Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 517.55

ГОЛОМОРФНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ КОНЕЧНЫХ СЕМЕЙСТВ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ В n–КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец

Аннотация. Рассматриваются непрерывные функции, заданные на границе ограниченной n-круговой области D в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, и обладающие одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых, проходящих через конечное число точек этой области. Исследуется вопрос о существовании голоморфного продолжения таких функций в область D.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.406

Ключевые слова: голоморфное продолжение, n-круговые области, интегральное представление Сегё.

Статья содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением непрерывных функций f, заданных на границе области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны. Поэтому наши результаты существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, был получен М. Л. Аграновским и Р. Э. Вальским в [1], изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Стаутом в [2], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено А. М. Кытмановым в [3], применившим интеграл Бохнера — Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера — Мартинелли, Коши — Фантаппье, логарифмического вычета) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения (см. обзор [4], а также монографию [5]).

Вопрос о нахождении различных семейств комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения поставлен в [6]. Ясно, что семейство комплексных прямых, проходящих через одну точку, недостаточно. Как показано

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00544), Правительства Российской Федерации для поддержки научных школ под руководством ведущего ученого в Сибирском федеральном университете (код проекта 14.Y26.31.0006) и в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ–9149.2016.1.

в [7], семейство всех комплексных прямых, проходящих через конечное число точек, также, вообще говоря, недостаточно. Таким образом, простых аналогов теоремы Гартогса ожидать не следует.

В [7] доказано, что семейство комплексных прямых, пересекающее росток порождающего многообразия γ, достаточно для голоморфного продолжения. В [8] рассмотрены семейства комплексных прямых, проходящих через росток комплексной гиперповерхности, росток порождающего многообразия на комплексной гиперповерхности и росток вещественно-аналитического многообразия вещественной размерности $n-1$. В частности, в $\mathbb{C}^2$ это может быть любая вещественно-аналитическая кривая. Различные другие семейства приведены в [9–12]. Отметим работы [10, 12], в которых показано, что семейство комплексных прямых, проходящих через некоторым образом расположенное конечное число точек, достаточно для голоморфного продолжения. Правда, это утверждается только для вещественно-аналитических или бесконечно дифференцируемых функций, заданных на границе шара. Так, в $\mathbb{C}^2$ М. Л. Аграновским и Глобевником для вещественно-аналитических функций, заданных на границе шара, показано, что достаточно двух точек, лежащих в замыкании шара. В [13–16] доказано, что для голоморфного продолжения непрерывных функций, заданных на границе шара, достаточно $n+1$ точек внутри шара.

1. Основные результаты

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей. Рассмотрим комплексную прямую вида

$$l_{z,b} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta = z + bt,\ t \in \mathbb{C}\}$$
$$= \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) : \zeta_j = z_j + b_j t,\ j = 1, 2, \dots, n,\ t \in \mathbb{C}\}, \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$.

Будем говорить, что функция $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямой* $l_{z,b}$, если $\partial D \cap l_{z,b} \neq \varnothing$ и существует функция $F_{l_{z,b}}$ со следующими свойствами:

1) $F_{l_{z,b}} \in \mathscr{C}(\overline{D} \cap l_{z,b})$,

2) $F_{l_{z,b}} = f$ на множестве $\partial D \cap l_{z,b}$,

3) функция $F_{l_{z,b}}$ голоморфна во внутренних (относительно топологии $l_{z,b}$) точках множества $\overline{D} \cap l_{z,b}$.

Пусть Γ — некоторое множество в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $\mathfrak{L}_\Gamma$ семейство всех комплексных прямых $l_{z,b}$ таких, что $z \in \Gamma$, а $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$, т. е. это множество всех комплексных прямых, проходящих через точки $z \in \Gamma$.

Будем говорить, что функция $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства* $\mathfrak{L}_\Gamma$, если она обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль любой комплексной прямой $l_{z,b} \in \mathfrak{L}_\Gamma$.

Назовем *множество $\mathfrak{L}_\Gamma$ достаточным для голоморфного продолжения*, если из того, что $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\Gamma$, следует, что функция f голоморфно продолжается в D (т. е. f является CR-функцией на ∂D).

Основными результатами статьи являются следующие утверждения.

Теорема A. *Пусть $n = 2$ и D — ограниченная строго выпуклая бикруговая область с дважды гладкой границей, функция $f(\zeta) \in \mathscr{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{a,c,d}$ и точки $a, c, d \in D$ не лежат на одной комплексной прямой в $\mathbb{C}^2$. Тогда функция $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в область D.*

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество точек $a_k \in D \subset \mathbb{C}^n$, $k = 1, \dots, n+1$, не лежащих на комплексной гиперплоскости в $\mathbb{C}^n$.

Теорема B. *Пусть D — ограниченная строго выпуклая n-круговая область с дважды гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ и функция $f(\zeta) \in \mathscr{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}$. Тогда функция $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в область D.*

Пример Глобевника из [12] показывает, что в $\mathbb{C}^2$ двух точек недостаточно для голоморфного продолжения непрерывных функций, заданных на границе единичного шара B. Мы приведем пример, основанный на идее Глобевника, который показывает, что для непрерывных функций, заданных на границе шара B, семейство $\mathfrak{L}_{\mathscr{A}}$, где $\mathscr{A}$ есть множество точек $a_k \in B \subset \mathbb{C}^n$, $k = 1, \dots, n$, недостаточно для голоморфного продолжения.

Пример 1. Рассмотрим часть комплексной гиперплоскости

$$\Gamma = \{(z', w) \in B : w = 0\}$$

в шаре $B = \{(z', w) \in \mathbb{C}^n : |z'|^2 + |w|^2 < 1\}$, где $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$, $w \in \mathbb{C}$ и $|z'|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2$. Тогда функция $f = \frac{w^{k+2}}{\bar{w}}$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения с ∂B вдоль всех комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\Gamma$, является гладкой на ∂B, но не продолжается голоморфно в B.

Действительно, рассмотрим комплексные прямые, пересекающие множество Γ:

$$l_{a',b'} = \{(z', w) \in \mathbb{C}^n : z' = a' + b't,\ w = ct,\ t \in \mathbb{C}\}. \tag{2}$$

Эти прямые проходят через точки $(a', 0) \in \Gamma$. Если $|a'| < 1$, то $(a', 0) \in B$. Если $|a'| > 1$, то $(a', 0) \notin \overline{B}$.

Без ограничения общности предположим, что $|b'|^2 + |c|^2 = 1$. Пересечение $l_{a',b'} \cap \partial B$ образует окружность

$$|t|^2 + \langle a', \bar{b}' \rangle \bar{t} + \langle \bar{a}', b' \rangle t = 1 - |a'|^2, \quad \text{или} \quad |t + a'\bar{b}'|^2 = 1 - |c|^2|a'|^2, \tag{3}$$

где $\langle a', b' \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1}$.

Так как на пересечении комплексных прямых вида (2) с ∂B

$$\bar{t} = \frac{1 - |a'|^2 - \langle \bar{a}', b' \rangle t}{t + \langle a', \bar{b}' \rangle},$$

функция f на ∂B принимает вид

$$f = \frac{(t + \langle a', \bar{b}' \rangle)}{1 - |a'|^2 - \langle \bar{a}', b' \rangle t} \cdot (ct)^{k+2}.$$

Знаменатель дроби равен нулю в точке $t_0 = \frac{1 - |a'|^2}{\langle \bar{a}', b' \rangle}$. Подставляя эту точку в выражение (3), получим

$$\frac{(1 - |a'|^2)^2}{|\langle a', b \rangle|^2} + 1 - |a'|^2 > 0 \quad \text{при } |a'| < 1.$$

Следовательно, точка из $l_{a'b'}$, соответствующая t_0, лежит вне шара B, так что функция f голоморфно продолжается в $l_{a'b'} \cap B$.

Рассмотрим конечное множество точек $\mathscr{A} = \{a_1, \dots, a_{n-1}, 0\} \in B$. Тогда существует комплексная гиперплоскость, содержащая $\mathscr{A}$. Можно считать, что эта гиперплоскость есть гиперплоскость Γ.

Ясно, что эта функция гладкая класса $\mathscr{C}^k(\partial B)$, но не является CR-функцией на ∂B. Поэтому она не продолжается голоморфно в B.

2. Ядра Сегё и Пуассона

Пусть D — ограниченная полная n-круговая область в $\mathbb{C}^n$ с центром в нуле, т. е. вместе с каждой точкой $z^0 \in D$ она содержит поликруг

$$\bigl\{z \in \mathbb{C}^n : |z_k| \le \bigl|z_k^0\bigr|,\ k = 1, \dots, n\bigr\}.$$

Обозначим через $D^+ = \{(|z_1|, \dots, |z_n|) : z \in D\}$ образ области D в абсолютном октанте

$$\mathbb{R}_n^+ = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_k| \ge 0,\ k = 1, \dots, n\}.$$

Пусть $\partial D^+ = \{(|z_1|, \dots, |z_n|) : z \in \partial D\}$.

Рассмотрим меру Лебега μ на ∂D^+. Мера μ массивна [17, теорема 3.2], если для любого множества $E \subset \partial D^+$ нулевой меры выполняется условие $\overline{\partial D^+ \setminus E} \supset S(D^+)$, где $S(D^+)$ — образ границы Шилова $S(D)$ в абсолютном октанте. Справедливо следующее утверждение (см. [18, теорема 3.1]).

Предложение 1. *Если D — строго псевдовыпуклая n-круговая область (т. е. строго логарифмически выпуклая область), то граница Шилова $S(D)$ совпадает с границей области.*

Из предложения 1 следует, что мера Лебега μ на границе такой области массивна. В дальнейшем будем всегда предполагать, что мера μ массивна.

Определим ядро Сегё области D:

$$h(\bar{\zeta}, z) = \sum_{\alpha \ge 0} a_\alpha \bar{\zeta}^\alpha z^\alpha, \tag{4}$$

где

$$a_\alpha = \frac{1}{\int\limits_{\partial D^+} |\zeta|^{2\alpha} d\mu} = \frac{1}{\int\limits_{\partial D^+} |\zeta_1|^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |\zeta_n|^{2\alpha_n} d\mu},$$

$\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — мультииндекс такой, что $\alpha \ge 0$, если $\alpha_k \ge 0$, $k = 1, \dots, n$, и $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Обозначим $\mathscr{A}(D) = \mathscr{O}(D) \cap \mathscr{C}(\overline{D})$. Существование ядер Сегё в n-круговых областях дается следующей теоремой Айзенберга [3, теорема 11.2].

Теорема 1. *Пусть на ∂D^+ задана конечная мера μ. Для того чтобы для любой функции $f \in \mathscr{A}(D)$ существовало интегральное представление Сегё*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D+} d\mu \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} f(\zeta) h(\bar{\zeta}, z) \, \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in D, \tag{5}$$

где

$$\Delta_{|\zeta|} = \{\zeta : \zeta_1 = |\zeta_1| e^{i\theta_1}, \dots, \zeta_n = |\zeta_n| e^{i\theta_n},\ 0 \le \theta_k \le 2\pi,\ k = 1, \dots, n,\ |\zeta| \in \partial D^+\},$$

и ядро Сегё $h(\bar\zeta, z) = h(\bar\zeta_1 z_1, \dots, \bar\zeta_n z_n)$ *при фиксированном* $z \in D$ *входило по* $\bar\zeta$ *в* $\mathscr{O}(\overline{D})$, *а при фиксированном* $\zeta \in \partial D$ *входило по* z *в* $\mathscr{O}(D)$, *причем* h *не зависело от* f, *необходимо и достаточно, чтобы мера* μ *была массивной.*

Таким образом, ряд (4) по теореме 1 сходится абсолютно для $\zeta \in \overline{D}$ и $z \in D$ и равномерно для $\zeta \in \overline{D}$ и $z \in K \Subset D$.

Очевидно, что $\partial D = \bigcup\limits_{|\zeta| \in \partial D^+} \Delta_{|\zeta|}$. Отметим очевидное свойство ядра Сегё:

$$h(\bar\zeta, z) = \overline{h(\zeta, \bar z)} = h(z, \bar\zeta).$$

Введем ядро Пуассона

$$P(\zeta, z) = \frac{h(\bar\zeta, z) h(\zeta, \bar z)}{h(\bar z, z)} = \frac{|h(\bar\zeta, z)|^2}{h(\bar z, z)}.$$

Отметим, что ядро $P(\zeta, z)$ определено для $\zeta \in \overline{D}$ и $z \in D$, поскольку $h(\bar z, z) > 0$.

Предложение 2. *Если* $f \in \mathscr{A}(D)$, *то справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D^+} d\mu \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} f(\zeta) P(\zeta, z)\, \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in D.$$

Доказательство. Используя формулу (5), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D^+} d\mu \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} f(\zeta) P(\zeta, z)\, \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D^+} d\mu \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} f(\zeta) \frac{h(\bar\zeta, z) h(\zeta, \bar z)}{h(\bar z, z)}\, \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{h(\bar z, z)} \int\limits_{\partial D^+} d\mu \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} (f(\zeta) h(\zeta, \bar z)) h(\bar\zeta, z)\, \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{h(\bar z, z)} f(z) h(z, \bar z) = f(z), \end{aligned}$$

поскольку функция $f(\zeta) h(\zeta, \bar z)$ голоморфна по $\zeta \in \overline{D}$ для фиксированного $z \in D$. $\square$

Лемма 1. *Рассмотрим ядро Сегё при* $\zeta = z$:

$$h(\bar z, z) = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha |z|^{2\alpha} > 0$$

в D. *Тогда* $h(\bar z, z) \to \infty$, *если* $z \to \partial D$.

Доказательство. Пусть $\zeta \in \partial D$ и $0 < r < 1$. Положим $z = r\zeta \in D$. Тогда

$$h(r\bar\zeta, r\zeta) = \sum_{\alpha \geq 0} r^\alpha a_\alpha |\zeta|^{2\alpha} = \sum_{\alpha \geq 0} r^\alpha \frac{|\zeta|^{2\alpha}}{\int\limits_{\partial D^+} |\zeta|^{2\alpha} d\mu}. \tag{6}$$

Данный ряд сходится для всех $r \in (0, 1)$. Рассмотрим

$$\frac{\sqrt[\|\alpha\|]{|\zeta|^{2\alpha}}}{\sqrt[\|\alpha\|]{\int\limits_{\partial D^+} |\zeta|^{2\alpha}\, d\mu}}.$$

Пусть $\|\alpha\| = k$. Рассмотрим мультииндекс $\alpha^k = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$ такой, что $\alpha_1^k = \dots = \alpha_n^k$, тогда $\alpha_j^k = \frac{k}{n}$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому $\frac{\alpha_j^k}{k} = \frac{1}{n} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{n}$. Из леммы 1.2 в [17] следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{\int\limits_{\partial D^+} |\zeta|^{2\alpha}\, d\mu} = \sup_{\partial D^+} |\zeta|^{\frac{2}{n}}, \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{\sup_{\partial D^+} |\zeta|^{2\alpha}} = \sup_{\partial D^+} |\zeta|^{\frac{2}{n}}.$$

По признаку сравнения для данной подпоследовательности $\{\alpha^k\}$ сходимость ряда (6) эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{\alpha\geq 0} r^{\alpha^k}$, а при $r \to 1$ он стремится к бесконечности. $\square$

Предположим, что область D удовлетворяет условию

(A) $h(\bar{\zeta}, rz)$ равномерно ограничена по z вне любой окрестности ζ при $\zeta, z \in \partial D$ и $\zeta \neq z$, $r \to 1$.

Теорема 2. *Если $f \in \mathscr{C}(\partial D)$, то интеграл Пуассона*

$$F(z) = P[f](z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D^+} d\mu \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} f(\zeta) P(\zeta, z)\, \frac{d\zeta}{\zeta}$$

является вещественно-аналитической функцией в области D и непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и его граничные значения совпадают с f на ∂D.

Доказательство. Вещественная аналитичность $F(z)$ следует из вещественной аналитичности ядра Сегё и ядра Пуассона. Из условия (A) и леммы 1 вытекает, что $P(\zeta, rz)$ равномерно стремится к нулю вне любой окрестности точки ζ для $\zeta, z \in \partial D$, $\zeta \neq z$ и $r \to 1$. Кроме того, $P(\zeta, z) > 0$ и $P[1](\zeta) = 1$. Следовательно, ядро Пуассона $P(\zeta, z)$ является аппроксимативной единицей [19, теорема 1.9]. $\square$

Приведем примеры областей, удовлетворяющих условию (A).

Пример 2. Рассмотрим шар $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq 1\}$. Тогда ядро Сегё для меры Лебега на ∂B равно

$$h(\bar{\zeta}, z) = C\frac{1}{(1 - \langle\bar{\zeta}, z\rangle)^n},$$

где $C = \text{const}$ и $\langle\bar{\zeta}, z\rangle = \bar{\zeta}_1 z_1 + \dots + \bar{\zeta}_n z_n$. Рассмотрим точки $\zeta, z \in \partial D$ и $\zeta \neq z$, $0 < r < 1$, тогда $|\langle\bar{\zeta}, rz\rangle| \leq r|\bar{\zeta}| \cdot |z| \leq r$. Равенство достигается, если $z = \lambda\zeta$ и $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$. В этом случае $\langle\bar{\zeta}, z\rangle = \lambda\langle\bar{\zeta}, \zeta\rangle = \lambda|\zeta|^2 = \lambda$, тогда $(1 - \langle\bar{\zeta}, rz\rangle) = 1 - \lambda r \underset{r\to 1}{\to} 1 - \lambda \neq 0$.

Пример 3. Рассмотрим область в $\mathbb{C}^2$, которая удовлетворяет условию (A):

$$D = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^{\frac{2}{p}} < 1,\ 0 \leq |w| < 1\}, \tag{7}$$

где $p \in \mathbb{N}$. Рассмотрим меру $d\mu = |w|^2 d\sigma$, где $d\sigma$ — мера Лебега. Тогда ядро Сегё имеет вид [17]

$$h(\bar{\zeta}, \bar{\eta}, z, w) = \frac{(1 - \bar{\zeta}z)^{p-1}}{((1 - \bar{\zeta}z)^p - \bar{\eta}w)^2}. \tag{8}$$

Покажем, что $h(\bar\zeta,\bar\eta,z,w)$ имеет конечные значения при $(\zeta,\eta)\in\partial D$, $(z,w)\in\partial D$ и $(\zeta,\eta)\neq(z,w)$. Поскольку $|w|^{\frac{2}{p}}=1-|z|^2$, то $|w|^2=(1-|z|^2)^p$, тогда $|\eta|^2=(1-|\zeta|^2)^p$.

Докажем, что выражение $(1-\bar\zeta z)^p-\bar\eta w$ не обращается в нуль. Для этого достаточно показать, что $|1-\bar\zeta z|^p>|\bar\eta w|$ или

$$|1-\bar\zeta z|^{2p}>|\eta|^2|w|^2=(1-|\zeta|^2)^p(1-|z|^2)^p,$$

или

$$|1-\bar\zeta z|^2>(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2), \tag{9}$$

так как

$$\min|1-\bar\zeta z|=|1-|\bar\zeta z||^2,\quad \max|1-\bar\zeta z|=|1+|\bar\zeta z||^2.$$

Покажем, что неравенство (9) верное. Действительно, с учетом

$$(1-|\bar\zeta z|)^2=1-2|\bar\zeta z|+|\bar\zeta z|^2,$$

из (9) получим

$$1-2|\bar\zeta z|+|\bar\zeta z|^2>1+|\bar\zeta z|^2-|z|^2-|\bar\zeta|^2\iff(|z|-|\bar\zeta|)^2>0.$$

Тогда у ядра Сегё (8) знаменатель в нуль не обращается и область (7) удовлетворяет условию (A). Нетрудно показать, что для областей с явно выраженными ядрами Сегё условие (A) выполняется [20].

Пример 4. Пусть D — строго выпуклая n-круговая область с гладкой границей вида $D=\{z\in\mathbb{C}^n:\rho(z)<0\}$, где $\rho\in\mathscr{C}^2(\overline{D})$ и $\operatorname{grad}\rho|_{\partial D}\neq0$. Покажем, что область D удовлетворяет условию (A). Для этого напомним интегральное представление Лере для голоморфных функций $f\in\mathscr{A}(D)$ [3]:

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k d\bar\zeta[k]\wedge d\zeta}{[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1-z_1)+\dots+\rho'_{\zeta_n}(\zeta_n-z_n)]^n},$$

где

$$\delta_k=\begin{vmatrix}\rho'_{\zeta_1} & \dots & \rho'_{\zeta_n}\\ \rho''_{\zeta_1\bar\zeta_1} & \dots & \rho''_{\zeta_n\bar\zeta_1}\\ & [k] & \\ \rho''_{\zeta_1\bar\zeta_n} & \dots & \rho''_{\zeta_n\bar\zeta_n}\end{vmatrix},\quad k=1,\dots,n,$$

$d\zeta=d\zeta_1\wedge\dots\wedge d\zeta_n$, $d\bar\zeta[k]=d\bar\zeta_1\wedge\dots\wedge d\bar\zeta_{k-1}\wedge d\bar\zeta_{k+1}\wedge\dots\wedge d\bar\zeta_n$.

Знаменатель ядра $\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1-z_1)+\dots+\rho'_{\zeta_n}(\zeta_n-z_n)$ отличен от нуля при $\zeta,z\in\partial D$ и $\zeta\neq z$. Действительно, $\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1-z_1)+\dots+\rho'_{\zeta_n}(\zeta_n-z_n)=0$ определяет комплексную касательную плоскость к ∂D в точке ζ. Если область D строго выпуклая, то касательная плоскость пересекает границу области только в точке ζ. Ядро Сегё области D выражается через ядро Лере по следствию 26.13 в [3], и вид знаменателя ядра Сегё при этом не меняется, поэтому такие области удовлетворяют условию (A).

Следствие 26.13 в [3] справедливо для строго псевдовыпуклых областей в $\mathbb{C}^2$ либо для строго псевдовыпуклых и линейно-выпуклых областей в $\mathbb{C}^n$. Как известно, n-круговые линейно-выпуклые области выпуклы [17, 3]. Поэтому при $n>2$ данный класс областей совпадает с классом строго выпуклых областей.

3. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = c\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{\zeta}_k\, d\bar{\zeta}[k]\wedge d\zeta,$$

где $c = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$. Найдем сужение этой формы на ∂D для области вида

$$D = \{z\in\mathbb{C}^n : \rho(|z_1|^2,\dots,|z_n|^2) < 0\},$$

где $\rho(z)$ — дважды гладкая функция и $\operatorname{grad}\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial\rho}{\partial z_n}\right)\neq 0$ на ∂D.

Обозначим $|z_k|^2 = t_k$, $k = 1,\dots,n$. Тогда

$$\operatorname{grad}\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t_1}\bar{z}_1,\dots,\frac{\partial\rho}{\partial t_n}\bar{z}_n\right)\neq 0.$$

Функцию ρ можно выбрать так, что $|\operatorname{grad}\rho||_{\partial D} = 1$. Пусть $\nu = \omega|_{\partial D}$. Тогда

$$\nu = c\sum_{k=1}^{n}\bar{\zeta}_k\frac{\partial\rho}{\partial\bar{\zeta}_k} = c\sum_{k=1}^{n}\bar{\zeta}_k\frac{\partial\rho}{\partial t_k}\zeta_k\, d\sigma = c\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2\frac{\partial\rho}{\partial t_k}\, d\sigma,$$

где $d\sigma$ — мера Лебега на ∂D. В случае n-круговых областей $d\sigma = d\sigma_+\cdot d\sigma'$, где $d\sigma'$ — мера, определяемая формой

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\wedge\dots\wedge\frac{d\zeta_n}{\zeta_n},$$

а $d\sigma_+$ — мера Лебега на ∂D^+. Поэтому

$$\nu = c\sum_{k=1}^{n}t_k\frac{\partial\rho}{\partial t_k}\, d\sigma_+\cdot d\sigma'.$$

Обозначим

$$\mu = c\sum_{k=1}^{n}t_k\frac{\partial\rho}{\partial t_k}\, d\sigma_+. \tag{10}$$

Лемма 2. *Если D — полная n-круговая область, то μ является мерой на ∂D^+.*

Доказательство. Для того чтобы $\mu\geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{n}t_k\frac{\partial\rho}{\partial t_k}\geq 0$. Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n}t_k\frac{\partial\rho}{\partial t_k} = |t|\cdot|\operatorname{grad}_t\rho|\cdot\cos\alpha$, где α — угол между векторами t и $\operatorname{grad}_t\rho$, то $\mu\geq 0$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Это следует из полноты области D. $\square$

Следствие 1. *Если D — полная n-круговая строго псевдовыпуклая область, то мера μ массивна на ∂D^+.*

Рассмотрим ядро

$$Q(\zeta,z,w) = \frac{h(\bar{\zeta},z)h(\zeta,w)}{h(w,z)}.$$

При $w=\bar{\zeta}$ получим $Q(\zeta,z,\bar{z}) = P(\zeta,z)$ и $h(\bar{z},z)>0$. Поэтому существует окрестность U диагонали $w=\bar{z}$ в $D_z\times D_w$, в которой $h(w,z)\neq 0$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z,w) = c\int\limits_{\partial D} f(\zeta)Q(\zeta,z,w)\,d\nu = c\int\limits_{\partial D^+} d\mu \int\limits_{\Delta_{|\zeta|}} f(\zeta)Q(\zeta,z,w)\,\frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (z,w)\in D\times D.$$

Она голоморфна по $(z,w)\in U$, а при $w=\bar z$ имеем $\Phi(z,w)=F(z)$ и

$$\frac{\partial^{\delta+\gamma}\Phi(z,w)}{\partial z^\delta \partial w^\gamma}\bigg|_{w=\bar z} = \frac{\partial^{\delta+\gamma}F(z)}{\partial z^\delta \partial \bar z^\gamma}. \tag{11}$$

Пусть $\zeta = bt$, $b\in\mathbb{CP}^{n-1}$, $t\in\mathbb{C}$. Тогда, как показано в [4],

$$\omega = c\frac{dt}{t}\wedge\lambda(b), \tag{12}$$

где $\lambda(b)$ — дифференциальная форма, не зависящая от t.

Теорема 3. *Пусть D — ограниченная полная n-круговая строго псевдовыпуклая область и функция $f\in\mathscr{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых, проходящих через начало координат. Тогда $\Phi(0,w)=\mathrm{const}$ и $\frac{\partial^\delta\Phi(z,w)}{\partial z^\delta}\big|_{z=0}$ — многочлен по w степени не выше $\|\delta\|$.*

Доказательство. Пусть $l_{0,b}$ — комплексная прямая, проходящая через начало координат в направлении вектора $b\in\mathbb{CP}^{n-1}$. Рассмотрим

$$Q(bt,z,w) = \frac{h(\bar b\bar t,z)h(bt,w)}{h(z,w)}.$$

Тогда

$$h(\bar b\bar t,z) = \sum_{\alpha\ge 0} a_\alpha(\bar b z)^\alpha \bar t^{\|\alpha\|} \tag{13}$$

и $h(0,0)=h(\zeta,0)=a_0$. Отсюда

$$\begin{aligned}\Phi(0,0) &= \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\frac{h(\bar\zeta,0)h(\zeta,0)}{h(0,0)}\,d\nu = \frac{1}{h(0,0)}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)h(\bar\zeta,0)h(\zeta,0)\,d\nu\\ &= \frac{c}{h(0,0)}\int\limits_{\partial D\cap l_{0,b}}\lambda(b)\int\limits_{l_{0,b}} h(\bar b\bar t,0)h(bt,0)\frac{f(bt)}{t}\,dt\\ &= \frac{ca_0^2}{a_0}\int\limits_{\partial D\cap l_{0,b}}\lambda(b)\int\limits_{l_{0,b}}\frac{f(bt)}{t}\,dt = ca_0\int\limits_{\partial D\cap l_{0,b}}\lambda(b)\int\limits_{l_{0,b}}\frac{f(bt)}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Определим производные

$$\frac{\partial^{\delta+\gamma}\Phi(z,w)}{\partial z^\delta\partial w^\gamma} = \frac{\partial^{\delta_1}\Phi(z,w)}{\partial z_1^{\delta_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial^{\delta_n}\Phi(z,w)}{\partial z_n^{\delta_n}}\cdot\frac{\partial^{\gamma_1}\Phi(z,w)}{\partial w_1^{\gamma_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial^{\gamma_n}\Phi(z,w)}{\partial w_n^{\gamma_n}},$$

где $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$. Найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\gamma\Phi(0,w)}{\partial w^\gamma} &= \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\frac{\partial^\gamma Q(\zeta,0,w)}{\partial w^\gamma}\,d\nu\\ &= \frac{a_0}{a_0}\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\frac{\partial^\gamma h(\zeta,w)}{\partial w^\gamma}\,d\nu = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\frac{\partial^\gamma h(\zeta,w)}{\partial w^\gamma}\,d\nu.\end{aligned}$$

Теперь вычислим

$$\frac{\partial^\gamma h(\zeta,w)}{\partial w^\gamma}=\sum_{\alpha-\gamma\geq 0}a_\alpha d_{\alpha,\gamma}\zeta^\alpha w^{\alpha-\gamma},$$

где $d_{\alpha,\gamma}$ — некоторая константа. При $w=0$ получим

$$\left.\frac{\partial^\gamma h(\zeta,w)}{\partial w^\gamma}\right|_{w=0}=a_\alpha d_{\gamma,\gamma}\zeta^\gamma.$$

Отсюда

$$\left.\frac{\partial^\gamma \Phi(0,w)}{\partial w^\gamma}\right|_{w=0}=c\int\limits_{\partial D\cap l_{0,b}}\lambda(b)\int\limits_{l_{0,b}}f(bt)a_\gamma d_{\gamma,\gamma}b^\gamma t^{\|\gamma\|}\,\frac{dt}{t}=0,$$

если $\|\gamma\|>0$. Таким образом, $\Phi(0,w)=\mathrm{const}$.

Вычислим

$$\left.\frac{\partial^{\delta+\gamma}(h(\bar\zeta,z)\cdot h(\zeta,w))}{\partial z^\delta\partial w^\gamma}\right|_{\substack{z=0,\\ w=0}}=\frac{\partial^\delta h(\bar\zeta,z)}{\partial z^\delta}\cdot\left.\frac{\partial^\gamma h(\zeta,w)}{\partial w^\gamma}\right|_{\substack{z=0,\\ w=0}}$$
$$=\delta!a_\delta\bar\zeta^\delta\gamma!a_\gamma\zeta^\gamma=\delta!\gamma!a_\delta a_\gamma\bar\zeta^\delta\zeta^\gamma,$$

где $\delta!=\delta_1!\cdot\ldots\cdot\delta_n!$, $\gamma!=\gamma_1!\cdot\ldots\cdot\gamma_n!$. Имеем

$$\left.\frac{\partial^{\delta+\gamma}Q(\zeta,z,w)}{\partial z^\delta\partial w^\gamma}\right|_{\substack{z=0,\\ w=0}}=\frac{\partial^{\delta+\gamma}}{\partial z^\delta\partial w^\gamma}\left.\left(\frac{h(\bar\zeta,z)h(\zeta,w)}{h(z,w)}\right)\right|_{\substack{z=0,\\ w=0}}=\sum_{k=1}^N C_k\bar\zeta^{\delta-\varepsilon^k}\zeta^{\gamma-\varepsilon^k},\tag{14}$$

поскольку при подстановке $z=0$ и $w=0$ в производные отличными от нуля могут быть только те производные, у которых была взята производная одинакового порядка по z и w.

Пусть $\|\delta\|<\|\gamma\|$. Тогда из (14) и (12) получим

$$\left.\frac{\partial^{\delta+\gamma}\Phi(z,w)}{\partial z^\delta\partial w^\gamma}\right|_{\substack{z=0,\\ w=0}}=c\int\limits_{\partial D}f(\zeta)\left.\frac{\partial^{\delta+\gamma}Q(\zeta,z,w)}{\partial z^\delta\partial w^\gamma}\right|_{\substack{z=0,\\ w=0}}d\nu$$
$$=c\sum_{k=1}^N C_k\int\limits_{\partial D}f(\zeta)\bar\zeta^{\delta-\varepsilon^k}\zeta^{\gamma-\varepsilon^k}\,d\nu=c\sum_{k=1}^N C_k\int\limits_{\partial D\cap l_{0,b}}\lambda(b)\int\limits_{l_{0,b}}f(bt)\bar t^{\|\delta-\varepsilon^k\|}t^{\|\gamma-\varepsilon^k\|-1}\,dt$$
$$=c\sum_{k=1}^N C_k\int\limits_{\partial D\cap l_{0,b}}\lambda(b)\int\limits_{l_{0,b}}f(bt)|t|^{\|\delta-\varepsilon^k\|}t^{\|\gamma-\delta\|-1}\,dt$$
$$=C_\delta\sum_{k=1}^N C_k\int\limits_{\partial D\cap l_{0,b}}\lambda(b)\int\limits_{l_{0,b}}f(bt)t^{\|\gamma-\delta\|-1}\,dt=0,$$

поскольку сечение области D прямой $l_{0,b}$ является кругом.

Таким образом, производные $\left.\frac{\partial^\delta\Phi(z,w)}{\partial z^\delta}\right|_{z=0}$ являются многочленами по w степени не выше $\|\delta\|$. $\square$

4. Дополнительное построение

Рассмотрим отображение $\zeta = \chi(\eta) : \overline{B} \to \overline{D}$, где B — единичный шар в $\mathbb{C}^n$ с центром в нуле, переводящее точку нуль в точку $a \in D$. Отображение χ будем строить следующим образом.

Рассмотрим комплексную прямую $\lambda_b = \{\eta \in \mathbb{C}^n : \eta = b\tau,\ b \in \mathbb{CP}^{n-1},\ \tau \in \mathbb{C}\}$ и комплексную прямую $l_{a,b} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta = a + bt,\ b \in \mathbb{CP}^{n-1},\ t \in \mathbb{C}\}$. Пересечение $D_{a,b} = l_{a,b} \cap D$ является строго выпуклой областью в $\mathbb{C}$, поэтому существует конформное отображение $\chi_b(\tau)$ единичного круга в $D_{a,b}$, переводящее точку $\tau = 0$ в точку $t = 0$. Это отображение по теореме Каратеодори [21] продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей. Тогда точке $\eta = b\tau \in D \cap \lambda_b$ поставим в соответствие точку $\chi(\eta) = a + b\chi_b(\tau) \in D_{a,b}$.

Лемма 3. *Пусть D — полная n-круговая строго выпуклая область с дважды гладкой границей. Тогда отображение $\chi(\eta)$ корректно определено и является диффеоморфизмом $\overline{B}$ на $\overline{D}$ класса $\mathscr{C}^1$.*

Доказательство. Корректность отображения χ следует из того, что вектор $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ определяется с точностью до умножения на ненулевое комплексное число.

Ясно, что χ — взаимно однозначное отображение $\overline{B}$ на $\overline{D}$. По теореме Келлога [21] отображение $\chi_b(\tau)$ продолжается до диффеоморфизма класса $\mathscr{C}^1$ множества $\overline{B} \cap \lambda_b$ на множество $\overline{D}_{a,b}$.

Если $|b - b'|$ достаточно мало, то на границе ∂B точки $b\tau$ и $b'\tau$ достаточно близки. Следовательно, выражение

$$|\chi_b(\tau) - \chi_{b'}(\tau)| \tag{15}$$

достаточно мало на границе ∂D. По теореме максимума модуля выражение (15) достаточно мало и в области D. То же самое можно сказать о разностном отношении. Поэтому отображение χ является диффеоморфизмом $\overline{B}$ на $\overline{D}$. $\square$

В дальнейшем будем предполагать, что D — полная n-круговая строго выпуклая область с дважды гладкой границей.

Лемма 4. *Производные функции $\chi(\eta)$ голоморфны по τ при фиксированном b.*

Доказательство. Очевидно, что производные по τ функции $\chi(\eta)$ голоморфны при фиксированном b. Рассмотрим производные χ по действительным или мнимым координатам b. Эти производные являются голоморфными функциями по t в силу определения производной, теоремы Кантора о равномерной непрерывности и формулы конечных приращений. $\square$

Лемма 5. *Пусть $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых, проходящих через точку $a \in D$. Тогда функция $f^*(\eta) = f(\chi(\eta))$ непрерывна на ∂B и обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых, проходящих через нуль.*

Доказательство. Рассмотрим голоморфное продолжение $f_{a,b}(\zeta)$ функции f в область $D_{a,b}$. Тогда функция $f_b^*(\eta) = f_{a,b}(\chi_b(\tau))$ голоморфна по τ в $B \cap \lambda_b$ по построению отображения $\chi(\eta)$. $\square$

Сделав замену в интеграле для функции Φ, получим

$$\Phi(z,w) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)Q(\zeta,z,w)\,d\nu(\zeta)$$
$$= \int\limits_{\partial B} f(\chi(\eta))Q(\chi(\eta),z,w)\,d\nu(\chi(\eta)) = \int\limits_{\partial B} f^*(\eta)Q^*(\eta,z,w)\,d\nu^*(\eta).$$

Рассмотрим форму

$$\omega^*(\eta) = \omega(\chi(\eta)) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{\chi}_k(\eta)\,d\bar{\chi}(\eta)[k]\wedge d\chi(\eta).$$

По лемме 4 форма $d\chi(b\tau)$ голоморфна по τ при фиксированном b, а форма $d\bar{\chi}(b\tau)[k]$ антиголоморфна по τ при фиксированном b.

Лемма 6. *Формы $d\bar{\chi}(b\tau)|_{|\tau|=1}$, $k=1,\dots,n$, являются формами с голоморфными коэффициентами по τ.*

Доказательство. Поскольку функция $\chi_k(b\tau)$ конформна по τ при фиксированном b, ее производная по τ отлична от нуля. Тогда функция $\bar{\chi}_k(b\tau)$ антиголоморфна по τ при фиксированном b и

$$\bar{\chi}_k(b\tau) = \bar{\tau}\cdot\bar{\psi}_k(b\tau), \quad \bar{\psi}_k(b\tau)|_{\tau=0}\neq 0.$$

При $|\tau|=1$ имеем $\bar{\tau}=\frac{1}{\tau}$. Тогда

$$\bar{\chi}_k(b\tau)|_{|\tau|=1} = \frac{1}{\tau}\bar{\psi}_k(b\tau) = \frac{1}{\tau}\psi_k(\bar{b}\bar{\tau}) = \frac{1}{\tau}\psi_k\left(\bar{b}\frac{1}{\tau}\right),$$

поэтому правая часть имеет полюс 1 порядка при $\tau=0$. Тем самым форма $d\bar{\chi}_k(b\tau)|_{|\tau|=1}$ совпадает с формой с голоморфными по τ коэффициентами. $\square$

Теорема 4. *Пусть $f\in\mathscr{C}(D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых, проходящих через точку $a\in D$. Тогда*

$$\left.\frac{\partial^\gamma\Phi(z,w)}{\partial w^\gamma}\right|_{\substack{z=a,\\ w=\bar{a}}} = 0$$

при $\|\gamma\|>0$.

Доказательство. Рассмотрим производную

$$\left.\frac{\partial^\gamma\Phi(z,w)}{\partial w^\gamma}\right|_{w=\bar{a}} = \int\limits_{\partial B} f^*(\eta)\frac{\partial^\gamma Q^*(\eta,z,w)}{\partial w^\gamma}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\bar{\chi}_k(\eta)\,d\bar{\chi}(\eta)[k]\wedge d\chi(\eta)\Big|_{w=\bar{a}}$$
$$= \int\limits_{\partial B\cap\lambda_b}\int\limits_{\lambda_b} f^*(bt)\frac{\partial^\gamma Q^*(bt,z,w)}{\partial w^\gamma}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{t}\psi_k\left(\bar{b}\frac{1}{t}\right)d\chi\left(\bar{b}\frac{1}{t}\right)[k]\wedge d\chi(bt)\Big|_{w=\bar{a}}. \tag{16}$$

Найдем

$$\left.\frac{\partial^\beta h(\chi(\eta),w)}{\partial w^\beta}\right|_{w=\bar{a}} = \sum_{\substack{\alpha-\beta\geq 0,\\ \|\alpha-\beta\|\neq 0}} a_\alpha d_\beta \chi^\alpha(\eta)\bar{a}^{\alpha-\beta},$$

где d_β — некоторая константа. Тогда

$$\frac{\partial^\gamma Q^*(\eta,z,w)}{\partial w^\gamma}\bigg|_{\substack{z=a,\\ w=\bar a}} = h(\bar\eta,a)\frac{\partial^\gamma}{\partial w^\gamma}\left(\frac{h(\zeta,w)}{h(w,z)}\right)\bigg|_{\substack{z=a,\\ w=\bar a}}$$
$$= h(\bar\eta,a)\sum_{0\le\beta\le\gamma} c_\beta \frac{\frac{\partial^\beta h(\zeta,w)}{\partial w^\beta}\cdot\frac{\partial^{\gamma-\beta}h(w,z)}{\partial w^{\gamma-\beta}}}{h^{\|\gamma\|+1}(w,z)}\Bigg|_{\substack{z=a,\\ w=\bar a}}$$
$$= \frac{h(\bar\eta,a)}{h^{\|\gamma\|+1}(\bar a,a)}\sum_{0\le\beta\le\gamma} c_\beta\frac{\partial^\beta h((\zeta,w))}{\partial w^\beta}\cdot\frac{\partial^{\gamma-\beta}h(w,a)}{\partial w^{\gamma-\beta}}\bigg|_{w=\bar a}.$$

Поэтому выражение (16) состоит из линейной комбинации слагаемых вида

$$\int\limits_{\partial B\cap\lambda_b}\int\limits_{\lambda_b} f^*(bt)h\left(\frac{\bar b}{t},a\right)\frac{\partial^\beta h(bt,w)}{\partial w^\beta}\cdot\frac{\partial^{\gamma-\beta}h(w,a)}{\partial w^{\gamma-\beta}}\bigg|_{w=\bar a}$$
$$\times\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\frac{1}{t}\psi_k\left(\frac{\bar b}{t}\right)d\chi\left(\frac{\bar b}{t}\right)[k]\wedge d\chi(bt).$$

По лемме 6 и условиям теоремы эти слагаемые равны

$$\int\limits_{\partial B\cap\lambda_b}\int\limits_{\lambda_b} f^*(bt)\frac{1}{t}h\left(\frac{\bar b}{t},a\right)\cdot\sum_{\substack{\alpha-\beta\ge0,\\ \|\alpha-\beta\|\ne0}} a_\alpha d_\beta b^\alpha t^\alpha \bar a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\partial^{\gamma-\beta}h(w,a)}{\partial w^{\gamma-\beta}}\bigg|_{w=\bar a}$$
$$\times\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\psi_k\left(\frac{\bar b}{t}\right)d\chi\left(\frac{\bar b}{t}\right)[k]\wedge d\chi(bt)=0$$

при $\|\gamma\|>0$. $\square$

Следствие 2. *В условиях теоремы* 4 $\Phi(a,w)=\mathrm{const}$.

5. Свойства функции $\Phi(z,w)$

Теорема 5. *Пусть D — полная n-круговая строго выпуклая область с дважды гладкой границей, $f(\zeta)\in\mathscr{C}(\partial D)$ и $a,c\in D$. Пусть функция $\Phi(z,w)$ удовлетворяет условиям $\Phi(a,w)=\mathrm{const}$, $\Phi(c,w)=\mathrm{const}$; $\frac{\partial^\alpha\Phi(a,w)}{\partial z^\alpha}$, $\frac{\partial^\alpha\Phi(c,w)}{\partial z^\alpha}$ — многочлены по w степени не выше, чем $\|\alpha\|$. Тогда для любого фиксированного z на комплексной прямой*

$$l_{a,c}=\{(z,w): z=at+c(1-t),\ w=\bar at+\bar c(1-t),\ t\in\mathbb{C}\}$$

выполняется $\Phi(z,w)=\mathrm{const}$ *по* w, *т. е.* $\frac{\partial^\gamma\Phi(z,w)}{\partial w^\gamma}=0$ *при* $\|\gamma\|>0$.

Доказательство. Разлагая функцию $\Phi(z,w)$ в ряд Тейлора в точке $(a,\bar a)$, получим

$$\Phi(z,w)=\sum_{k,l=0}^\infty P_{k,l}(z-a,w-\bar a), \tag{17}$$

где $P_{k,l}$ — однородные многочлены по $(z-a)$ степени k, а по $(w-\bar a)$ степени l. Ряд (17) сходится к функции $\Phi(z,w)$ в окрестности точки $(a,\bar a)$.

Сделаем замену $z-a\to z$, $w-\bar a\to w$. Тогда точка c перейдет в точку $\tilde c=c-a$, а функция $\Phi(z,w)$ — в функцию $\widetilde\Phi(z,w)$, голоморфную в окрестности нуля $U_z \times U_w$, где U_z — некоторая окрестность нуля по z, U_w — некоторая окрестность нуля по w, а ряд (17) перейдет в ряд

$$\widetilde{\Phi}(z,w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} P_{k,l}(z,w), \tag{18}$$

который сходится в окрестности $U_z \times U_w$. Поэтому условия теоремы примут вид

$$\widetilde{\Phi}(0,w) = \mathrm{const}, \quad \widetilde{\Phi}(\tilde{c},w) = \mathrm{const}, \tag{19}$$

$\frac{\partial^\alpha \Phi(0,w)}{\partial z^\alpha}$ — многочлен по w степени не выше, чем $\|\alpha\|$. По условиям теоремы разложение (18) примет вид

$$\widetilde{\Phi}(z,w) = \sum_{k \geq l \geq 0} P_{k,l}(z,w),$$

поскольку $\frac{\partial^{\alpha+\gamma}\widetilde{\Phi}(0,0)}{\partial z^\alpha \partial w^\gamma} = 0$ при $\|\gamma\| \geq \|\alpha\|$.

Введем функции

$$\Phi_k(z,w) = \sum_{l=k}^{\infty} P_{k,l}(z,w). \tag{20}$$

Тогда

$$\widetilde{\Phi}(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(z,w). \tag{21}$$

Рассмотрим ряды (20) и (21), они сходятся абсолютно в $U_z \times U_w$ и равномерно на компактах из этой окрестности, поскольку двойной ряд (18) сходится абсолютно в $U_z \times U_w$ и равномерно на компактах из этой окрестности. Из вида ряда $\Phi_k(z,w)$ получим, что $\Phi_k(tz,w) = t^k \Phi_k(z,w)$ для любого $t \in \mathbb{C}$. Тогда из условия теоремы следует, что

$$\widetilde{\Phi}(0,w) = \Phi_0(0,w) = \sum_{l=0}^{\infty} P_{0,l}(0,w) = \mathrm{const}\,.$$

Рассмотрим разложение функции $\widetilde{\Phi}(t\tilde{c},w)$ в ряд по t:

$$\widetilde{\Phi}(t\tilde{c},w) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \widetilde{\Phi}_k(\tilde{c},w), \tag{22}$$

где $\widetilde{\Phi}_k(\tilde{c},w) = \frac{\partial^k \widetilde{\Phi}(\tilde{c}t,w)}{k!\,\partial t^k}\Big|_{t=0}$. Если применим разложение (21) к точке $(\tilde{c},w)$, то получим

$$\widetilde{\Phi}_k(\tilde{c},w) = \Phi_k(\tilde{c},w) \tag{23}$$

при достаточно малых $|w|$.

Найдем

$$\frac{d^m}{dt^m}\,\widetilde{\Phi}(\tilde{c}t,w) = m!\widetilde{\Phi}_m(\tilde{c},w) + \cdots + k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-m+1)t^{k-m}\widetilde{\Phi}_k(\tilde{c},w) + \ldots .$$

Вычислим эту же производную как производную сложной функции:

$$\frac{d^m}{dt^m}\,\widetilde{\Phi}(\tilde{c}t,w) = \sum_{\|\alpha\|=m} \frac{\partial^\alpha \widetilde{\Phi}(\tilde{c}t,w)}{\partial z^\alpha}\,\tilde{c}^\alpha.$$

Приравнивая производные, приходим к равенству

$$\sum_{\|\alpha\|=m} \frac{\partial^\alpha \widetilde{\Phi}(\tilde{c}t, w)}{\partial z^\alpha}\, \tilde{c}^\alpha = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-m+1) t^{k-m} \widetilde{\Phi}_k(\tilde{c}, w). \tag{24}$$

Подставляя в (24) значение $t = 0$, получим, что $\frac{d^m}{dt^m}\widetilde{\Phi}(0, w) = m!\widetilde{\Phi}_m(\tilde{c}, w)$ — многочлен степени не выше, чем m, по w, поскольку левая часть этого равенства многочлен степени не выше, чем m, по w из условия (19). При $m = 0$

$$\widetilde{\Phi}(0, w) = \Phi_0(\tilde{c}, w) = \mathrm{const},$$

тогда из (22) имеем

$$\widetilde{\Phi}(0, w) = \widetilde{\Phi}_0(\tilde{c}, w) = \Phi_0(0, w).$$

Из равенств (20) и (23) получим, что

$$\widetilde{\Phi}_k(\tilde{c}, w) = P_{k,k}(\tilde{c}, w)$$

при достаточно малых $|w|$, т. е. $\widetilde{\Phi}_k(\tilde{c}, w)$ — многочлен ровно k-й степени по w. Поэтому

$$\mathrm{const} = \widetilde{\Phi}(\tilde{c}, w) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k,k}(\tilde{c}, w).$$

Следовательно, $P_{k,k}(\tilde{c}, w) = 0$ при $k > 0$. Отсюда $\widetilde{\Phi}_k(\tilde{c}, w) = 0$ при $k > 0$, тем самым из (22) получаем, что $\widetilde{\Phi}(\tilde{c}t, w) = \mathrm{const}$, т. е. $\frac{\partial^\gamma \widetilde{\Phi}(\tilde{c}t, w)}{\partial w^\gamma} = 0$ при $\|\gamma\| > 0$. $\square$

Следствие 3. *В условиях теоремы 5 верно равенство* $\frac{\partial^\gamma F(z)}{\partial \bar{z}^\gamma}\Big|_{z=at+(1-t)c} = 0$ *при* $\|\gamma\| > 0$.

6. Доказательство основных утверждений

Теорема 6. *Пусть $n = 2$ и D — ограниченная строго выпуклая бикруговая область с дважды гладкой границей, функция $f(\zeta) \in \mathscr{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{a,c,d}$ и точки $a, c, d \in D$ не лежат на одной комплексной прямой в $\mathbb{C}^2$. Тогда $\frac{\partial^\gamma \Phi(z,w)}{\partial w^\gamma} = 0$ для любого $z \in D$ и $\|\gamma\| > 0$ и, следовательно, функция $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в область D.*

Доказательство. Пусть $\tilde{z}$ — произвольная точка прямой $l_{a,c}$. Тогда по теореме 5 имеем

$$\frac{\partial^\gamma \Phi(\tilde{z}, w)}{\partial w^\gamma} = 0 \tag{25}$$

при $\|\gamma\| > 0$. Соединив точку $\tilde{z}$ с точкой d прямой $l_{\tilde{z},d}$ и снова применив теорему 5 для точек $\tilde{\tilde{z}} \in l_{\tilde{z},d}$, получим, что $\frac{\partial^\gamma \Phi(\tilde{\tilde{z}}, w)}{\partial w^\gamma} = 0$ при $\|\gamma\| > 0$. Поэтому для всех точек $\tilde{z}$ из некоторого открытого множества выполняется условие (25).

Подставляя в равенство (25) $w = \bar{z}$ и используя (11), имеем $\frac{\partial^\gamma F(z)}{\partial \bar{z}^\gamma} = 0$ в некотором открытом множестве области D. Из вещественной аналитичности функции $F(z)$ следует, что $\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}_j} = 0$ для любого $z \in D$ и $j = 1, \ldots, n$. Поскольку по теореме 2 выполняется $F(\zeta)|_{\partial D} = f(\zeta)$, функция $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в область D. $\square$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество точек $a_k \in D \subset \mathbb{C}^n$, $k = 1, \ldots, n+1$, не лежащих на комплексной гиперплоскости в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 7. *Пусть D — ограниченная строго выпуклая n-круговая область с дважды гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ и $f(\zeta) \in \mathscr{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}$. Тогда $\frac{\partial^\gamma \Phi(z,w)}{\partial w^\gamma} = 0$ для любого $z \in D$ и $\|\gamma\| > 0$, а функция $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в область D.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. Основанием индукции является теорема 6 ($n = 2$). Предположим, что для всех размерностей $k < n$ теорема верна. Рассмотрим комплексную плоскость Γ, проходящую через точки $a_1, \dots, a_n$, ее размерность по условию теоремы равна $n-1$ и $a_{n+1} \notin \Gamma$. Пересечение $\Gamma \cap D$ является строго выпуклой областью в $\mathbb{C}^{n-1}$.

Функция $f|_{\Gamma\cap\partial D}$ непрерывна и обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}_1}$, где $\mathfrak{A}_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$. По предположению индукции $\frac{\partial^\gamma \Phi(z',w)}{\partial w^\gamma} = 0$ при $\|\gamma\| > 0$ для всех $z' \in \Gamma \cap D$.

Соединив точки $z' \in \Gamma$ с точкой a_{n+1}, получим по теореме 6, что $\frac{\partial^\gamma \Phi(z,w)}{\partial w^\gamma} = 0$ при $\|\gamma\| > 0$ для некоторого открытого множества в $D \times D$. Отсюда аналогично теореме 6 вытекает, что $F(z)$ голоморфна в области D, а значит, функция $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в область D. $\square$

Из теорем 6 и 7 очевидным образом следуют теоремы A и B.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграновский М. Л., Вальский Р. Е.* Максимальность инвариантных алгебр функций // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 1. С. 3–12.
2. *Stout E. L.* The boundary values of holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. 1977. V. 44, N 1. P. 105–108.
3. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
4. *Kytmanov A. M., Myslivets S. G.* Higher-dimensional boundary analogs of the Morera theorem in problems of analytic continuation of functions // J. Math. Sci. 2004. V. 120, N 6. P. 1842–1867.
5. *Kytmanov A. M., Myslivets S. G.* Multidimensional integral representations. Problems of analytic continuation. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer-Verl., 2015.
6. *Globevnik J., Stout E. L.* Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. 1991. V. 64, N 3. P. 571–615.
7. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения // Мат. заметки. 2008. Т. 83, № 4. С. 545–551.
8. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г., Кузоватов В. И.* Семейства комплексных прямых минимальной размерности, достаточные для голоморфного продолжения функций // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 326–339.
9. *Agranovsky M.* Propagation of boundary CR-foliations and Morera type theorems for manifolds with attached analytic discs // Adv. Math. 2007. V. 211, N 1. P. 284–326.
10. *Agranovsky M.* Analog of a theorem of Forelli for boundary values of holomorphic functions on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // J. Anal. Math. 2011. V. 113, N 1. P. 293–304.
11. *Baracco L.* Holomorphic extension from the sphere to the ball // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 388, N 2. P. 760–762.
12. *Globevnik J.* Small families of complex lines for testing holomorphic extendibility // Amer. J. Math. 2012. N 6. P. 1473–1490.
13. *Baracco L.* Separate holomorphic extension along lines and holomorphic extension from the sphere to the ball // Amer. J. Math. 2013. V. 135, N 2. P. 493–497.
14. *Globevnik J.* Meromorphic extensions from small families of circles and holomorphic extensions from spheres // Trans. Amer. Math. Soc. 2012. V. 364, N 11. P. 5857–5880.
15. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* Голоморфное продолжение функций вдоль конечных семейств комплексных прямых в шаре // Журн. СФУ. Математика и физика. 2012. Т. 5, № 4. С. 547–557.

16. *Kytmanov A. M., Myslivets S. G.* An analog of the Hartogs theorem in a ball of $\mathbb{C}^n$ // Math. Nahr. 2015. V. 288, N 2–3. P. 224–234.

17. *Айзенберг Л. А.* Интегральные представления функций, голоморфных в n-круговых областях («Распространение» ядер Сегё) // Мат. сб. 1964. Т. 65, № 1. С. 104–143.

18. *Хенкин Г. М.* Метод интегральных представлений в комплексном анализе // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 7. (Итоги науки техники).

19. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

20. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисления комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1977.

21. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функции одного переменного. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 18 сентября 2015 г.

Кытманов Александр Мечиславович, Мысливец Симона Глебовна,
Сибирский федеральный университет, Институт математики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
akytmanov@sfu-kras.ru, smyslivets@sfu-kras.ru