^{\mathbb{Z}}_{2,k}$. Утверждение 4 доказано.

Предложение доказано. □

Доказательство следствия 4. 1. Утверждение следует из леммы 1 и п. 3 предложения 3, так как алгебра $M^{\mathbb{F}}_{2,4}$ является гомоморфным образом алгебры $F_2(\mathscr{G}^{\mathbb{F}})$.

2. Утверждение следует из леммы 1 и п. 4 предложения 3, так как кольцо $M^{\mathbb{Z}}_{2,4}$ является гомоморфным образом кольца $F_2(\mathscr{G}^{\mathbb{Z}})$.

Следствие доказано. □

Перейдем к рассмотрению относительно свободных алгебр и колец Ли ранга не меньше чем 3.

Пусть M — свободная метабелева алгебра Ли $M^{\mathbb{F}}_n$ или свободная метабелева нильпотентная алгебра Ли $M^{\mathbb{F}}_{n,k}$ ступени нильпотентности $k \geq 2$ ранга $n \geq 2$

с множеством свободных порождающих элементов $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Произвольный элемент u алгебры M однозначно записывается в виде $a + A$, где a — линейная комбинация элементов из X_n, а A — элемент из M^2. Будем называть такую запись элемента u *стандартной* относительно X_n. Элемент a назовем *линейной частью элемента* u. Рассмотрим сумму

$$u = \sum_{i=1}^{l} [a_i + A_i, b_i + B_i], \tag{18}$$

в правой части которой элементы коммутаторов записаны в стандартном виде. Определим *элементарные преобразования* элементов суммы из правой части (18), не изменяющие значения u.

1. Замена $[a_i + A_i, b_i + B_i]$ на $[(a_i + \beta b_i) + (A_i + \beta B_i), b_i + B_i]$ для некоторого $\beta \in \mathbb{F}$.

2. Замена $[a_i + A_i, b_i + B_i]$ на $[\alpha a_i + \alpha A_i, \alpha^{-1} b_i + \alpha^{-1} B_i]$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}^*$.

3. Замена $[a_i + A_i, b_i + B_i]$ на $[-b_i - B_i, a_i + A_i]$.

4. Замена $[a_i + A_i, b_i + B_i] + [a_j + A_j, b_j + B_j]$ для $i \neq j$ на $[(a_i + \alpha a_j) + (A_i + \alpha A_j), b_i + B_i] + [a_j + A_j, (-\alpha b_i + b_j) + (-\alpha B_i + B_j)]$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}$.

Заметим, что элементарные преобразования не изменяют число l слагаемых коммутаторов в представлении элемента u из (18).

Следующее утверждение является ключевым для доказательства теоремы 5.

Предложение 16. *Пусть M — свободная метабелева алгебра Ли $M_n^{\mathbb{F}}$ или свободная метабелева нильпотентная алгебра Ли $M_{n,k}^{\mathbb{F}}$ ступени нильпотентности $k \geq 3$ ранга $n \geq 2$ с множеством свободных порождающих элементов $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Предположим, что элемент u коммутанта M^2 алгебры M представим в виде суммы l коммутаторов* (18), *причем множество линейных частей $a_1, b_1, \dots, a_l, b_l$ элементов коммутаторов линейно зависимо над $\mathbb{F}$. Тогда эта сумма элементарными преобразованиями переводится в сумму, в которой один из коммутаторов приобретает вид $[c, C]$, где c — линейная комбинация элементов из X_n, $C \in M^2$. Более того, если c линейно выражается через линейные части остальных коммутаторов полученной суммы, то элементарными преобразованиями можно получить вместо этого коммутатор, равный нулю, и исключить его из суммы, не меняя значения u. Продолжая процесс, можно представить u в виде*

$$u = \sum_{i=1}^{l_1} [c_i, C_i] + \sum_{j=1}^{l_2} [d_j + D_j, g_j + G_j], \tag{19}$$

где линейные части $c_1, \dots, c_{l_1}, d_1, \dots, d_{l_2}, g_1, \dots, g_{l_2}$ линейно независимы, C_i, D_j, $G_j \in M_n^2$, $l_1 + l_2 \leq l$. Если с самого начала в представлении элемента u в виде (18) *элементы $a_1, b_1, \dots, a_l, b_l$ линейно независимы, то элемент u уже имеет вид* (19), *в котором отсутствует первая сумма.*

Доказательство. Пусть для определенности a_1 представляется в виде $a_1 = \sum\limits_{j=2}^{l} \alpha_j a_j + \sum\limits_{i=1}^{l} \beta_i b_i$. Вначале преобразованием 1 переводим $[a_1 + A_1, b_1 + B_1]$ в $[(a_1 - \beta_1 b_1) + (A_1 - \beta_1 B_1), b_1 + B_1]$. Преобразованиями вида 2 переводим элементы $[a_i + A_i, b_i + B_i]$ для всех $i = 2, \dots, m$, для которых $\alpha_i \neq 0$ в $[\alpha_i a_i +$

$\alpha_i A_i, \alpha_i^{-1} b_i + \alpha_i^{-1} B_i\big]$. Далее преобразованиями вида 1 переводим каждый из коммутаторов $\big[\alpha_i a_i + \alpha_i A_i, \alpha_i^{-1} b_i + \alpha_i^{-1} B_i\big]$ в $[\alpha_i a_i + \beta_i b_i + C_i, d_i + D_i], C_i, D_i \in M_n^2$. Для коммутаторов, которым соответствовали нулевые значения α_i и ненулевые b_i, проделаем аналогичное преобразование. В результате все коммутаторы, кроме первого, приобрели вид $[\alpha_i a_i + \beta_i b_i + C_i, d_i + D_i]$, C_i, $D_i \in M_n^2$, d_i — линейные комбинации элементов из X_n. Остается $l-1$ раз использовать преобразования вида 4, последовательно вычитая из левой линейной части $a_1 - \beta_1 b_1$ первого коммутатора левые линейные части остальных коммутаторов. В результате эта линейная часть станет нулевой. Значит, можно удалить из правой части этого коммутатора нелинейное слагаемое. Полученный коммутатор приобретает требуемый вид $[c, C]$. Заметим, что преобразование 4 не изменяет правого элемента первого коммутатора. Значит, если линейная часть c является линейной комбинацией линейных частей остальных коммутаторов, то ее можно превратить в нуль процессом, аналогичным только что описанному. Тогда из суммы можно будет убрать весь первый коммутатор, не изменяя значения u. Результат следует по индукции относительно l. Если линейная часть c не является линейной комбинацией линейных частей остальных коммутаторов, то переходим к рассмотрению суммы остальных коммутаторов. По индукции можно считать, что эта сумма приводится элементарными преобразованиями и удалением нулевых коммутаторов к виду (19). Значит, и вся сумма приводится к указанному виду. □

Лемма 17. *Пусть u — элемент свободной метабелевой алгебры $M = M_n^{\mathbb{F}}$ (или свободной метабелевой нильпотентной алгебры $M = M_{n,k}^{\mathbb{F}}$ ступени нильпотентности $k \geq 3$), представленный в виде* (19), *полученном из его исходного представления* (18). *Если u принадлежит M^3, то вторая сумма в таком представлении отсутствует, т. е.*

$$u = \sum_{i=1}^{l_1} [c_i, C_i], \tag{20}$$

где линейные части $c_1, \dots, c_{l_1}$ линейно независимы, $C_i \in M^2$.

Доказательство. Произвольный элемент v алгебры M однозначно записывается по модулю M^q (в случае $M = M_{n,k}^{\mathbb{F}}$ при ограничении $q \leq k+1$) как линейная комбинация базисных коммутаторов от свободных порождающих из X_n веса не выше, чем $q-1$. Элемент u из (19) однозначно записывается по модулю M^3 как $\sum\limits_{j=1}^{l_2} [d_j, g_j]$. Если $l_2 \geq 1$, то элемент u не может принадлежать M^3, так как элементы $d_1, g_1, \dots, d_{l_2}, g_{l_2}$ очевидно дополняются до базиса Y_n алгебры M по модулю M^2, индуцируемого множеством Z_n свободных порождающих M. Следовательно, выписанные коммутаторы от них можно считать либо базисными, либо базисными со знаком минус относительно Z_n. Значит, $l_2 = 0$. □

Лемма 18. *Пусть элемент u в условиях леммы* 17 *имеет в качестве первоначального представления выражение* (2) *из l слагаемых ранга m, которое переписывается в виде* (18) *и представляется в виде* (20). *Тогда $l_1 \leq m$.*

Доказательство. Линейные части c_i в (20) получаются описанным выше процессом обычных элементарных преобразований линейных частей из (18), а значит, и из (2). Ранг системы линейных частей в (20) не может превысить m, так как элементарные преобразования его сохраняют. □

Доказательство теоремы 5. По лемме 1 $\mathrm{width}\big(M^{\mathbb{F}}_{n,k}\big) \le n$. Поэтому нужно установить противоположное неравенство. Достаточно рассмотреть случай алгебры $M = M^{\mathbb{F}}_{n,n+2}$. Покажем существование элемента $u \in M^3$ такого, что $\mathrm{width}(u) = n$. Допустим, что такого элемента не существует, т. е. для любого такого элемента u выполнено неравенство $\mathrm{width}(u) \le n-1$. Из предложения 16 и леммы 17 следует, что любой элемент $u \in M^3$ представляется в виде (20), где $l_1 = n-1$. Если слагаемых оказалось бы меньше, чем $n-1$, то можно было бы дополнить сумму подходящими слагаемыми с нулевыми правыми множителями $C_{l_1+1}, \dots, C_{n-1}$.

Можно считать, что элементы $c_1, \dots, c_{n-1}$ являются линейными комбинациями элементов $x_1, \dots, x_n$. Так как элементы $c_1, \dots, c_{n-1}$ линейно независимы, они образуют примитивную систему, дополняющуюся до множества свободных порождающих алгебры M. В качестве дополнительного элемента можно выбрать из элементов $x_1, \dots, x_n$ тот, который линейно независим с $c_1, \dots, c_{n-1}$. Заметим, что полученная таким образом система свободных порождающих алгебры состоит из однородных относительно X_n элементов веса один. Для всех базисов такого вида имеет смысл говорить об общей однородной компоненте $M^{(p)}$ произвольного веса p. Элементы $M^{(p)}$ однозначно записываются как линейные комбинации базисных коммутаторов веса p от рассматриваемой системы свободных порождающих указанного вида.

Определим элемент u, положив

$$u = [x_2, x_1; 2] + [x_3, x_2; 3] + \dots + [x_n, x_{n-1}; n] + [x_n, x_1, x_n; n]. \tag{21}$$

Заметим, что для $i = 1, \dots, n-1$ $(i+2)$-я однородная компонента $u^{(i+2)}$ элемента u равна базисному коммутатору $[x_{i+1}, x_i; i+1]$, а $(n+2)$-я однородная компонента $u^{(n+2)}$ — базисному коммутатору $[x_n, x_1, x_n; n]$.

Допустим, что элемент u допускает представление вида (20) относительно примитивной системы элементов $\{c_1, \dots, c_{n-1}\}$ алгебры M. Пусть множество свободных порождающих, выбранных, как объяснено выше, есть $\{c_1, \dots, c_{n-1}, x_i\}$. Если $i \le n-1$, то рассмотрим компоненту $u^{(i+2)} = [x_{i+1}, x_i; i+1]$. Перепишем ее через множество свободных порождающих $\{c_1, \dots, c_{n-1}, x_i\}$:

$$u^{(i+2)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j [c_j, x_i; i+1], \quad \gamma_j \in \mathbb{F}. \tag{22}$$

При подходящем упорядочении свободных порождающих элементов все коммутаторы в (22) базисные. Очевидно, что хотя бы один из коэффициентов α_j отличен от нуля. Остается заметить, что соответствующий этому коэффициенту базисный коммутатор не может появиться в выражении (20), переписанном в базисе, соответствующем $c_1, \dots, c_{n-1}, x_i$. Все базисные коммутаторы, появляющиеся в (20), в этом случае содержат хотя бы два вхождения элементов множества $\{c_1, \dots, c_{n-1}\}$. Аналогично рассматривается случай компоненты $u^{(n+2)}$.

Теорема доказана. □

4. О коммутаторной ширине некоторых свободных нильпотентных алгебр ступени нильпотентности три

Предложения 2 и 3 вместе с теоремой 5 оставляют открытым вопрос о коммутаторной ширине алгебр $M^{\mathbb{F}}_{n,k}$ для $n \ge 3$ и $3 \le k \le n+1$. В этой связи особый интерес представляют алгебры $M^{\mathbb{F}}_{3,3}$. Далее приводим два частичных результата на эту тему. Но вначале докажем предварительную лемму. Скалярное произведение (α,β) двух векторов $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ и $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ плоскости $\mathbb{F}^2$ определяется стандартным образом как $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$. Условие ортогональности $(\alpha,\beta)=0$ записывается как $\alpha\perp\beta$. Далее $\mathbb{F}_2$ означает поле из двух элементов, а $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел.

Лемма 19. 1. *Пусть $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$ — ненулевые векторы из $\mathbb{F}_2^2$ такие, что $\alpha\perp\lambda$ и $\beta\perp\mu$. Тогда $(\alpha,\beta)=(\lambda,\mu)$.*

2. *Пусть $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $\nu=(\nu_1,\nu_2)$ — ненулевые векторы из $\mathbb{R}^2$ такие, что $\alpha\perp\lambda$, $\beta\perp\nu$ и $\gamma\perp\mu$. Тогда*

$$|(\alpha,\mu)(\beta,\lambda)(\gamma,\nu)|=|(\alpha,\nu)(\beta,\mu)(\gamma,\lambda)|. \tag{23}$$

Доказательство. 1. Достаточно перебрать все возможные случаи.

2. Используем формулу $(\alpha,\beta)=|\alpha||\beta|\cos\widehat{(\alpha,\beta)}$. Так как в формуле (23) каждый из векторов присутствует в точности один раз, достаточно доказать равенство абсолютных величин произведений косинусов углов между перемножаемыми векторами левой и правой частей произведений из (23). Легко видеть, что из условия $\gamma\perp\mu$ следует, что $|\cos\widehat{(\beta,\mu)}|=|\sin\widehat{(\beta,\gamma)}|$ и $|\cos\widehat{(\alpha,\mu)}|=|\sin\widehat{(\alpha,\gamma)}|$. Аналогично получаем из условия $\beta\perp\nu$ равенства $|\cos\widehat{(\alpha,\nu)}|=|\sin\widehat{(\alpha,\beta)}|$ и $|\cos\widehat{(\gamma,\nu)}=|\sin\widehat{(\gamma,\beta)}|$, а из условия $\alpha\perp\lambda$ — равенства $|\cos\widehat{(\beta,\lambda)}|=|\sin\widehat{(\beta,\alpha)}|$ и $|\cos\widehat{(\gamma,\lambda)}|=|\sin\widehat{(\gamma,\alpha)}|$. Остается подставить полученные значения абсолютных значений косинусов углов между перемножаемыми векторами в обе части (23) и убедиться в очевидном после подстановки выполнении равенства. □

Предложение 20. *Пусть $N=N^{\mathbb{F}}_{3,3}$ — свободная нильпотентная алгебра над полем $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$ из двух элементов или полем $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Тогда* $\mathrm{width}(N)=3$.

Доказательство. Ввиду леммы 1 достаточно найти элемент $u\in N^3$ такой, что $\mathrm{width}(u)=3$, иначе говоря, u не представим в виде суммы двух коммутаторов. Допустим противное и представим элемент $-u$ в виде суммы двух коммутаторов. Тогда элемент $-u$ имеет представление формы (20) для $l_1=2$. Переходим к записи u, изменяя порядок множителей в коммутаторах правой части. Все элементы вначале записываются как алгебраические суммы базисных коммутаторов с неопределенными коэффициентами. Центральные базисные коммутаторы веса 3 не учитываются:

$$\begin{aligned} u&=\sum_{i=1}^{2}[\alpha_i[x_3,x_2]+\beta_i[x_3,x_1]+\gamma_i[x_2,x_1],\lambda_ix_3+\mu_ix_2+\nu_ix_1]\\ &=\sum_{i=1}^{2}(\alpha_i\mu_i[x_3,x_2;2]+\beta_i\lambda_i[x_3,x_1,x_3]+\beta_i\nu_i[x_3,x_1;2]+\gamma_i\nu_i[x_2,x_1;2]+\alpha_i\lambda_i[x_3,x_2,x_3]\\ &\quad+\gamma_i\mu_i[x_2,x_1,x_2]+(\beta_i\mu_i+\alpha_i\nu_i)[x_3,x_1,x_2]+(\gamma_i\lambda_i-\alpha_i\nu_i)[x_2,x_1,x_3]). \end{aligned} \tag{24}$$

Полагаем $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, …, $\nu=(\nu_1,\nu_2)$. Тогда коэффициентами перед базисными коммутаторами $[x_3,x_2;2],\dots,[x_2,x_1;2]$ будут последовательно стандартные скалярные произведения $(\alpha,\mu),\dots,(\gamma,\mu)$, перед $[x_3,x_1,x_2]$ — сумма скалярных произведений $(\beta,\mu)+(\alpha,\nu)$, а перед $[x_2,x_1,x_3]$ — разность скалярных произведений $(\gamma,\lambda)-(\alpha,\nu)$.

Вначале рассмотрим случай основного поля $\mathbb{F}_2$. Определим элемент u формулой

$$u = [x_3, x_1, x_3] + [x_3, x_2; 2] + [x_2, x_1; 2] + [x_3, x_1, x_2]. \tag{25}$$

Равенство, в частности, означает, что $\beta \perp \nu, \alpha \perp \lambda, \gamma \perp \mu$. При этом каждый из шести векторов ненулевой, иначе равенство, очевидно, невозможно. Тогда по лемме 19 получаем равенства $1 = (\beta, \lambda) = (\alpha, \nu)$, $1 = (\alpha, \mu) = (\gamma, \lambda)$, $1 = (\gamma, \nu) = (\beta, \mu)$. Отсюда следует, что коэффициент $(\beta, \mu) + (\alpha, \nu)$ при $[x_3, x_1, x_2]$ в (25) равен нулю; противоречие.

Перейдем к случаю поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Определим элемент u следующей формулой:

$$u = \Phi[x_3, x_1, x_3] + [x_3, x_2; 2] + [x_2, x_1; 2] + \Psi[x_3, x_1, x_2] + \Xi[x_2, x_1, x_3], \tag{26}$$

где $\Phi > 0$, Ψ, Ξ — подходящие рациональные константы, выбор которых объясняется ниже. Предположим, что u является суммой двух коммутаторов вида (20). Считаем, что рациональная плоскость $\mathbb{Q}^2$ естественно вложена в вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$, а скалярное произведение векторов из $\mathbb{Q}^2$ индуцировано скалярным произведением векторов из $\mathbb{R}^2$. В используемых выше обозначениях получаем, что $\beta \perp \nu$, $\alpha \perp \lambda$, $\gamma \perp \mu$. При этом каждый из шести векторов ненулевой, иначе равенство (26), очевидно, невозможно. Тогда по (26) получаем равенства

$$\Phi = (\beta, \lambda),\ 1 = (\alpha, \mu),\ 1 = (\gamma, \nu), \quad \Psi = (\beta, \mu) + (\alpha, \nu),\ \Xi = (\gamma, \lambda) - (\alpha, \nu). \tag{27}$$

Обозначим $x = (\alpha, \nu)$. По п. 2 леммы 19 получаем равенство

$$\Phi = |x(\Psi - x)(\Xi + x)|. \tag{28}$$

Выберем константы Φ, Ψ и Ξ таким образом, чтобы уравнения

$$\pm\Phi = -x^3 + (\Psi - \Xi)x^2 + \Psi\Xi x \tag{29}$$

не имели решений в рациональных числах. Это означает, что элемент u не представим в виде суммы двух коммутаторов. Указанный выбор коэффициентов возможен. Например, можно положить $\Phi = 1$, $\Psi = \Xi = p$ для некоторого простого числа p. Уравнения (29) преобразуются к виду $x^3 - p^2x \pm 1 = 0$. Ясно, что такие уравнения неразрешимы в рациональных числах. $\square$

Замечание. Предложение 20 справедливо в случае любого подполя поля вещественных чисел, в котором в общем случае неразрешимы уравнения вида (29). Доказательство остается прежним.

5. О коммутаторной ширине свободных нильпотентных и разрешимых $\mathbb{Q}$-алгебр и колец Ли

Доказательство теоремы 7. Вначале рассмотрим алгебру $M = M_{n,3}^{\mathbb{Q}}$ ранга $n \geq 2$. Пусть u — элемент из M^3, представленный в форме (2) ранга m. Выберем из элементов $v_1, w_1, \dots, v_l, w_l$ базис $u_1, \dots, u_m$ порождаемого ими подпространства по модулю M^2. Можно считать элементы $u_1, \dots, u_m$ линейными комбинациями элементов $x_1, \dots, x_n$. Остальные элементы v_i, w_i распишем по этому базису с довесками из M^2. Подставляем полученные выражения в (2), раскрываем коммутаторы по дистрибутивности, собираем в один коммутаторы вида $[u_i, b]$ для $(i \in \{1, \dots, m\})$ и приходим к выражению

$$u = \sum_{i=1}^{m} [u_i, g_i]. \tag{30}$$

Можно считать, что $g_i \in M^2$, так как $u \in M^3$. Действительно, используя определенные выше элементарные преобразования, представление (30) можно привести к виду (20), где $c_i = u_i$, $l_1 = m$.

Возьмем в качестве u элемент d_n и предположим, что он имеет представление в виде суммы коммутаторов (2) ранга $m < n$. Тогда, как замечено выше, существует представление формы (30):

$$d_n = \sum_{i=1}^{m} [u_i, g_i], \tag{31}$$

где $g_i \in M^2$, а элементы $u_1, \dots, u_m$ линейно независимы по модулю M^2. Пусть элементы g_i $(i = 1, \dots, m)$, которые ввиду того, что алгебра M имеет ступень нильпотентности 3, можно считать однородными веса два, записаны в виде линейных комбинаций базисных коммутаторов от порождающих из X_n:

$$g_i = \sum_{l,j=1,\dots,m;\, l>j} \alpha_{l,j}^{(i)} [x_l, x_j], \quad \alpha_{l,j}^{(i)} \in \mathbb{Q}. \tag{32}$$

Представим элементы u_r $(r = 1, \dots, m)$ как линейные комбинации

$$u_r = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(r)} x_i + u_r', \quad \text{где } u_r' \in M^2,\ \beta_i^{(r)} \in \mathbb{Q}. \tag{33}$$

Определим по (32) и (33) векторы

$$a_{l,j} = \left(\alpha_{l,j}^{(1)}, \dots, \alpha_{l,j}^{(m)}\right) \in \mathbb{Q}^m \quad \text{для } l > j,\ l, j \in \{1, \dots, n\}, \tag{34}$$

$$b_i = \left(\beta_i^{(1)}, \dots, \beta_i^{(m)}\right) \in \mathbb{Q}^m \quad \text{для } i = 1, \dots, n. \tag{35}$$

Используя соотношение Якоби, для любых $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $i > j > k$, получаем формулу

$$[x_i, x_j, x_k] = -[x_j, x_k, x_i] + [x_i, x_k, x_j], \tag{36}$$

позволяющую переписывать простые левонормированные коммутаторы веса 3 от элементов из X_n в виде алгебраических сумм базисных коммутаторов от этих элементов.

Запишем равенство (31) через скалярные произведения введенных в (34) и (35) векторов. Вначале запишем соотношения для коммутаторов, содержащих два вхождения одного из свободных порождающих:

$$\begin{gathered} (a_{2,1}, b_1) = p_1, \quad (a_{3,2}, b_2) = p_2,\ \dots,\ (a_{n,n-1}, b_{n-1}) = p_{n-1}, \\ (a_{n,1}, b_n) = -p_n, \quad (a_{r,l}, b_l) = 0 \text{ для } l < r - 1, \\ (a_{l,r}, b_l) = 0 \quad \text{для } l \geq r + 1,\ \text{за исключением } l = n,\ r = 1, \end{gathered} \tag{37}$$

где $l, r \in \{1, \dots, n\}$.

Коммутаторы, включающие три различных порождающих x_i, x_j, x_k, где $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ с условием $i > j > k$, согласно (36) дают следующую систему уравнений:

$$(a_{j,k}, b_i) - (a_{i,j}, b_k) = 0, \quad (a_{i,k}, b_j) + (a_{i,j}, b_k) = 0,$$

откуда следует

$$(a_{j,k}, b_i) = -(a_{i,k}, b_j). \tag{38}$$

Так как по условию $m < n$, векторы $b_1, \dots, b_n$, определенные в (35), линейно зависимы. Заметим, что все элементы из X_n входят в запись d_n равноправным образом. Поэтому, не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что вектор b_1 является линейной комбинацией:

$$b_1 = \sum_{i=2}^{n} \gamma_i b_i, \quad \gamma_i \in \mathbb{Q}. \tag{39}$$

Стратегия дальнейших вычислений такова. В соотношениях $(a_{2,1}, b_1) = p_1$, $(a_{l,1}, b_1) = 0$ для $l = 3, \dots, n$ заменяем b_1 по формуле (39) и расписываем полученные равенства по линейности. Используем (38), чтобы получить следующие равенства, в которых снова произведем замену b_1 по формуле (39) и произведем сокращения и удаления нулевых скалярных произведений (более детальное объяснение см. в последующем примере):

$$\begin{aligned}(a_{l,1}, b_1) &= \sum_{i=2}^{n} \gamma_i (a_{l,1}, b_i) = -\sum_{i=2}^{l-1} \gamma_i (a_{l,i}, b_1) + \sum_{i=l+1}^{n} \gamma_i (a_{i,l}, b_1) \\ &+ \gamma_l (a_{l,1}, b_l) = -\sum_{i=2}^{l-1} \gamma_i^2 (a_{l,i}, b_i) + \sum_{i=l+1}^{n} \gamma_i^2 (a_{l,i}, b_i) + \gamma_l (a_{l,1}, b_l) \\ &\qquad - \sum_{i=2}^{l-1} \gamma_i \gamma_l (a_{l,i}, b_l) + \sum_{i=l+1}^{n} \gamma_l \gamma_i (a_{i,l}, b_l).\end{aligned} \tag{40}$$

Отсюда получаем систему уравнений над $\mathbb{Q}$:

$$p_1 = \gamma_2 \gamma_3 p_2,\ \gamma_2^2 p_2 = \gamma_3 \gamma_4 p_3,\ \dots,\ \gamma_{n-2}^2 p_{n-2} = \gamma_{n-1} \gamma_n p_{n-1},\ \gamma_{n-1}^2 p_{n-1} = -\gamma_n p_n. \tag{41}$$

В следующем примере дается детальное описание только что приведенных преобразований. Заметим, что используемые в преобразованиях соотношения связаны с коммутаторами длины три от базисных элементов. Преобразования, связанные с коммутаторами от двух порождающих элементов, достаточно понятны, они напрямую следуют из соотношений (37). Основная цель примера — пояснить преобразования, связанные с коммутаторами от трех различных порождающих элементов и основанные на соотношениях (38). Для этого случая соотношения однотипны, они определяются порядком индексов. Поэтому достаточно пояснить преобразования только для одной такой тройки. Переход к общему случаю очевиден.

Пример. Приведем вычисления для конкретного случая $n = 4$. Используемая для случая, когда коммутаторы зависят от двух порождающих, формула (37) дает следующие соотношения: $(a_{2,1}, b_1) = p_1$, $(a_{3,2}, b_2) = p_2$, $(a_{4,3}, b_3) = p_3$, $(a_{4,1}, b_4) = -p_4$, $(a_{3,1}, b_1) = 0$, $(a_{4,1}, b_1) = 0$, $(a_{4,2}, b_2) = 0$, $(a_{2,1}, b_2) = 0$, $(a_{3,1}, b_3) = 0$, $(a_{3,2}, b_3) = 0$, $(a_{4,2}, b_4) = 0$, $(a_{4,3}, b_4) = 0$.

Для случая, когда коммутаторы содержат три различных порождающих элемента, формула (38) (с использованием (36)) дает следующие соотношения (в скобках указаны соответствующие порождающим элементам тройки индексов):

$(\mathbf{3 > 2 > 1})$: $(a_{2,1}, b_3) = (a_{3,2}, b_1)$, $(a_{3,1}, b_2) = -(a_{3,2}, b_1) \to (a_{2,1}, b_3) = -(a_{3,1}, b_2)$;

$(\mathbf{4 > 3 > 2})$: $(a_{3,2}, b_4) = (a_{4,3}, b_2)$, $(a_{4,2}, b_3) = -(a_{4,3}, b_2) \to (a_{3,2}, b_4) = -(a_{4,2}, b_3)$;

$(\mathbf{4} > \mathbf{3} > \mathbf{1})$: $(a_{3,1}, b_4) = (a_{4,3}, b_1)$, $(a_{4,1}, b_3) = -(a_{4,3}, b_1) \to (a_{3,1}, b_4) = -(a_{4,1}, b_3)$;

$(\mathbf{4} > \mathbf{2} > \mathbf{1})$: $(a_{2,1}, b_4) = (a_{4,2}, b_1)$, $(a_{4,1}, b_2) = -(a_{4,2}, b_1) \to (a_{2,1}, b_4) = -(a_{4,1}, b_2)$.

Заменяем b_1 по формуле (39) и расписываем полученные равенства по линейности.

Формула (40) дает соотношения

$$p_1 = (a_{2,1}, b_1) = \gamma_2(a_{2,1}, b_2) + \gamma_3(a_{2,1}, b_3) + \gamma_4(a_{2,1}, b_4) = 0 + \gamma_3(a_{3,2}, b_1) + \gamma_4(a_{4,2}, b_1).$$

Первый 0 есть в (37), два других слагаемых получаются по (38). Далее снова заменяем b_1 и раскрываем скобки:

$$\gamma_3\gamma_2(a_{3,2}, b_2) + \gamma_3^2(a_{3,2}, b_3) + \gamma_3\gamma_4(a_{3,2}, b_4) + \gamma_4\gamma_2(a_{4,2}, b_2) + \gamma_4\gamma_3(a_{4,2}, b_3) + \gamma_4^2(a_{4,2}, b_4) = \gamma_3\gamma_2 p_2.$$

Происходят сокращения всех слагаемых, кроме первого, равного $\gamma_3\gamma_2 p_2$ по (37), а именно: 2-е, 4-е и 6-е равны 0 по (37), 3-е и 5-е в сумме равны 0 по второму блоку (вывод) из (38). Считаем далее:

$$0 = (a_{3,1}, b_1) = \gamma_2(a_{3,1}, b_2) + \gamma_3(a_{3,1}, b_3) + \gamma_4(a_{3,1}, b_4) = -\gamma_2(a_{3,2}, b_1) + \gamma_4(a_{4,3}, b_1).$$

Здесь второе слагаемое равно 0 по (37). Далее первое и третье слагаемые преобразуем по (38), блоки 1 и 3 соответственно, затем подставляем b_1 и раскрываем скобки. Получаем

$$-\gamma_2^2(a_{3,2}, b_2) - \gamma_2\gamma_3(a_{3,2}, b_3) - \gamma_2\gamma_4(a_{3,2}, b_4) + \gamma_4\gamma_2(a_{4,3}, b_2) + \gamma_4\gamma_3(a_{4,3}, b_3) + \gamma_4^2(a_{4,3}, b_4) = -\gamma_2^2 p_2 + \gamma_3\gamma_4 p_3.$$

Первое и пятое слагаемые дают вклад согласно (37), остальные уходят в нуль, а именно: 2-е по (37), 3-е и 4-е по (38), блок 2, 6-е по (37).

Остальные преобразования точно такие же, только с другими тройками.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $\gamma_i = \gamma_2^{\lambda_i}\rho_i$ $(i = 3, \dots, n)$, где ρ_i — произведение степеней чисел $p_1, \dots, p_{i-1}$. Легко видеть, что последовательность $\{\lambda_i\}$ определяется рекуррентно как $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 3$, …, $\lambda_i = 2\lambda_{i-2} - \lambda_{i-1}$, является знакопеременной и абсолютно строго возрастающей. Из последнего уравнения системы (41) получаем ее неразрешимость над $\mathbb{Q}$.

Например, при $n = 3$ система (41) имеет вид $p_1 = \gamma_2\gamma_3 p_2$, $\gamma_2^2 p_2 = -\gamma_3 p_3$. Нахождение γ_2 сводится к уравнению $\gamma_2^3 = p_1 p_2^{-1} p_3$, очевидно, не имеющему решений в силу предположений относительно p_1, p_2 и p_3.

Пусть $M = M_{n,3}^{\mathbb{Z}}$ — свободное метабелево нильпотентное кольцо Ли ступени нильпотентности 3. Так как кольцо M естественно вложено в алгебру $M_{n,3}^{\mathbb{Q}}$, а элемент d_n из (3) принадлежит коммутанту M^2, утверждение теоремы следует и в этом случае.

Остается объяснить заключительные утверждения теоремы. Если бы элемент d_n, определенный в (3), представлялся в виде суммы $\leq n-1$ коммутаторов, то из того, что $d_n \in M^3$, он бы допускал представление вида (20) с $n-1$ слагаемыми, очевидно, имеющее ранг, не превосходящий $n-1$, что противоречит утверждению теоремы. Отсюда и по лемме 1 получаем равенство $\mathrm{width}(d_n) = n$. Значит, d_n имеет максимальную ширину. Если бы d_n принадлежал коммутанту подалгебры, порожденной $m \leq n-1$ элементами, то по лемме 1 он выражался бы как сумма m коммутаторов. Но это не так.

Теорема доказана. $\square$

Доказательство следствия 8. Утверждения следуют из леммы 1 и того, что относительно свободные алгебры $F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{Q}})$ и кольца $F_n(\mathscr{G}^{\mathbb{Z}})$ имеют своими гомоморфными образами соответственно алгебры $M^{\mathbb{Q}}_{n,3}$ и кольца $M^{\mathbb{Z}}_{n,3}$. Значит, их коммутаторная ширина при $n \geq 3$, с одной стороны, не превосходит n, а с другой — не меньше, чем n.

Следствие доказано. $\square$

Доказательство следствия 9. Определим формулу

$$\Phi_k \rightleftharpoons (\forall y_1, \dots, y_k)(\forall x_1, \dots, x_k)(\exists u_1, \dots, u_{k-1}) \\ (\exists v_1, \dots, v_{k-1}) \ \sum_{i=1}^{k}[y_i, x_i] = \sum_{j=1}^{k-1}[u_j, v_j]. \quad (42)$$

Пусть T — произвольная алгебра Ли, квадрат которой имеет коммутаторную ширину n. Это означает, что на T истинна формула Φ_{n+1} и ложна формула Φ_n. Утверждение вытекает из следствия 6 (для случая алгебр) и следствий 4 и 8 (для случая колец).

Следствие доказано. $\square$

Замечание. Доказательство теоремы 7 основывается на том, что для свободных от квадратов попарно взаимно простых целых чисел $p_1, \dots, p_n$ в поле рациональных чисел неразрешимо ни одно из уравнений вида $\zeta^q = vp_i$, где $q \geq 2$, а v является произведением чисел $p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n$ в различных (положительных или отрицательных) степенях. Если в каком-либо поле можно выбрать элементы $p_1, \dots, p_n$ с этим свойством, то утверждение теоремы будет справедливо также и для алгебры Ли ранга n над этим полем.

6. Коммутаторная ширина свободных $\mathbb{Q}$-степенных (метабелевых) нильпотентных и свободных (метабелевых) нильпотентных групп

В ситуации, когда ступень нильпотентности превышает 2, вычисления коммутаторной ширины нильпотентных групп и алгебр несмотря на их внешнее сходство имеют некоторые различия. Они проявляются уже для ранга 2 и ступени нильпотентности 3. Проведем необходимую подготовку к доказательству соответствующих результатов.

Доказательство предложения 11. Доказательство полностью повторяет аргументы доказательства предложения 2. Предложение доказано. $\square$

Доказательство предложения 12. 1. Пусть $X_2 = \{x_1, x_2\}$ — множество свободных порождающих группы $\overline{M}^{\mathbb{Q}}_{2,3} = \overline{N}^{\mathbb{Q}}_{2,3}$ Произвольный элемент g коммутанта $\big(\overline{M}^{\mathbb{Q}}_{2,3}\big)'$ имеет единственное представление вида $[x_2, x_1]^{\alpha}[x_2, x_1; 2]^{\beta}$ $[x_2, x_1, x_2]^{\gamma}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$. Если $\alpha = 0$, то $g = \big[[x_2, x_1], x_1^{\beta} x_2^{\gamma}\big]$. В противном случае $g = \big[x_2^{\alpha}[x_2, x_1]^{\lambda}, x_1[x_2, x_1]^{\alpha^{-1}\mu}\big]$, где λ и μ входят соответственно в β и γ в качестве слагаемых. Ясно, что при подходящих значениях этих слагаемых элемент g представляется как коммутатор. Утверждение 1 установлено.

2. Пусть $X_2 = \{x_1, x_2\}$ — множество свободных порождающих группы $M = \overline{M}^{\mathbb{Q}}_{2,4}$. Полагаем $g = [x_2, x_1; 2][x_2, x_1; 3][x_2, x_1, x_2; 2]$. Покажем, что g не является

коммутатором. Предположим противное, что

$$g = [h, f] = \big[x_1^{\alpha_1} x_2^{\beta_1} [x_2, x_1]^{\gamma_1} u_1, x_1^{\alpha_2} x_2^{\beta_2} [x_2, x_1]^{\gamma_2} u_2\big], \tag{43}$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Q}$, $u_i \in \gamma_3 M$ для $i = 1, 2$. Здесь $\gamma_i M$ обозначает i-й член нижнего центрального ряда группы M. Так как $g \in \gamma_3 M$, векторы (α_1, β_1) и (α_2, β_2) пропорциональны между собой. Если один из них нулевой, сразу переходим к следующему шагу рассуждений. Если оба ненулевые, пусть $\lambda(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$ для $\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Получаем равенства

$$g = [hf^{-\lambda}, f] = \big[[x_2, x_1]^{\mu} [x_2, x_1; 2]^{\nu} [x_2, x_1, x_2]^{\eta} v, x_1^{\alpha_2} x_2^{\beta_2}\big] \tag{44}$$

для некоторых $\mu, \nu, \eta \in \mathbb{Q}$, $v \in \gamma_4 M$.

Вычисления по модулю $\gamma_4 M$ показывают, что $\mu\alpha_2 = 1$, $\mu\beta_2 = 0$, значит, $\beta_2 = 0$. Тогда (44) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} g = \big[[x_2, x_1]^{\mu} [x_2, x_1; 2]^{\nu} [x_2, x_1, x_2]^{\eta} v, x_1^{\alpha_2}\big] \\ = [x_2, x_1; 2][x_2, x_1; 3]^{\nu\alpha_2 + \phi} [x_2, x_1, x_1, x_2]^{\eta\alpha_2}, \end{aligned} \tag{45}$$

где $\phi \in \mathbb{Q}$. Остается заметить, что в правую часть (45) базисный коммутатор $[x_2, x_1, x_2; 2]$ входит в нулевой степени, а в g он входит с показателем степени 1; противоречие.

Ввиду леммы 10 $\mathrm{width}(g) = \mathrm{width}(M) = 2$. Так как группа M — гомоморфный образ любой из рассматриваемых в данном пункте групп, утверждение 2 установлено.

3. Пусть $X_2 = \{x_1, x_2\}$ — множество свободных порождающих группы $\overline{M}_{2,3}$. В [5] доказано, что элемент $[x_2, x_1]^2$ коммутанта $\overline{M}'_{2,3}$ не представим как коммутатор. Отсюда и из леммы 10 следует утверждение для группы $\overline{M}_{2,3}$. Другие случаи получаются автоматически, так как все остальные рассматриваемые в этом пункте группы имеют группу $\overline{M}_{2,3}$ своим гомоморфным образом. Утверждение 3 установлено.

Предложение доказано. $\square$

Доказательство следствия 13 полностью повторяет аргументы доказательства следствия 4. Следствие доказано. $\square$

Доказательство теоремы 14. Пусть $M = \overline{M}_{n,3}^{\mathbb{Q}}$ — свободная $\mathbb{Q}$-степенная нильпотентная группа ступени нильпотентности 3 с множеством свободных порождающих элементов $x_1, \dots, x_n$. Определим элементарные преобразования произведения коммутаторов:

$$w = \prod_{i=1}^{l} \big[x_1^{\alpha_{i,1}} \dots x_n^{\alpha_{i,n}} u_i, x_1^{\beta_{i,1}} \dots x_n^{\beta_{i,n}} v_i\big]^{\varepsilon_i}, \quad \alpha_{i,j},\ \beta_{i,j} \in \mathbb{Q},\ u_i, v_i \in M',\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, \tag{46}$$

не изменяющие его значения. Для краткости обозначим $a_i = x_1^{\alpha_{i,1}} \dots x_n^{\alpha_{i,n}}$, $b_i = x_1^{\beta_{i,1}} \dots x_n^{\beta_{i,n}}$ для $i = 1, \dots, l$. Выражение (46) запишется в виде

$$w = \prod_{i=1}^{l} [a_i u_i, b_i v_i]^{\varepsilon_i}, \quad u_i, v_i \in M',\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}. \tag{47}$$

Так как обратный к коммутатору элемент является коммутатором, полученное выражение есть произведение коммутаторов.

Элементарные преобразования выражения (47), не изменяющие элемента w, определяются следующим образом.

1. Замена $[a_iu_i, b_iv_i]$ на $\left[a_ib_i^{\mu}, b_iv_i\right]$ для $\mu \in \mathbb{Q}$.

2. Замена $[a_iu_i, b_iv_i]^{\varepsilon_i}$ на $[b_iv_i, a_iu_i]^{-\varepsilon_i}$.

3. Пусть в запись (47) входят коммутаторы $[g, f]$ и $[h, v]$. Тогда определяется замена их на $[gh^{\phi}[f, h]^{\mu}, f[f, h]^{\phi}]$ и $[[f, h]^{\phi}h, vf^{-\phi}[f, h]^{\lambda}]$ соответственно, где $\mu = \phi^2 - \phi(\phi+1)/2, \lambda = -\phi^2 + \phi(\phi-1)/2$.

То, что элементарные преобразования не изменяют элемента w, проверяется непосредственно с использованием коммутаторных соотношений (9), (10).

Согласно (5) представление (46) элемента $w \in M'$ имеет ранг m, если элементы $a_1, b_1, \ldots, a_l, b_l$ порождают по модулю M' свободную абелеву Q-степенную подгруппу размерности m. Можно считать эту подгруппу линейным пространством.

Следующее утверждение является теоретико-групповым аналогом леммы 17.

Лемма 21. *Пусть w — элемент свободной метабелевой $\mathbb{Q}$-степенной нильпотентной группы $G = M = \overline{M}_{n,3}^{\mathbb{Q}}$ ступени нильпотентности* 3 (*или свободной метабелевой $\mathbb{Q}$-степенной нильпотентной группы $G = M = \overline{M}_{n,k}^{\mathbb{Q}}$ ступени нильпотентности $k \geq 3$*), *представленный в виде* (46). *Если w принадлежит $\gamma_3 G$, то элемент w записывается в виде*

$$w = \prod_{i=1}^{m} [c_i, C_i], \tag{48}$$

где $C_i \in G'$, а элементы $c_1, \ldots, c_m$ линейно независимы по модулю G'. Здесь $m \leq l$ в точности есть ранг выражения (47).

Доказательство леммы 21. Допустим, что один из элементов a_i или b_i, для определенности можно считать, что это a_1, линейно выражается через остальные элементы. Применяя последовательно элементарные преобразования, приводим коммутатор $[a_1u_1, b_1v_1]$ к виду $[c, C]$, где $C \in M'$. Если элемент c_1 линейно выражается по модулю M' через множители остальных коммутаторов, то данный коммутатор элементарными преобразованиями превращается в тривиальный элемент и удаляется из рассмотрения. Продолжая процесс, придем к выражению (48).

Лемма доказана. □

Дальнейшие рассуждения в доказательстве теоремы 14 полностью повторяют доказательство теоремы 7.

Теорема доказана. □

Следствие 15 устанавливается аналогично следствию 8.

В заключение сформулируем предположение.

Гипотеза. *Коммутаторная ширина алгебры $M_{n,3}^{\mathbb{C}}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ ранга $n \geq 3$ строго меньше, чем n.*

Автор благодарен Е. Н. Порошенко за внимание к работе и ценные советы по ее оформлению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Порошенко Е. Н.* Коммутаторная ширина элементов свободной метабелевой алгебры Ли // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 587–613.
2. *Романьков В. А.* О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и в свободных кольцах // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 457–471.
3. *Алламбергенов Х. С., Романьков В. А.* О произведении коммутаторов в группах / Сиб. мат. журн. Новосибирск, 1985. 20 С. Деп. в ВИНИТИ, № 4566-85.
4. *Алламбергенов Х. С., Романьков В. А.* Произведения коммутаторов в группах // Докл. АН УзССР. 1984. Т. 4. С. 14–15.
5. *Akhavan-Malayeri M., Rhemtulla A.* Commutator length of abelian-by-nilpotent groups // Glasgow Math. J. 1998. V. 40. P. 117–121.
6. *Roman'kov V.* Equations over groups // Groups Complexity Cryptology. 2012. V. 4, N 2. P. 191–239.
7. *Segal D.* Words: notes on verbal width in groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; V. 361).
8. *Rhemtulla A. H.* A problem of bounded expressability in free products // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1968. V. 64. P. 573–584.
9. *Stroud P. W.* Topics in the theory of verbal subgroups: PhD Thesis. Univ. Cambridge, 1966.
10. *Романьков В. А.* О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 1. С. 60–72.
11. *Rhemtulla A. H.* Commutators of certain finitely generated soluble groups // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 1160–1164.
12. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010.
13. *Hall P.* The Edmonton notes on nilpotent groups. London: Queen Mary College, 1969. (Queen Mary College Math. Notes).
14. *Каргаполов М. И., Ремесленников В. Н., Романовский Н. С., Романьков В. А., Чуркин В. А.* Алгоритмические проблемы для σ-степенных групп // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 6. С. 364–373.
15. *Bavard C., Meigniez G.* Commutateurs dans les groupes métabéliens // Indag. Math. N. S. 1992. V. 3. P. 129–135.
16. *Смирнова Е. Г.* Ширина степени свободной нильпотентной группы ступени два // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 206–213.
17. *Смирнова Е. Г.* Об элементарной эквивалентности свободных ассоциативных алгебр // Комбинаторные и вычислительные методы в математике (ред. В. А. Романьков). Омск: изд-во ОмГУ, 1999. С. 243–246.
18. *Myasnikov A., Roman'kov V.* On rationality of verbal subsets in a free group // Theory Comput. Syst. 2013. V. 52. P. 587–598.
19. *Myasnikov A., Roman'kov V.* Verbally closed subgroups of free groups // J. Group Theory. 2014. V. 17. P. 29–40.
20. *Bryant R. M., Roman'kov V. A.* Automorphism groups of relatively free groups // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1999. V. 127. P. 411–424.
21. *Bryant R. M., Roman'kov V. A.* The automorphism groups of relatively free algebras // J. Algebra. 1998. V. 209. P. 713–723.
22. *Nikolov N., Segal D.* On finitely generated profinite groups. I. Strong completeness and uniform bounds // Ann. Math. 2007. V. 165. P. 171–238.
23. *Бокуть Л. А.* Базисы свободных полинильпотентных алгебр Ли // Алгебра и логика. 1963. Т. 2, № 4. С. 13–19.
24. *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 22 августа 2015 г.

Романьков Виталий Анатольевич
Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
romankov48@mail.ru