Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 512.816

О ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ КОМПАКТНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. В. Горбацевич

Аннотация. Изучается группа автоморфизмов компактных однородных пространств. Рассмотрены некоторые общие свойства таких групп, указан метод их вычисления и приведены примеры таких вычислений в нескольких специальных случаях.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.401

Ключевые слова: однородное пространство, автоморфизм, группа Ли, алгебра Ли, решетка.

Введение

Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство группы Ли G (здесь H — стационарная подгруппа). В статье изучается группа $\mathrm{Aut}_G(G/H)$ (или, более кратко, $\mathrm{Aut}(G/H)$, или $\mathrm{Aut}(M)$) автоморфизмов однородного пространства G/H. Исследованы некоторые общие свойства этой группы и дано ее описание в нескольких частных случаях. В связи с этим рассмотрены централизаторы и нормализаторы решеток в группах Ли. Отметим, что многие результаты этой статьи верны для более широкого класса однородных пространств, чем компактные. А именно, они верны и для класса произвольных плезиокомпактных однородных пространств, который включает, в частности, все компактные однородные пространства и все однородные пространства с конечной инвариантной мерой. Но на такого рода обобщениях мы в этой статье останавливаться не будем.

Группа $\mathrm{Aut}(G/H)$ может оказаться полезной при изучении различных вопросов геометрии, топологии, анализа на многообразиях и др. Например, она полезна при рассмотрении инвариантных геометрических структур на однородных пространствах, при изучении эквиорбитных действий групп Ли на многообразиях, а также в связи с понятием скрытой (или виртуальной) симметрии, которое имеет немало применений в современной теоретической физике (подробнее об этом будет сказано в § 1 ниже). Несмотря на естественность своего определения, группы автоморфизмов однородных пространств по непонятным для автора причинам не подвергались до сих пор достаточно подробному исследованию, существенно выходящему за рамки изучения их общих свойств. Данная статья имеет цель частично восполнить этот пробел в теории однородных пространств, уделяя особое внимание случаю компактных однородных пространств.

Опишем вкратце содержание статьи.

В § 1 рассмотрены некоторые общие свойства группы автоморфизмов однородных пространств и несколько обобщений понятия автоморфизма однородного пространства. Также рассмотрены некоторые свойства группы автоморфизмов для наиболее интересного для нас случая компактных однородных пространств. Так как приведенные здесь свойства группы автоморфизмов не очень сложны (хотя в большинстве своем отсутствуют в известной автору литературе), мы не будем оформлять их в виде отдельных теорем, а приведем в виде ряда замечаний.

В § 2 изучаются группы автоморфизмов компактных однородных пространств при экстремальных значениях размерности этих групп автоморфизмов, близких к нулю или к размерности самого однородного пространства.

В § 3 указан некоторый алгоритм вычисления групп автоморфизмов однородных пространств и продемонстрировано его применение.

В § 4 вкратце рассматриваются некоторые свойства централизаторов и нормализаторов решеток в группах Ли, которые оказываются полезными при изучении групп автоморфизмов компактных однородных пространств.

Группы Ли будем обозначать заглавными латинскими буквами, а их алгебры Ли — соответствующими строчными буквами. Нормализатор подгруппы U в группе W будем обозначать через $N_W(U)$, а централизатор — через $Z_W(U)$. Связную компоненту единицы группы Ли W будем обозначать через W_0, а группу связных компонент W/W_0 — через $\pi_0(W)$. Добавляя в некоторому термину «почти» (например, почти абелева, почти связная), обычно будем понимать это как «с точностью до перехода к подгруппе конечного индекса» (хотя иногда — это каждый раз оговаривается — «почти» будет использоваться в других смыслах).

Замкнутую подгруппу в группе Ли будем называть *равномерной*, если фактор-пространство по ней компактно. Дискретные равномерные подгруппы называют *решетками* (или *равномерными решетками*, так как иногда рассматривают и более общее понятие решетки, для которых фактор-пространство имеет конечную меру). Подгруппу Ли в связной группе Ли называют *t-подгруппой*, если она содержит некоторую максимальную связную треугольную подгруппы этой группы Ли.

§ 1. Общие свойства группы автоморфизмов однородного пространства

Пусть $M = G/H$ — некоторое однородное пространство группы Ли G, транзитивной на M (здесь H, замкнутая подгруппа Ли, — стационарная подгруппа точки $eH \in G/H$). *Автоморфизмом* однородного пространства $M = G/H$ называется диффеоморфизм $f : M \to M$, централизующий (в группе всех диффеоморфизмов многообразия M) действие группы Ли G (аналогично определяется изоморфизм двух однородных пространств, при этом предполагается, что на них транзитивна одна и та же группа Ли). Через $\mathrm{Aut}(G/H)$ (или, подробнее, $\mathrm{Aut}_G(M)$, сокращенно, $\mathrm{Aut}(M)$) обозначается группа всех автоморфизмов однородного пространства G/H. Ниже приведем некоторые известные сведения об этой группе, подробности можно найти в [1] (см. также [2]).

Для произвольного однородного пространства G/H (здесь G может быть произвольной группой) группа $\mathrm{Aut}(G/H)$ изоморфна $N_G(H)/H$, где $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G (см. [1]). Опишем действие a группы Ли $N_G(H)/H$ на однородном пространстве G/H. Пусть $fH \in N_G(H)/H$ —

некоторый элемент, здесь $f \in N_G(H)$. Для произвольной точки gH однородного пространства G/H положим $a_{fH}(gH) = gHfH$. Так как $Hf = fH$ (ибо элемент f нормализует подгруппу H), то $a_{fH}(gH) = gfH$. Легко проверить, что так задается некоторое действие a группы $N_G(H)/H$ на G/H, которое всегда свободно.

Для случая однородного пространства G/H группы Ли G группа $\mathrm{Aut}(G/H)$ является группой Ли, причем ее естественное действие на G/H, описанное выше в общем случае, будет гладким и, как и выше, свободным. Отметим, что орбиту некоторой точки $x \in M$ для этого естественного действия группы $\mathrm{Aut}(G/H)$ на G/H можно описать как множество всех тех точек $y \in G/H$, для которых стационарная подгруппа совпадает со стационарной подгруппой точки x. Если однородное пространство G/H компактно (т. е. стационарная подгруппа H равномерна в G), то фактор-пространство $N_G(H)/H$ тоже компактно. Получаем, что группы автоморфизмов компактных однородных пространств являются компактными группами Ли (возможно, несвязными). Этот факт будет неоднократно использоваться ниже. В дальнейшем в статье под однородным пространством всегда понимается однородное пространство $M = G/H$ связной группы Ли G, причем многообразие M будет предполагаться связным.

Приведем некоторые примеры.

1. Рассмотрим однородное пространство $M = SO(3)/SO(2)$. Оно диффеоморфно двумерной сфере S^2. Здесь группа $\mathrm{Aut}(G/H)$ изоморфна, очевидно, группе $\mathbf{Z}_2$, образующая которой — центральная симметрия сферы относительно начала координат.

2. Однородное пространство $M = SO(3)/S(O(2) \times O(1))$ диффеоморфно двумерной проективной плоскости $\mathbf{R}P^2$. Здесь, как нетрудно убедиться, группа автоморфизмов тривиальна.

Еще примеры групп автоморфизмов некоторых классических однородных пространств можно найти в [1].

3. Рассмотрим компактное однородное пространство Ивасавы

$$M = N(3, \mathbf{R})/N(3, \mathbf{Z}).$$

Это однородное пространство группы $N(3, \mathbf{R})$ унипотентных вещественных матриц порядка 3 со стационарной подгруппой $N(3, \mathbf{Z})$ целочисленных матриц в $N(3, \mathbf{R})$, которая является решеткой. Для нахождения группы автоморфизмов этого однородного пространства потребуется провести некоторые вычисления. Отметим, что центр Z нильпотентной группы Ли $N(3, \mathbf{R})$ одномерен.

Найдем нормализатор подгруппы $N(3, \mathbf{Z})$ в $N(3, \mathbf{R})$. Для удобства вычислений матрицу вида $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ будем обозначать через $[a, b, c]$. Тогда если $A = [a, b, c]$, то $A^{-1} = [-a, -b, ab - c]$. Поэтому для элемента $\gamma = [x, y, z] \in N(3, \mathbf{Z})$ $(x, y, z \in \mathbf{Z})$ имеем $A^{-1}\gamma A = [0, 0, d]$, где $d = z + xb - ay$. Ясно, что для того чтобы элемент A принадлежал нормализатору подгруппы $N(3, \mathbf{Z})$, необходимо и достаточно, чтобы при произвольных целых значениях x, y, z число $d = z + bx - ay$ было целым. Очевидно, что всегда целым d может быть тогда и только тогда, когда целыми будут числа a, b. Поэтому нормализатор $N_{N(3,\mathbf{R})}(N(3, \mathbf{Z}))$ состоит из матриц вида $[p, q, u]$, где $p, q \in \mathbf{Z}$, а $u \in \mathbf{R}$ — произвольное вещественное число. Получаем, что $N_{N(3,\mathbf{R})}(N(3, \mathbf{Z})) = N(3, \mathbf{Z}) \cdot Z$, где $Z = \{[0, 0, u], u \in \mathbf{R}\}$ — одномерный центр группы $N(3, \mathbf{R})$.

После этих вычислений очевидно, что группа автоморфизмов однородного пространства $N(3,\mathbf{R})/N(3,\mathbf{Z})$ изоморфна одномерной абелевой группе Ли $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, т. е. группе $SO(2)$. В частности, эта группа автоморфизмов связна.

Рассмотрим некоторые обобщения пространства Ивасавы. Для произвольного натурального $n \in \mathbf{N}$ через Γ_n обозначим решетку в $N(3,\mathbf{R})$, состоящую из элементов вида $[n\mathbf{Z}, n\mathbf{Z}, n\mathbf{Z}]$ (т. е. здесь все матричные элементы над диагональю целые и кратны числу n). При $n = 1$ получаем группу $\Gamma_1 = N(3,\mathbf{Z})$, уже рассмотренную выше. Очевидно, что подгруппа $N(3,\mathbf{Z})$ содержит и нормализует все подгруппы вида Γ_n. Прямым вычислением, подобным проведенному выше, получаем, что нормализатор подгруппы Γ_n в $N(3,\mathbf{R})$ равен $\Gamma_1 \cdot Z$. Поэтому легко убедиться, что для компактного однородного пространства $M_n = N(3,\mathbf{R})/\Gamma_n$ группа автоморфизмов будет изоморфна абелевой группе Ли $\mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n \oplus SO(2)$, группа связных компонент которой изоморфна $\mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n$.

Этот пример тоже может быть, в свою очередь, обобщен, причем в нескольких направлениях. Можно вместо группы $N(3,\mathbf{R})$ рассматривать группу $N(3,\mathbf{C})$ комплексных унипотентных матриц порядка 3, а в ней — различные дискретные подгруппы, матрицы которых составлены из целых гауссовых чисел (всех или только кратных некоторому фиксированному числу). С другой стороны, группа $N(3,\mathbf{R})$ может рассматриваться как простейшая среди групп Гейзенберга H_m, для которых тоже можно рассматривать соответствующие однородные пространства и вычислять их группы автоморфизмов. Мы не будем здесь более подробно останавливаться на всех этих возможных обобщениях пространства Ивасавы, оставляя вычисления их групп автоморфизмов заинтересованному читателю.

Для группы $N(3,\mathbf{R})$ можно рассматривать также подгруппы вида $\left\{\left[\frac{1}{n}\mathbf{Z}, \frac{1}{n}\mathbf{Z}, \frac{1}{n^2}\mathbf{Z}\right]\right\}$ (для некоторого фиксированного натурального n). Это тоже дискретные подгруппы в $N(3,\mathbf{R})$, причем они содержат $N(3,\mathbf{Z})$ (отметим, что она не является в них нормальной подгруппой). Однако на самом деле с точностью до изоморфизма пар (группа Ли, решетка в ней) эти примеры не дают нам ничего нового по сравнению с уже рассмотренными выше. Дело в том, что на самом деле с точностью до указанного изоморфизма существует только одна серия решеток в $N(3,\mathbf{R})$. Все они могут быть заданы тремя (и даже двумя) образующими x, y, z и описываются такими соотношениями: $[x,z] = [y,z] = e$, $[x,y] = z^n$, где n — некоторое натуральное число. При фиксированном n такая группа изоморфна введенной выше группе Γ_n. Изоморфизм решеток может в данном случае быть распространен (причем единственным образом) до изоморфизма объемлющих их нильпотентных групп Ли.

4. Изучим транзитивные действия некоторых групп Ли на двумерном торе T^2.

Рассмотрим группу Ли R вида $SO(2) \cdot \mathbf{R}^s$ — полупрямое произведение одномерной группы Ли $SO(2)$ и абелевой группы Ли $\mathbf{R}^s$. Такое полупрямое произведение задается некоторым линейным представлением $\phi : SO(2) \to GL(s,\mathbf{R})$, при этом $\mathbf{R}^s$ распадается в прямую сумму одномерных и двумерных инвариантных подпространств. В качестве подгруппы H возьмем некоторую замкнутую равномерную подгруппу в $\mathbf{R}^s$. Более точно, возьмем H такой, что она имеет размерность $s-1$ и ее связная компонента единицы не содержит инвариантных относительно представления ϕ подпространств (при достаточно общем представлении ϕ таких подгрупп H существует много). Тогда $H = \mathbf{Z} \times \mathbf{R}^{s-1}$. Положим $M = R/H$. Нетрудно убедиться, что полученное многообразие M

диффеоморфно тору T^2. При этом транзитивное действие группы Ли R будет эффективно (т. е. тривиально на M действует только единичный элемент группы R), что вытекает из отсутствия в H инвариантных подпространств. Тем самым получаем серию транзитивных на торе T^2 действий групп Ли, имеющих сколь угодно большие размерности. Можно доказать, что приведенной конструкцией на самом деле исчерпываются все возможные транзитивные действия разрешимых групп Ли на торе T^2.

Найдем группы автоморфизмов построенных однородных пространств R/H. Ясно, что для достаточно общих ϕ будет $N_R(H) = \mathbf{R}^s$ (мы не будем здесь входить в детали понятия «достаточное общее представление»). Поэтому получаем, что $N_R(H)/H = SO(2)$. Тем самым показано, что для построенных однородных пространств (диффеоморфных T^2) группы автоморфизмов изоморфны $SO(2)$.

5. Еще один пример доставляет компактное однородное пространство $M = SL(2,\mathbf{R})/D$, где D — равномерная решетка в группе Ли $SL(2,\mathbf{R})$. Отметим, что естественная дискретная подгруппа $SL(2,\mathbf{Z}) \subset SL(2,\mathbf{R})$ не является равномерной (но мера соответствующего однородного пространства конечна) и потому в качестве решетки D нужно использовать, например, другие арифметические подгруппы. В этом случае, как будет показано в теореме 7 ниже, группа автоморфизмов соответствующего однородного пространства $SL(2,\mathbf{R})/D$ всегда конечна.

На этом пока закончим рассмотрения примеров.

Иногда кроме изоморфизмов однородных пространств рассматривают одно близкое понятие, которое в [1] названо *подобием.* Подобие однородных пространств $M = G/H$ и $M' = G'/H'$ задается диффеоморфизмом $f : M \to M'$ многообразий и изоморфизмом $\phi : G \to G'$ групп Ли, относительно которого диффеоморфизм f эквивариантен. Множество всех автоподобий однородного пространства G/H обозначается через $\mathrm{Sim}(G/H)$, его явный вид и связь с группой $\mathrm{Aut}(G/H)$ указаны в [1]. В [1], в частности, отмечено, что грассмановы многообразия $Gr_{n,k}$ и $Gr_{n,n-k}$ (естественным образом рассматриваемые как однородные пространства группы Ли $SO(n)$) подобны, но не изоморфны.

Переходим к рассмотрению некоторых общих свойств группы Ли $\mathrm{Aut}(G/H)$. Начнем с совсем простых, но полезных в дальнейшем замечаний.

Для однородного пространства $M = G/H$ транзитивное действие группы Ли G обычно предполагается эффективным (т. е. ни один нетривиальный элемент группы G не действует на M тождественно) или локально эффективным. В последнем случае ядро неэффективности J транзитивного действия группы Ли G предполагается дискретным. Положим $G^* = G/J$, $H^* = H/(H \cap J)$. Группа Ли G^* локально изоморфна группе Ли G, а многообразия G/H и G^*/H^* естественным образом диффеоморфны, причем транзитивное действие группы Ли G^* на M^* будет эффективно. При этом, очевидно, группы автоморфизмов однородных пространств G/H и G^*/H^* естественным образом изоморфны. Это позволяет в дальнейшем в случае необходимости переходить при изучении групп автоморфизмов однородных пространств от локально эффективных действий к эффективным. С другой стороны, всегда можно считать, что группа Ли G односвязна, переходя в случае необходимости к ее универсальной накрывающей (транзитивной на том же многообразии). При этом, однако, получаем локально эффективное действие, даже если транзитивное действие исходной группы Ли было эффективным. Группа автоморфизмов однородного пространства при таком переходе, как следует из изложенного выше, не меняется.

Транзитивное действие группы Ли G на многообразии M назовем *строго асистатическим*, если группа автоморфизмов соответствующего однородного пространства тривиальна. Идея (а)систатичности восходит к Ли, сами термины «систатический» и «асистатический» ввел Энгель. Филологически систатичность означает нечто расположенное рядом. У Ли и Энгеля термин «асистатический» был использован как замена выражению "nicht stehendlassen" (не оставляющий неподвижным). Строгая асистатичность означает, что множество точек однородного пространства с одной и той же стационарной подгруппой состоит из одной точки, а для систатического действия таких точек несколько и они «расположены рядом» (особенно это наглядно, когда множество таких точек имеет положительную размерность). Позже асистатическим стали называть такое транзитивное действие, для которого группа автоморфизмов дискретна (нульмерна). Именно в таком смысле этот термин употреблялся Ли и Энгелем. Асистаточность в этом смысле эквивалентна тому, что $\dim(N_G(H)) = \dim(H)$. Мы в статье будем исходить из этого, более современного, определения асистатичности.

Рассмотрим один пример асистатичности. Пусть H — замкнутая подгруппа в группе Ли G такая, что соответствующая алгебра Ли h максимальна в алгебре Ли g группы Ли G. Тогда очевидно, что транзитивное действие группы Ли G на однородном пространстве G/H асистатично.

В связи с понятием асистатичности можно ввести понятие асистатического вложения групп или алгебр Ли. Например, вложение $H \hookrightarrow G$ группы Ли H в группу Ли G назовем *асистатическим*, если нормализатор образа этого вложения имеет ту же размерность, что и сам этот образ. Понятие асистатического вложения (без использования самого этого термина) играет значительную роль в различных вопросах, связанных с классификациями подгрупп Ли в полупростых группах Ли. Выскажем здесь одно предположение: для любой связной компактной группы Ли существует ее точное асистатическое представление, т. е. асистатическое вложение в группу Ли вида $SO(n)$ (или $SU(n)$ в комплексном случае) при некотором $n \in \mathbf{N}$. Справедливость такого предположения привела бы к тому, что любая связная компактная группа Ли может быть стационарной подгруппой некоторого асистатического компактного однородного пространства. Для несвязных же компактных групп Ли подобное утверждение, вообще говоря, неверно. Например, оно неверно для группы $\mathbf{Z}_2$. Дело в том, что любая подгруппа в $SU(n)$, изоморфная $\mathbf{Z}_2$, лежит, как нетрудно убедиться, в некотором максимальном торе (который, конечно, содержится в ее нормализаторе). Однако существуют и конечные группы, для которых асистатическое представление существует.

Рассмотрим некоторые варианты определения автоморфизма однородного пространства.

Начнем с понятия локального автоморфизма. Рассмотрим однородное пространство $M = G/H$ группы Ли G, которую будем считать односвязной (в силу изложенного выше это не повлияет на наше изучение группы автоморфизмов). Тогда многообразие G/H_0 (где H_0 — связная компонента единицы подгруппы Ли H) односвязно и дает нам универсальное накрытие для M. Группу $\mathrm{Aut}(G/H_0)$ автоморфизмов этого однородного пространства назовем *группой локальных автоморфизмов*. Под локальными автоморфизмами понимаем такие локальные диффеоморфизмы, которые локально эквивариантны и глобализуемы на уровне универсального накрытия. Группа локальных автоморфизмов будет обозначаться через $\mathrm{Aut}^l(G/H)$, она изоморфна $N_G(H_0)/H_0$.

Пусть $H' \subset H$ — некоторая подгруппа конечного индекса в стационарной подгруппе H однородного пространства G/H группы Ли G. *Скрытым* (или *виртуальным*) *автоморфизмом однородного пространства* G/H назовем автоморфизм некоторого конечнолистно накрывающего его однородного пространства $M' = G/H'$ (здесь можно считать, что H' — подгруппа конечного индекса в H). Более точно, *скрытым автоморфизмом* следует называть такой автоморфизм однородного пространства G/H', который не индуцируется автоморфизмом исходного однородного пространства. Отметим, что в физике, где в последние годы понятие скрытых симметрий широко используется, имеются и другие подходы к этому понятию. Вообще, под скрытой симметрией (в частности, автоморфизмом) понимают нечто, похожее на симметрию и получающееся некоторой специальной конструкцией. Аналогично определяется понятие виртуального изоморфизма двух однородных пространств.

Рассмотрим еще один из вариантов понятия скрытого автоморфизма. Пусть H — подгруппа в группе G (в дальнейшем G обычно будет группой Ли, а H — ее замкнутой подгруппой, иногда еще и дискретной). *Относительной группой соизмеримости* $\mathrm{Comm}_G(H)$ называется множество таких $x \in G$, что пересечение $H \cap x^{-1}Hx$ подгруппы H с подгруппой, сопряженной ей с помощью элемента x, имеет конечный индекс в H. Ясно, что $\mathrm{Comm}_G(H)$ — подгруппа в G, содержащая в качестве подгруппы (вообще говоря, не нормальной) группу H. Элементы из $\mathrm{Comm}_G(H)$ можно рассматривать как изоморфизмы конечнолистных накрытий над однородным пространством G/H, т. е. как своего рода скрытые симметрии этого однородного пространства. Для дискретных подгрупп H понятие подгруппы относительной соизмеримости широко используется при изучении этих подгрупп. Если подгруппа H конечна, то ясно, что $\mathrm{Comm}_G(H) = G$. То же утверждение верно, если группа G абелева.

Предположим далее, что H — топологическая группа (например, группа Ли). Имеем очевидные вложения $H_0 \subset N_G(H) \subset \mathrm{Comm}_G(H) \subset N_G(H_0)$. Отсюда следует, например, что подгруппа $\mathrm{Comm}_G(H)$ может быть плотна в G только если подгруппа H дискретна (предполагаем, что пара (G, H) локально эффективна, т. е. в H нет связных нормальных делителей группы G).

Однородное пространство $\mathrm{Comm}_G(H)/H$ содержит группу $\mathrm{Aut}(G/H)$, хотя само, вообще говоря, не имеет групповой структуры. Это однородное пространство можно рассматривать как множество «истинно» скрытых симметрий однородного пространства G/H.

Если H — арифметическая решетка в полупростой группе Ли G, то подгруппа $\mathrm{Comm}_G(H)$ плотна в G (см., например, [3]). То же верно, если группа Ли G нильпотентна (причем если группа G алгебраична, то она определена над $\mathbf{Q}$ и подгруппа $\mathrm{Comm}_G(H)$ содержит подгруппу рациональных точек в G). Например, для однородного пространства Ивасавы $G/H = N(3, \mathbf{R})/N(\mathbf{Z}, 3)$, рассмотренного выше, имеем $\mathrm{Comm}_{N(3,\mathbf{R})}(N(3, \mathbf{Z})) = N(3, \mathbf{Q}) \cdot Z(N(3, \mathbf{R}))$, где $Z(N(3, \mathbf{R}))$ — одномерный центр группы Ли $N(3, \mathbf{R})$.

В связи с понятием скрытого автоморфизма возникает естественный вопрос о том, как связаны между собой группы $\mathrm{Aut}(G/H)$ и $\mathrm{Aut}(G/H')$ или, другими словами, что происходит с группой автоморфизмов однородного пространства при переходе к конечнолистному накрытию. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Если H' — подгруппа конечного индекса в H (обе они являются замкнутыми подгруппами Ли в группе Ли G), то их связные компоненты единицы совпадают: $H_0' = H_0$. Поэтому H и H' — две подгруппы Ли в группе Ли $P = N_G(H_0)$. Положим $F = P/H_0$. Это группа Ли, причем, вообще говоря, несвязная. Группы $D = H/H_0$ и $D' = H'/H_0$ — две дискретные подгруппы в F, причем $D' \subset D$. Теперь нужно рассматривать уже не нормализаторы подгрупп H и H', а нормализаторы дискретных подгрупп D, D' в группе Ли F. Отметим, что связная компонента единицы такого нормализатора на самом деле централизует дискретную подгруппу. При этом имеем вложение централизаторов $Z_F(D) \subset Z_F(D')$. Эти общие рассмотрения будут ниже конкретизированы и уточнены при рассмотрении групп автоморфизмов компактных однородных пространств. Отметим еще, что если однородное пространство G/H компактно, то подгруппа D — решетка в группе Ли F.

Предположим, что подгруппа H' конечного индекса в H нормальна. Тогда однородное пространство G/H получается факторизацией однородного пространства G/H', его конечнолистно накрывающего, по действию конечной группы $\Phi = H/H'$. Предположим еще больше: подгруппа H' характеристична в H (т. е. она сохраняется при всех автоморфизмах группы Ли H, а не только при внутренних, как в случае нормальных подгрупп). Тогда для нормализаторов имеем, очевидно, включение $N_G(H) \subset N_G(H')$. В частности, отсюда следует, что $\dim \operatorname{Aut}(G/H) \leq \dim \operatorname{Aut}(G/H')$.

В связи с отмеченным выше возникает естественный вопрос о том, когда в стационарной подгруппе H однородного пространства G/H существует хоть одна характеристическая подгруппа конечного индекса. Следующее утверждение дает достаточное для этого условие.

Предложение 1. *Пусть $M = G/H$ — однородное пространство связной группы Ли G. Предположим, что группа $\pi_0(H) = H/H_0$ связных компонент подгруппы H конечно порождена. Тогда в любой подгруппе конечного индекса группы Ли H содержится некоторая характеристическая подгруппа конечного индекса.*

Доказательство. Рассмотрим дискретную группу $D = H/H_0$. Она конечно порождена по условию. Если H' — некоторая подгруппа конечного индекса в H, то $H_0' = H_0$ и группа $D' = H'/H_0$ является подгруппой конечного индекса в D. Как известно, в D существует нормальная подгруппа, содержащаяся в D' (можно взять пересечение всех подгрупп, сопряженных с D' элементами из D). Поэтому можно считать, что сама подгруппа D' нормальна в D. Положим $\Phi = D/D'$. Это конечная группа.

Используем одно полезное утверждение из теории групп. В [4] (см. там упражнение 1.52.3 и его решение) доказано, что любая подгруппа конечного индекса в конечно порожденной группе содержит некоторую характеристическую подгруппу D''(даже вербальную). Доказательство основано на рассмотрении системы тождеств конечной группы Φ и соответствующего этой системе тождеств многообразия групп.

Пусть $p : H \to D$ — естественный эпиморфизм с ядром H_0 (являющимся, кстати, характеристической подгруппой в H, ибо H_0 — единственная максимальная связная подгруппа Ли в H). Положим $H'' = p^{-1}(D'')$. Полученная подгруппа H'' конечного индекса в H является, как нетрудно понять, характеристической подгруппой в H, причем конечного индекса, содержащейся в подгруппе H'. Утверждение доказано.

Отметим, что условие конечной порожденности группы $\pi_0(H)$ автоматически выполнено, если однородное пространство G/H компактно, так как в этом случае группа $\pi_0(H)$ будет фактор-группой (по конечно определенной центральной подгруппе) фундаментальной группы $\pi_1(G/H)$, которая конечно определена в силу компактности многообразия G/H.

Рассмотрим множество всех характеристических подгрупп $H' \subset H$ конечного индекса в стационарной подгруппе H однородного пространства G/H и соответствующее множество всех групп автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G/H')$. Так как подгруппа H' характеристична в H, то $N_G(H) \subset N_G(H')$. Поэтому система групп Ли $\mathrm{Aut}(G/H')$ образует индуктивную систему групп Ли, причем очевидно, что размерности этих групп Ли не превосходят числа $\dim(G/H)$ и потому ограничены сверху. Множество связных компонент у групп $\mathrm{Aut}(G/H')$ может в некоторых случаях неограниченно возрастать.

Рассмотрим вопрос об изменении группы автоморфизмов однородного пространства при сужении и расширении транзитивной группы Ли.

Пусть $G_1 \subset G$ — замкнутая связная подгруппа Ли в группе Ли G такая, что ее естественное действие на однородном пространстве G/H транзитивно (что эквивалентно выполнению условия $G_1 \cdot H = G$). Тогда однородное пространство G/H будет диффеоморфно однородному пространству G_1/H_1 группы Ли G_1 (здесь $H_1 = H \cap G_1$ — стационарная подгруппа указанного выше транзитивного действия группы Ли G_1). Очевидно, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G_1/H_1)$ естественным образом вкладывается в $\mathrm{Aut}(G/H)$ в качестве подгруппы.

Рассмотрим по этому поводу один пример. Пусть трехмерная сфера S^3 рассматривается как (естественное) однородное пространство группы Ли $SO(4)$: $S^3 = SO(4)/SO(3)$. Группа автоморфизмов этого однородного пространства изоморфна, как легко понять, группе $\mathbf{Z}_2$, образующая которой — центральная симметрия сферы относительно начала координат. Однако в $SO(4)$ имеется подгруппа, изоморфная группе $SU(2)$ (также изоморфная спинорной группе $\mathrm{Spin}(3)$) и просто транзитивная на S^3 (т. е. стационарная подгруппа этого транзитивного действия группы $SU(2)$ тривиальна). Подробнее об этом хорошо известном факте см., например, [1]). Но тогда группа автоморфизмов сферы S^3 (диффеоморфной группе Ли $SU(2)$), рассматриваемой как однородное пространство, будет изоморфна самой этой группе Ли $SU(2)$. Видим, что при сужении транзитивной группы (т. е. при переходе от G к G_1) группа автоморфизмов может существенно измениться (увеличиться даже по размерности).

Далее отметим еще один факт, связанный с группой автоморфизмов однородных пространств и отмеченный, видимо, впервые в [1]. Речь идет об алгебре Ли q, соответствующей группе Ли Q автоморфизмов однородного пространства. Эта алгебра Ли изоморфна фактор-алгебре $n(H)/h$, где h — алгебра Ли (точнее, подалгебра Ли в g изоморфна алгебре Ли группы Ли G) подгруппы Ли H, а $n(H) = \{X \in g \mid ad_h(X) - X \in h \; \forall h \in H\}$. Алгебра Ли q естественно изоморфна алгебре Ли G-инвариантных векторных полей на однородном пространстве G/H.

При изучении групп автоморфизмов однородных пространств можно выделить несколько особо интересных (и поддающихся более-менее подробному изучению) частных случаев. Вот некоторые из них.

1. Однородные пространства K/L компактных групп Ли K. Здесь, конечно, группа автоморфизмов всегда некоторая компактная группа Ли.

Например, если для произвольной связной компактной группы Ли K взять $L = \{e\}$ (и тогда $M = K$), то группа автоморфизмов этого однородного пространства будет изоморфна исходной компактной группе Ли K. Это показывает, что в качестве группы автоморфизмов компактного однородного пространства может быть реализована произвольная компактная связная группа Ли.

В связи с этим возникает несколько естественных вопросов. Какие компактные, но не обязательно связные группы Ли могут быть реализованы как группы автоморфизмов компактных однородных связных пространств? В частности, могут ли быть реализованы произвольная конечная групп, произвольная простая конечная группа и т. п. Ответы в полном объеме на эти вопросы автору неизвестны.

2. Солвмногообразия — однородные пространства разрешимых групп Ли. Если солвмногообразие компактно, то группа его автоморфизмов — конечное расширение компактного тора (компактной абелевой связной группы Ли); об этом подробнее см. ниже.

Здесь тоже имеется естественный вопрос: какой может быть группа связных компонент группы автоморфизмов солвмногообразия? Отметим, что она всегда конечна и разрешима.

3. Однородные пространства с дискретной стационарной подгруппой, т. е. однородные пространства вида G/Γ, где Γ — дискретная подгруппа в связной группе Ли G. В частности, особый интерес представляют компактные нильмногообразия — однородные пространства вида N/Γ (где N — некоторая односвязная нильпотентная группа Ли). Как известно, такой вид имеют все компактные однородные пространства нильпотентных групп Ли. Отметим, что в этом случае группа автоморфизмов однородного пространства всегда имеет положительную размерность. Это следует из того, что центр нильпотентной группы Ли всегда связен и нетривиален и он содержится в $N_N(\Gamma)$. Рассмотрим этот случай подробнее (один частный случай, а именно многообразия Ивасавы, рассмотрен выше).

Пусть $M = N/\Gamma$, где N — односвязная нильпотентная группа Ли, а Γ — некоторая решетка в ней. Как известно, можно считать, что на N имеется естественная структура алгебраической унипотентной группы, причем определенной над $\mathbf{Q}$ (последнее утверждение вытекает из наличия в N решетки). Некоторые подробности по этому поводу можно найти в [3]. Рассмотрим централизатор $Z_N(\Gamma)$ решетки Γ в N. Как известно, он совпадает с центром $Z(N)$ группы Ли N (и с алгебраическим замыканием центра $Z(\Gamma)$ решетки Γ). Далее, в силу дискретности Γ связная компонента ее нормализатора ее централизует. Поэтому $(N_N(\Gamma))_0 = Z(N)$, тем самым связная компонента единицы группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(N/\Gamma)$ — это тор $Z(N)/Z(N) \cap \Gamma$ (отметим, что всегда $Z(N) \cap \Gamma$ — решетка в абелевой односвязной группе Ли $Z(N)$). Что касается группы связных компонент группы $\mathrm{Aut}(N/\Gamma)$, то это некоторая конечная нильпотентная группа. Положим $N^* = N/Z(N)$. Это некоторая нильпотентная односвязная группа Ли (класс нильпотентности которой на единицу меньше класса нильпотентности исходной группы Ли N). Положим также $N^*_N(\Gamma) = N_N(\Gamma)/Z(N)$. Это дискретная подгруппа в N^*, содержащая решетку $\Gamma^* = \Gamma/Z(N) \cap \Gamma$ в качестве нормального делителя конечного индекса. Отсюда следует, что $\pi_0(\mathrm{Aut}(N/\Gamma))$— конечная нильпотентная группа, класс нильпотентности которой на единицу меньше класса нильпотентности группы N (и решетки Γ). В частности, если группа Ли N метабелева (т. е. нильпотентная класса 2), то указанная группа связных компонент абелева.

В заключение этого параграфа укажем некоторые возможные применения результатов о группах автоморфизмов однородных пространств.

Пусть на однородном пространстве задана какая-либо G-инвариантная геометрическая структура (риманова, финслерова, симплектическая, распределение и т. п.). Рассмотрим действие на G/H группы автоморфизмов этого однородного пространства. Полученные в результате этого действия новые геометрические структуры отличны от исходных, но в понятном смысле им эквивалентны. Этот прием позволяет строить на однородном пространстве новые инвариантные структуры.

Назовем геометрическую структуру на однородном пространстве G/H *сверхинвариантной*, если она не только (лево)инвариантна относительно транзитивного действия группы Ли G, но и инвариантна относительно группы автоморфизмов этого однородного пространства. Представляет интерес изучение таких сверхинвариантных структур. Например, рассмотрим группу Ли G как однородное пространство, т. е. предположим, что стационарная подгруппа H в данном случае тривиальна. Можно рассматривать на G левоинвариантные римановы метрики. Но действие группы автоморфизмов (изоморфной группе Ли G) происходит справа. Поэтому сверхинвариантными метриками будут биинвариантные метрики (которые, отметим, не на всякой группе Ли существуют).

Есть еще одна ситуация, в которой фигурируют автоморфизмы однородного пространства. Рассмотрим компактную группу Ли K и ее эквиорбитное гладкое действие на некотором многообразии M. Напомним, что *эквиорбитным* называется такое действие, для которого все орбиты одного орбитного типа. Имеем в этом случае гладкое локально-тривиальное расслоение $K/L \to M \to K\backslash M$, где L — стационарная подгруппа некоторой точки на M, а $K\backslash M$ — пространство орбит этого действия (оно будет гладким многообразием). Структурной группой этого расслоения, слоем которого является однородное пространство K/L, будет в точности группа автоморфизмов этого однородного пространства (см., например, [2]).

§ 2. О компактных однородных пространствах с экстремальными группами автоморфизмов

Далее будем рассматривать только компактные однородные пространства G/H связных групп Ли, причем обычно будем предполагать, что группа Ли G односвязна, а ее транзитивное действие на многообразии M локально эффективно. Пусть $G = S \cdot R$ — разложение Леви группы Ли G (R — радикал, а S — полупростая часть группы Ли G). Транзитивное действие группы Ли G на однородном пространстве G/H называется *правильным*, если $S \cdot N_G(H_0) = G$. В отличие от произвольного транзитивного действия правильное обладает более простой структурой. При этом в [5] доказано, что, переходя при необходимости от M к подходящему $M' = G/H'$, его конечнолистно накрывающему, можно перейти от транзитивного действия группы Ли G к транзитивному действию некоторой другой, вообще говоря, группы Ли G' на M', которое является правильным. Такой переход называется *модификацией* исходного транзитивного действия. Если радикал R группы Ли G нильпотентен, то правильным будет уже исходное произвольное транзитивное действие группы Ли G (то же верно, если радикал треуголен). В дальнейшем некоторые утверждения будем доказывать только для правильных действий, а некоторые — для произвольных транзитивных действий.

Положим $Q = \mathrm{Aut}_G(G/H)$. Это группа автоморфизмов однородного пространства G/H, изоморфная группе Ли $N_G(H)/H$. Так как многообразие M компактно, подгруппа H равномерна и в содержащей ее замкнутой подгруппе Ли $N_G(H)$. Поэтому для компактного однородного пространства G/H его группа автоморфизмов $N_G(H)/H$ — компактная группа Ли. В частности, она редуктивна и имеет только конечное число связных компонент.

Действие группы Ли Q на M свободно (см. выше), поэтому $\dim(Q) \leq \dim(M)$. В этом параграфе изучим такие компактные однородные пространства $M = G/H$, для которых размерность группы Ли Q или размерность ее аналога (группы локальных автоморфизмов) принимает экстремальные (граничные) значения: либо самые малые (близкие к 1), либо самые большие из возможных (близкие к $\dim(M)$).

Напомним, что две произвольные группы называются *соизмеримыми*, если в них существуют изоморфные между собой подгруппы конечных индексов. Например, любая конечная группа соизмерима с тривиальной. Еще пример: конечнопорожденная абелева группа соизмерима с группой вида $\mathbf{Z}^n$ при некотором $n \geq 0$. Соизмеримость многообразий — это существование диффеоморфизма между многообразиями, их конечнолистно накрывающими. Фундаментальные группы многообразий соизмеримы тогда и только тогда, когда соизмеримы сами многообразия.

Начнем с рассмотрения группы локальных автоморфизмов $\mathrm{Aut}^l(G/H)$ компактных однородных пространств.

Теорема 1. *Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство, причем транзитивное действие группы Ли G правильное. Если $\dim(\mathrm{Aut}^l(G/H)) \leq 2$, то фундаментальная группа $\pi_1(M)$ многообразия M соизмерима с абелевой группой $\mathbf{Z}^k$ при некотором $k \geq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим группу Ли $P = (N_G(H_0))_0 \cdot H$. Это подгруппа Ли в G, порожденная связной компонентой единицы нормализатора $N_G(H_0)$ и подгруппой H. Эта подгруппа Ли в G равномерна в G. Такой выбор подгруппы Ли (вместо $N_G(H_0)$) сделан для удобства: для того, чтобы однородное пространство P/H было связным. Докажем, что она содержится в $N_G(H_0)$ в качестве подгруппы конечного индекса. Подгруппа P равномерна в $N_G(H_0)$, и группа H/H_0 дискретна, поэтому однородное пространство $N_G(H_0)/P$ дискретно и компактно, тем самым конечно. Отметим, что связная группа Ли P_0/H_0 содержит решетку $H \cap P_0/H_0$ и потому унимодулярна.

Из условия вытекает, что $\dim N_G(H_0)/H_0 \leq 2$, стало быть, размерность связной группы Ли P_0/H_0 не больше чем 2 и эта группа Ли унимодулярна. Следовательно, она абелева, ибо существует только одна с точностью до локального изоморфизма неабелева (разрешимая) группа Ли размерности ≤ 2, но она не унимодулярна.

Как доказано в [5] (при существенном использовании компактности однородного пространства G/H и правильности транзитивного действия группы Ли G), существует вложение группы $H/H_0 = \pi_1(M)$ (точнее, некоторой ее подгруппы конечного индекса, что нам неважно, так как мы рассматриваем фундаментальную группу с точностью до соизмеримости) в виде дискретной подгруппы (даже решетки) в группу Ли вида $\mathbf{Z}^r \times P_0/H_0$ (при некотором $r \geq 0$), причем в нашем случае $\dim P_0/H_0 \leq 2$ и потому из изложенного выше вытекает, что группа $\mathbf{Z}^r \times P_0/H_0$ абелева. Получаем вложение группы $\pi_1(M)$, рассматриваемой с точностью до соизмеримости, в абелеву группу Ли. Так как абелева группа $\pi_1(M)$ конечно порождена (в силу компактности многообразия M), она соизмерима с группой $\mathbf{Z}^r$ при некотором $r \geq 0$.

Компактные однородные пространства, для которых фундаментальная группа почти абелева (а именно к таким приходим в теореме 1), были подробно описаны автором (см., например, [6]). Топологическое строение их довольно просто: это (с точностью до конечнолистного накрытия) расслоения над некоторым тором со слоем — однородным пространством некоторой компактной полупростой группы Ли и с абелевой структурной группой.

Естественно возникает вопрос: какие именно из однородных пространств с (почти) абелевой фундаментальной группой действительно имеют группу локальных автоморфизмов размерности ≤ 1? Для случая элементарных однородных пространств (с разрешимой фундаментальной группой) этот вопрос будет рассмотрен ниже.

В связи с теоремой 1 напомним неравенство

$$\dim(\mathrm{Aut}(G/H)) \leq \dim(\mathrm{Aut}^l(G/H)).$$

Поэтому при малых значениях $\dim(\mathrm{Aut}^l(G/H))$ и группа $\mathrm{Aut}(G/H)$ будет мала. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть $G = E(n) = SO(n) \cdot \mathbf{R}^n$ — группа движений n-мерного евклидова пространства. В $\mathbf{R}^n$ рассмотрим некоторую равномерную замкнутую подгруппу H. Она будет изоморфна $\mathbf{Z}^k \times \mathbf{R}^l$ (при некоторых $k, l \geq 0, k + l = n$). Для компактного однородного пространства G/H имеем $N_g(h) = \mathbf{R}^n$ и $N_g(h)/h = \mathbf{R}^k$. В частности, группа $(\mathrm{Aut}^l(G/H))_0$ изоморфна $\mathbf{R}^k$. Группа $(\mathrm{Aut}(G/H))_0$ будет изоморфна k-мерному тору.

При $k = 1, 2$ попадаем в условия теоремы 1 и здесь $\pi_1(G/H) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}^k$.

Однородное пространство G/H компактно и диффеоморфно $SO(n) \times T^k$, а его фундаментальная группа соизмерима с $\mathbf{Z}^k$.

2. Пусть $G = (\times_i SL(2, \mathbf{R})) \times SO(2)$ — прямое произведение m экземпляров группы Ли $SL(2, \mathbf{R})$ и одномерного тора $SO(2)$, а подгруппа $H = T$ — максимальная треугольная подгруппа в полупростой группе Ли $(\times_i SL(2, \mathbf{R}))$.

Здесь многообразие G/H диффеоморфно тору T^{m+1}, а группа локальных автоморфизмов легко вычисляется — она одномерна и изоморфна $SO(2)$. Такой же будет и группа $\mathrm{Aut}(G/H)$.

Теперь изучим групповое строение однородных пространств, для которых $\dim \mathrm{Aut}^l(G/H) \leq 1$.

Теорема 2. *Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство. Если $\dim(\mathrm{Aut}^l(G/H)) \leq 1$, то радикал R группы Ли G имеет разрешимую длину ≤ 2 (иногда такие разрешимые группы в русскоязычной литературе называют метабелевыми), а максимальная треугольная подгруппа T_R этого радикала абелева.*

Доказательство. Пусть T — максимальная связная треугольная подгруппа Ли в G. Тогда $T_R = T \cap R$ — максимальная треугольная подгруппа Ли в радикале R группы Ли G, причем подгруппа T_R нормальна в G. Рассмотрим соответствующие группам Ли G, H, T алгебры Ли g, h, t. Подалгебра Ли t содержит нильрадикал алгебры Ли g, а потому фактор-алгебра Ли r/t_r абелева. Из условия теоремы 2 и того, что $N_G(H_0)$ является t-подгруппой (см. [7], можно считать, что $N_g(h) \supset t$), следует, что $\mathrm{codim}_t(t \cap h) \leq 1$. Рассмотрим оба возможных случая: когда эта коразмерность равна 0 и 1.

Если $\operatorname{codim}_t(t \cap h) = 0$, то $h \supset t \supset t_r$ и в силу локальной эффективности действия группы Ли G на G/H должно быть $t_r = \{0\}$. Но тогда и радикал группы Ли G должен быть тривиален, а потому группа Ли G полупроста, что вполне укладывается в рамки утверждения доказываемой теоремы.

Пусть $\operatorname{codim}_t(t \cap h) = 1$. Здесь подалгебра Ли $t \cap h$ будет в t идеалом (ибо $N_g(h) \supset t$) коразмерности 1. Поэтому $h \supset [t_r, t_r]$. В силу локальной эффективности действия G на G/H должно быть $[t_r, t_r] = \{0\}$, т. е. подалгебра Ли t_r абелева. Отсюда получаем, что радикал r имеет разрешимую длину ≤ 2, ибо алгебра Ли r/t_r абелева.

До сих пор рассматривали в этом параграфе в основном локальные автоморфизмы. Переходим к рассмотрению группы $\operatorname{Aut}(G/H)$ «обычных» автоморфизмов компактных однородных пространств $M = G/H$. Вначале рассмотрим случай, когда размерность этой группы равна 0 или, что эквивалентно, она является конечной (ибо она дискретна и компактна) группой. Так будет, например, если группа $\operatorname{Aut}^l(G/H)$ нульмерна (см. выше). Но тогда группа Ли G полупроста (см. рассуждение при доказательстве теоремы 1, а также обзор [7]) и максимальная компактная подгруппа группы Ли G (которую можно считать односвязной, см. § 1) транзитивна на многообразии M. Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае фундаментальная группа $\pi_1(M)$ конечна (или, что то же, соизмерима с единичной группой).

Исходя из компактности группы Ли $\operatorname{Aut}(G/H)$, перечислим с точностью до локального изоморфизма (точнее, с точностью до конечного накрытия) все возможные связные компоненты этих групп при небольших значениях размерности группы автоморфизмов $\operatorname{Aut}(G/H)$.

Обозначим $\dim \operatorname{Aut}(G/H)$ через d.

Если $d = 1$, то группа $(\operatorname{Aut}(G/H))_0$ изоморфна одномерному тору T^1 (т. е. группе Ли $SO(2)$).

Если $d = 2$, то группа $(\operatorname{Aut}(G/H))_0$ изоморфна двумерному тору T^2.

Если $d = 3$, то группа $(\operatorname{Aut}(G/H))_0$ изоморфна трехмерному тору T^3 или локально изоморфна группе Ли $SU(2)$.

Если $d = 4$, то группа $(\operatorname{Aut}(G/H))_0$ изоморфна четырехмерному тору T^4 или локально изоморфна группе Ли $SU(2) \times T^1$.

Если $d = 5$, то группа $(\operatorname{Aut}(G/H))_0$ изоморфна пятимерному тору T^5 или локально изоморфна группе Ли $SU(2) \times T^2$.

Если $d = 6$, то группа $(\operatorname{Aut}(G/H))_0$ изоморфна шестимерному тору T^6 или локально изоморфна группе Ли $SU(2) \times T^3$, или группе Ли $SU(2) \times SU(2)$.

В случаях локальных изоморфизмов групп в приведенном списке можно дать более точное описание групп Ли Q_0 — с точностью до изоморфизма. Но получающийся результат довольно громоздок и потому здесь не приводится.

Отметим, что малая размерность группы автоморфизмов Q — скорее, не исключительная, а более-менее общая ситуация, поэтому однородных пространств с такими Q существует много. Но случаи, когда $\dim(Q)$ близка к $\dim(M)$, являются своего рода экзотикой, такое встречается редко. Поэтому именно здесь можно рассчитывать на обозримую классификацию.

Переходим к рассмотрению случаев, когда $\dim(Q)$ мало отличается от $\dim M$ (напомним, что $\dim(Q) \leq \dim(M)$).

Теорема 3. *Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство. Тогда*

1. *Если* $\dim(\mathrm{Aut}(G/H)) \geq \dim M - 1$, *то фундаментальная группа* $\pi_1(G/H)$ *соизмерима с* $\mathbf{Z}^k$ *при некотором* $k \geq 0$.

2. *Если* $\dim(\mathrm{Aut}(G/H)) = \dim M - 2$, *то группа* $\pi_1(M)$ *соизмерима с полициклической группой без кручения, имеющей абелев коммутант коранга* ≤ 2.

Доказательство. Если размерность группы $Q = \mathrm{Aut}(G/H)$ равна $\dim M$, то, так как группа Q действует на M свободно, многообразие M диффеоморфно компактной группе Ли Q. Но фундаментальная группа компактной группы Ли, как известно, всегда абелева, конечно порождена и потому соизмерима с некоторой группой вида $\mathbf{Z}^k$.

Если размерность группы $Q = \mathrm{Aut}(G/H)$ равна $\dim M - 1$, то фактор-пространство $Q\backslash M = G/N_G(H)$ свободного действия компактной группы Ли Q на многообразии M — одномерное компактное многообразие и потому диффеоморфно окружности S^1. Имеем расслоение (гладкое, локально тривиальное) $Q \to M \to S^1$. Это расслоение является Q-главным (так как действие Q на G/H свободное). Главное расслоение над окружностью задается, как известно, некоторым элементом структурной группы. Пусть это $q \in Q$. Так как группа Ли Q компактна, некоторая степень q^m элемента q лежит в связной компоненте единицы группы Ли Q. Переход от q к q^m эквивалентен переходу к Q-расслоению над m-листным накрытием исходной окружности S^1. Но внутри Q_0 элемент q^m можно деформировать в единичный и потому соответствующее Q-расслоение тривиально. Это означает, что некоторое многообразие M' (тоже, между прочим, однородное), конечнолистно накрывающее однородное пространство G/H, диффеоморфно прямому произведению слоя и базы. Так как фундаментальная группа $\pi_1(Q)$ абелева, фундаментальная группа многообразия M' абелева. Поэтому $\pi_1(G/H)$ почти абелева. Поскольку она конечно порождена, в ней есть подгруппа конечного индекса, не имеющая кручения и потому изоморфная $\mathbf{Z}^k$ при некотором $k \geq 0$.

Пусть размерность группы $Q = \mathrm{Aut}(G/H)$ равна $\dim M - 2$. Тогда пространство $G/N_G(H)$ — компактная однородная двумерная поверхность. Это может быть с точностью до диффеоморфизма, как следует из классификации всех двумерных однородных многообразий (см., например, [7]), только T^2, K^2, S^2, $\mathbf{R}P^2$ (здесь K^2 — бутылка Клейна, которая двулистно накрывается тором T^2). Для случаев $S^2, \mathbf{R}P^2$ из точной гомотопической последовательности расслоения $Q \to M \to G/N_G(H)$ легко вытекает, что группа $\pi_1(M)$ почти абелева.

Пусть база рассматриваемого расслоения диффеоморфна T^2 (случай K^2 к нему легко сводится). Рассмотрим соответствующее главное Q-расслоение $Q \to G/H \to T^2$. Так как группа $\pi_1(Q)$ абелева и конечно порождена, а $\pi_1(T^2) = \mathbf{Z}^2$, из точной гомотопической последовательности этого расслоения получаем, что группа $\pi_1(G/H)$ полициклична, причем ее коммутант абелев (и его коранг ≤ 2). Но в полициклической группе всегда существует подгруппа конечного индекса, свободная от кручения. Поэтому утверждение п. 2 теоремы доказано.

Покажем, что в п. 2 теоремы 3 группа $\pi_1(G/H)$ не всегда будет соизмерима с абелевой группой. Для этого вспомним про многообразие Ивасавы $M = N(3, \mathbf{R})/N(3, \mathbf{Z})$, рассмотренное выше в § 1. Фундаментальная группа этого многообразия изоморфна $N(3, \mathbf{Z})$, а в этой группе нет абелевых подгрупп конечного индекса. С другой стороны, как показано выше, размерность группы автоморфизмов трехмерного однородного пространства Ивасавы равна $1 = 3-2$, т. е. попадаем в условия п. 2.

Отметим, что можно было бы доказать сходное с теоремой 3 по форме утверждение в случае, когда $\dim \mathrm{Aut}(G/H)$ равна $\dim M - 3$. Но в этом случае группа $\pi_1(G/H)$ уже не обязательно соизмерима с разрешимой.

Рассмотрим те же случаи, что в теореме 3, но только когда транзитивная группа Ли компактна и односвязна (а потому полупроста). Здесь утверждения теоремы 3 могут быть усилены. Напомним, что группы автоморфизмов сферы S^2 и проективной плоскости $\mathbf{R}P^2$ конечны.

Теорема 4. *Пусть $M = K/L$ — однородное пространство компактной полупростой группы Ли K. Если $\dim(\mathrm{Aut}(K/L)) \geq \dim M - 2$, то многообразие M диффеоморфно группе Ли K или же соизмеримо с многообразиями вида $S^2 \times K_1$ или $\mathbf{R}P^2 \times K_1$, где K_1 — некоторая компактная полупростая группа Ли.*

Доказательство. Положим $c = \dim M - \dim(\mathrm{Aut}(K/L))$. По условию c равно $0, 1$ или 2. Рассмотрим последовательно эти три случая. Отметим, что $c = \dim(G/N_K(L))$. Будем предполагать, что группа Ли K односвязна.

Если $c = 0$, то подгруппа L нормальна в K и потому (в предположении, что действие группы Ли K эффективно) получаем, что $L = \{e\}$ и многообразие M диффеоморфно группе Ли K.

При $c = 1$ должно быть $G/N_K(L) = S^1$, но это невозможно (в компактной полупростой группе Ли нет подгрупп Ли коразмерности 1). Поэтому такой случай невозможен.

Остается рассмотреть случай $c = 2$. Здесь $K/N_K(L)$ равно S^2 или $\mathbf{R}P^2$ (но этот второй случай рассматривается аналогично первому). Из классификации групп Ли, транзитивных на сферах (см., например, [7]) вытекает, что группа Ли K будет изоморфна группе Ли вида $SU(2) \times K_1$, где полупростая компактная группа Ли K_1 действует на $G/N_K(L)$ тривиально. При этом будет $N_K(L) = SO(2) \times K_1$. Подгруппа Ли L (которая должна быть связной в силу односвязности группы Ли K и сферы S^2) нормальна в $N_K(L)$ и потому либо $L = SO(2) \times L_1$, где L_1 нормальна в K_1, либо подгруппа $L = K_1$ нормальна в K. Рассмотрим по отдельности оба эти случая.

Если $L = SO(2) \times L_1$, то, так как подгруппа L_1 нормальна в K, она тривиальна в силу локальной эффективности действия группы Ли K на M. Это означает, что $K = SU(2)$ и однородное пространство K/L (локально) диффеоморфно $S^2 \times K_1$ (или $\mathbf{R}P^2 \times K_1$).

Если $L = K_1$ нормальна в K, то опять в силу локальной эффективности получаем, что $L = K_1 = \{e\}$ и потому $K/L = SU(2)/SO(2) = S^2$.

Ясно, что все возможности для K/L, о которых идет речь в теореме 4, могут быть реализованы. Если однородное пространство K/L в теореме 4 односвязно, то оно диффеоморфно односвязной группе Ли или многообразию вида $S^2 \times K_1$.

Заметим, что аналогичным образом можно было бы рассмотреть случаи, когда c равно 3 или 4, но результат получается намного более громоздким.

Замечание. Если стационарная подгруппа $L \subset K$ связна и абелева (например, подгруппа L всегда будет абелевой, если $\dim L \leq 2$), то $N_K(L)$ — подгруппа максимального ранга, содержащая некоторый максимальный тор (один из тех, которые содержат L). Подгруппы максимального ранга допускают подробное перечисление, что позволяет в данном случае явно вычислить группы автоморфизмов однородного пространства K/L. Ответ ввиду его громоздкости здесь не приводится.

§ 3. Методы вычисления групп автоморфизмов

Здесь подробно рассмотрим некоторый общий подход (немного даже похожий на алгоритм) к вычислению группы автоморфизмов компактных однородных пространств G/H через вычисление нормализатора $N_G(H_0)$, вкратце описанного выше. В качестве иллюстрации этого подхода будет подробно разобрано вычисление групп автоморфизмов одного весьма общего класса компактных однородных пространств с разрешимой фундаментальной группой.

Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство группы Ли G (которую всегда можно считать односвязной и действующей на многообразии M локально эффективно). Рассмотрим последовательность вложенных замкнутых подгрупп Ли $G \supset N_G(H_0) \supset N_G(H) \supset H \supset H_0$. По условию подгруппа H равномерна в G, а потому равномерными в G будут и содержащие ее подгруппы $N_G(H_0), N_G(H)$. Также отметим, что однородное пространство $N_G(H_0)/N_G(H)$ компактно.

Положим $F = N_G(H_0)/H_0$, тогда группа Ли F (которая, вообще говоря, несвязна и даже может иметь бесконечно много связных компонент) содержит в качестве решетки дискретную подгруппу $D = H/H_0$. Так как подгруппа D равномерна в F, подгруппа Ли $F_0 \cdot D$ имеет в F конечный индекс и тем самым многообразие F/D имеет только конечное число связных компонент (ибо оно компактно).

Для вычисления группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G/H)$ нужно найти нормализатор $H_G(H)$ подгруппы H, а потом профакторизовать его по H. Можно заменить $N_G(H)$ нормализатором $N_{N_{H_0}}(H)$ подгруппы H внутри подгруппы Ли $N_G(H_0)$ (эти нормализаторы совпадают). Такая замена имеет смысл, так как нормализатор $N_G(H_0)$ обладает полезными дополнительными свойствами, в частности, он меньше, чем G, и является t-подгруппой в G. Но имеется одна сложность: нормализатор $N_{N_{H_0}}(H)$ является, вообще говоря, несвязной (и иногда существенно несвязной) группой Ли в отличие от связной группы Ли G. Однако, как показано в [5], в $\pi_0(N_G(H_0))$ всегда имеется абелева подгруппа конечного индекса. Тем самым и в группе Ли F группа связных компонент всегда почти абелева (здесь важно, что однородное пространство G/H компактно или хотя бы плезиокомпактно).

Итак, $N_G(H)/H = N_{N_G(H_0)}(H)/H$. Профакторизуем правую часть этого равенства по H_0, т. е. как бы сократим «дроби» на подгруппу H_0, которая является характеристической подгруппой в H. Прямая проверка показывает, что такое сокращение допустимо. Получим диффеоморфизмы

$$N_G(H)/H = N_{N_G(H_0)/H_0}(H/H_0)/(H/H_0) = N_F(D)/D.$$

В результате приходим к тому, что вычисление группы $\mathrm{Aut}(G/H)$ во многом сводится к вычислению нормализатора решетки в некоторой группе Ли. К сожалению, группа Ли F, в которой находим нормализатор решетки, вообще говоря, несвязна. Однако если интересуемся только связными группами автоморфизмов (напомним, что $\mathrm{Aut}(G/H)$ — компактная группа Ли и потому ее связная компонента единицы имеет во всей этой группе конечный индекс), то можно провести некоторые дальнейшие упрощения.

Отметим, что связная компонента единицы нормализатора дискретной подгруппы всегда принадлежит централизатору этой подгруппы (в силу ее дискретности). Поэтому $(N_F(D))_0 = ((Z_F(D))_0$. Получаем изоморфизм

$$(\mathrm{Aut}(G/H))_0 = (Z_F(D)/D)_0.$$

Тем самым приходим к необходимости изучать централизаторы решеток в группах Ли (причем в произвольных, а не только связных). Некоторым сведениям о вычислении централизаторов решеток в группах Ли посвящен следующий параграф. Отметим, что если группа Ли $N_G(H_0)$ связна (или почти связна), то вычисление соответствующей группы автоморфизмов практически полностью (т. е. с точностью до подгрупп конечного индекса) сводится к вычислению централизатора решетки в связной группе Ли F. Однако в общем случае такое сведение возможно, если рассматриваем компактное однородное пространство с точностью до конечнолистного накрытия (или, что эквивалентно, с точностью до перехода в стационарной подгруппе к подгруппам конечного индекса), а транзитивное действие группы Ли G правильное. Дело в том, что в этой ситуации в [5] доказано следующее: в группе $N_G(H_0)$ существует подгруппа H' конечного индекса, изоморфная прямому произведению $A \times ((N_G(H_0)))_0$, где A — некоторая конечно порожденная абелева группа без кручения (такая группа изоморфна группе $\mathbf{Z}^m$ при некотором $m \geq 0$). Переходя от исходного компактного однородного пространства G/H к подходящему конечнолистному накрытию (соответствующему подгруппе $\pi_0(H')$ конечного индекса в группе $\pi_0(H) = \pi_1(G/H)$), можно вычислять централизатор только внутри связной группы Ли F_0, так как на связную компоненту единицы остальная часть централизатора (связанная с A) не влияет. Этим доказана

Теорема 5. *Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство односвязной группы Ли G. Тогда*

1. *Связная компонента единицы компактной группы Ли $\mathrm{Aut}(G/H)$ автоморфизмов этого однородного пространства изоморфна группе Ли $(Z_F(D)/D)_0$, где $D = H/H_0$ — решетка в группе Ли $F = N_G(H_0)/H_0$.*

2. *Если транзитивное действие группы Ли G на M правильное, то для подходящего конечнолистно накрывающего G/H компактного однородного пространства G/H' группа $(\mathrm{Aut}(G/H))_0$ изоморфна компактной группе Ли $(N_{F_0}(F_0 \cap D))/(F_0 \cap D)$.*

В силу этой теоремы получаем своего рода следующий алгоритм вычисления если не всей группы автоморфизмов компактного однородного пространства G/H, то ее связной подгруппы конечного индекса.

1. Вычисление нормализатора $N_G(H_0)$ связной компоненты единицы стационарной подгруппы. При этом часто оказывается достаточным вычислить только связную компоненту единицы такого нормализатора, а это можно сделать на уровне алгебр Ли (вычисляя нормализатор соответствующей стационарной подалгебры Ли).

2. Вычисление централизатора некоторой решетки в некоторой, вообще говоря, несвязной, группе Ли (эти решетка и группа Ли вычисляются по исходному компактному однородному пространству явно). Если транзитивное действие группы Ли G правильное, то можно ограничиться вычислением централизатора решетки в некоторой связной группе Ли.

Перейдем к рассмотрению примеров применения полученных описаний группы $\mathrm{Aut}(G/H)$. Вначале сделаем несколько коротких замечаний.

Рассмотрим один очень простой частный случай, когда однородное пространство G/H компактно, группа Ли F_0 (введенная выше) полупроста и не имеет компактных компонент (или, что то же, компактных факторов). Тогда, как известно, группа $Z_{F_0}(D)$ конечна и потому группа $\mathrm{Aut}(G/H)$ конечна (подробнее см. теорему 6 ниже). Например, если фундаментальная группа

$\pi_1(G/H)$ полупроста (т. е. не имеет бесконечных разрешимых нормальных делителей, о таких G/H см. [7]) и группа Ли $F = N_G(H_0)/H_0$ не имеет компактных факторов, то получаем, что группа автоморфизмов такого однородного пространства конечна.

Предположим, что для компактного однородного пространства G/H группа $N_G(H_0)$ близка к G. Пусть вначале $N_G(H_0) = G$. В силу локальной эффективности транзитивного действия группы Ли G получаем, что тогда подгруппа H должна быть решеткой в G. При этом $N_G(H)/H$ — компактная группа Ли. Отсюда следует, что $(N_G(H_0))_0$ — связная редуктивная группа Ли с компактной полупростой частью. В случаях, когда $\operatorname{codim}_G(N_G(H_0)) = 1, 2$, см. § 2.

Для однородного пространства вида G/D (где D — решетка в группе Ли G) при $\operatorname{codim} N_G(D) \leq 2$ получаем, что и $\operatorname{codim} Z_G(D) \leq 2$, откуда можно без труда вывести (продолжая результат § 2), что группа Ли G должна быть разрешима и группа $D \cap N_G(H_0)$ абелева.

Рассмотрим еще один частный случай: вычисление группы автоморфизмов солвмногообразий (компактных однородных пространств разрешимых групп Ли).

Пусть $M = R/H$ — компактное однородное пространство разрешимой группы Ли. Тогда группа Ли $N_R(H)$ тоже разрешима и потому группа автоморфизмов $N_R(H)/H$ будет компактной разрешимой группой Ли. Но связная компактная разрешимая группа, как известно, абелева. Следовательно, группа Ли $(\operatorname{Aut}(R/H))_0$ в данном случае — это тор (компактная связная абелева группа Ли), а группа всех автоморфизмов однородного пространства R/H — ее конечное расширение. Конкретный вид этого тора указан в теореме 5.

Рассмотрим подробно весьма широкий класс компактных однородных пространств — компактные однородные пространства $M = G/H$ с разрешимой фундаментальной группой. К этому классу относятся, конечно, все солвмногообразия, а также все односвязные компактные однородные пространства, прямые произведения однородных пространств этих двух видов, а также многие другие (не раскладывающиеся в прямые произведения солвмногообразий и односвязных однородных пространств). Подробное изучение этого класса однородных пространств проведено автором в ряде статей [6]. Нам потребуются некоторые конструкции и результаты из этих работ.

Прежде всего отметим, что в силу [6] любое компактное однородное пространство с разрешимой фундаментальной группой конечнолистно накрывается (как многообразие, без учета транзитивных действий) компактным однородным пространством весьма специального вида (в [6] такого рода однородные пространства были названы *элементарными*). При таком переходе группа автоморфизмов может меняться довольно причудливым образом (при переходе к конечнолистному накрытию). Поэтому будем рассматривать только группы автоморфизмов элементарных однородных пространств (с разрешимой фундаментальной группой). Но вначале нужно дать описание таких элементарных пространств. Оно довольно длинное, но по сравнению с описанием произвольных однородных пространств может рассматриваться как весьма простое.

Пусть K — произвольная компактная односвязная (а потому полупростая) группа Ли, а R — некоторая односвязная разрешимая группа Ли, содержащая некоторую решетку Γ (наличие решетки накладывает на R довольно сильные ограничения, см., например, [3]). Сразу отметим, что транзитивная группа Ли G будет прямым произведением $G = K \times R$ (т. е. полупростая часть группы Ли

G компактна и разложение Леви прямое).

Выберем в K связную подгруппу L и положим $N = N_K(L)$. Тогда группа $Q = N/L$ — это в точности группа автоморфизмов односвязного компактного однородного пространства K/L.

Далее, пусть A — связная подгруппа Ли в центре $Z(R)$ группы Ли R такая, что пересечение $A \cap \Gamma$ является решеткой в A. Подгруппа A всегда замкнута в R и изоморфна $\mathbf{R}^n$ при некотором $n \geq 0$. В общем случае может оказаться, что центр $Z(R)$ тривиален и тогда придется брать $A = \{e\}$, $n = 0$ (для дальнейшего этот случай не очень интересен).

Положим $G = K \times R$, $U = N \times R$, тогда U — замкнутая подгруппа Ли в G, причем многообразие G/U диффеоморфно K/N. В частности, подгруппа U равномерна в G. Подгруппа $L \times (A \cap \Gamma)$, очевидно, нормальна в U. Положим $F = U/(L \times (A \cap \Gamma))$. Очевидно, что группа Ли F изоморфна группе $Q \times R/(A \cap \Gamma)$. Так как по условию группа Ли R односвязна, тор $T_a = A/(A \cap \Gamma)$ является максимальной компактной подгруппой в группе Ли $R/(A \cap \Gamma)$, причем этот тор n-мерный и потому изоморфен T^n. Отметим, что максимальная компактная подгруппа в нашей группе Ли $R/(A \cap \Gamma)$ единственна.

Предположим, что ранг компактной группы Ли Q (равный размерности максимального тора в ней) не меньше, чем $n = \dim A$. Тогда в Q существуют подгруппы, изоморфные T^n, пусть T_c — одна из них.

Наконец, выберем и зафиксируем такую замкнутую связную подгруппу Ли $T \subset F$, что ограничения на нее проекций группы Ли $F = Q \times R/(A \cap \Gamma)$ на прямые сомножители Q и $R/A \cap \Gamma$ соответственно являются изоморфизмами T на T_c и T_a (ясно, что тогда подгруппа T тоже изоморфна T^n и ее можно рассматривать как график некоторого изоморфизма между торами T_c и T_a). Через $\lambda : U \to F$ обозначим естественный эпиморфизм с ядром $L \times (A \cap \Gamma)$. Рассмотрим произведение двух подгрупп $\Gamma \cdot T$, которое является, очевидно, подгруппой Ли в F, и положим $H = \lambda^{-1}(\Gamma \cdot T)$. Получаем подгруппу Ли $H \subset G$, которая, очевидно, замкнута и равномерна в группе Ли $G = K \times R$. Положим $M = G/H$. Это требуемое однородное пространство, которое будем называть *элементарным.* Отметим, что для элементарных однородных пространств транзитивное действие группы Ли G всегда, как это видно из самой конструкции, правильное.

Подгруппу H можно описать и более непосредственно. Сделаем это. Ясно, что подгруппа H порождается решеткой Γ и такой связной подгруппой Ли $\Phi \subset N \times (Z(R))_0$, что L содержится и нормальна в Φ и группа Ли Φ/L изоморфна $\mathbf{R}^n$, причем $\Phi \cap (Z(R))_0 = \Gamma \cap A$. Эту подгруппу Φ можно рассматривать как график некоторого локального изоморфизма подгруппы Ли A на группу Ли T_c. Фактически имеем $H = \Gamma \cdot \Phi$, так как подгруппы Φ и Γ, очевидно, перестановочны.

Из конструкции подгруппы H видно, что группа H/H_0 изоморфна $\Gamma/(A \cap \Gamma)$. Так как группа Ли G односвязна (ибо односвязны по условию K и R), фундаментальная группа $\pi_1(G/H)$ изоморфна H/H_0, а та, в свою очередь, изоморфна группе $\Gamma/(A \cap \Gamma)$, которая является разрешимой группой, причем свободной от кручения.

Итак, построено компактное однородное пространство G/H, фундаментальная группа которого разрешима. Как было отмечено, с точностью до конечнолистного накрытия любое компактное однородное пространство с разрешимой фундаментальной группой диффеоморфно одному из таких элементарных многообразий. Далее можно было бы подробно описать топологическое строение таких однородных пространств и классифицировать их в различных частных случаях, но нам это здесь не понадобится. Заинтересованный читатель может найти немало результатов в этом направлении в ряде статей [6].

Нашей задачей в данной статье является изучение групп автоморфизмов. Применим к элементарным компактным однородным пространствам описанный выше алгоритм.

Начнем с вычисления нормализаторов $N_G(H_0)$. Вначале докажем, что $N_G(H_0) \subset U$, а потом вычислим нормализатор $N_U(H_0)$, который в силу вышеизложенного совпадает с $N_G(H_0)$. Для этого прежде всего изучим подробнее $N = N_K(L)$.

Рассмотрим связную компактную группу Ли L. Она имеет разложение $L = T_L \cdot S_L$ в почти прямое произведение (когда пересечение множителей конечно) центрального тора $T_L = (Z(L))_0$ и полупростой компактной группы Ли S_L. Так как подгруппы T_L и S_L, очевидно, характеристичны в L, то $N_K(L) = N_K(T_L) \cap N_K(S_L)$. Как известно, группа автоморфизмов (групповых) тора дискретна, а потому $(N_K(T_L))_0 = (Z_K(T_L))_0$. Рассмотрим связную подгруппу Φ, введенную выше (при построении элементарных однородных пространств). Образ Φ_K ее проекции на прямой множитель K группы Ли $G = K \times R$ обладает таким свойством: если его профакторизовать по нормальному делителю L, то получим описанный выше тор T_c. Это означает, что полупростые части групп Ли L и Φ_K совпадают, а различаются они только центральными торами. Как нетрудно понять, $(Z(\Phi_K))_0$ может быть представлен в виде прямого произведения двух торов $T_c \times T_L$ (здесь допустили небольшую вольность и через T_L обозначили подтор в K, изоморфный тору $T_L \subset \Phi$). Как выше, имеем $(N_K(\Phi_K))_0 = (Z_K(T_c \cdot T_L))_0 \cap (N(S_L))$. Но ясно, что $(Z_K(T_a \cdot T_L))_0 \subset (Z_K(T_L))_0$. Этим доказано, что $(N_K(\Phi_K)) = (N_K(L))_0$.

Теперь все готово для нахождения $N_G(\Phi) = N_G(H_0)$. Как окажется, этот нормализатор имеет конечное число связных компонент, и потому ограничимся вычислением только его связной компоненты единицы.

Из конструкции элементарных однородных пространств, приведенной выше, сразу видно, что $N_G(\Phi) \supset R$ (так как $A \subset Z(R)$). Поэтому $N_G(\Phi) = (N_G(\Phi) \cap K) \times R$. Подгруппа $(N_G)(\Phi) \cap K$ замкнута в компактной группе Ли K, тем самым она сама компактна и, следовательно, имеет, как и $N_G(\Phi)$, конечное число связных компонент (что отмечено выше). Опишем подгруппу $N_G(\Phi) \cap K$.

Произвольный элемент $g \in N_G(\Phi) \cap K$ должен при действии сопряжением сохранять подгруппу Φ. Но тогда он должен сохранять и ее проекцию в K. Поэтому должно быть $g \in N_K(\Phi_K)$. В силу доказанного выше получаем, что (с точностью до перехода к подгруппе конечного индекса) должно быть $g \in N_K(L)$. Следовательно, $g \in U$. Этим доказано

Предложение 2. *Пусть $M = G/H$ — компактное элементарное однородное пространство с разрешимой фундаментальной группой. Тогда*

1. *Подгруппа $N_G(H_0)$ (или ее подгруппа конечного индекса) содержится в подгруппе $U = N_K(L) \times R$ (здесь использованы обозначения из конструкции элементарных однородных пространств).*

2. *Подгруппа $N_G(H)$ (или ее подгруппа конечного индекса) равна прямому произведению $N_K(\Phi_K) \times R$.*

Отметим, что при доказательстве этого предложения было, в частности, доказано такое общее (возможно, известное ранее) утверждение: если в компактной полупростой группе Ли заданы две подгруппы L и M, причем L содержится в M и нормальна в ней, а фактор-группа M/L абелева, то $(N_K(M))_0 \subset (N_K(L))_0$.

Продолжим применение описанного выше общего алгоритма вычисления групп автоморфизмов компактных однородных пространств в рассматриваемом частном случае. Группа Ли $F = N_G(H_0)/H_0$ в нашем случае имеет конечное число связных компонент, и $F_0 = ((N_K(\Phi_K))_0 \times R)/\Phi$. В группе Ли F имеем решетку $D = H/H_0$, изоморфную, как нетрудно понять, группе $\Gamma/A \cap \Gamma$.

Воспользуемся доказанным изоморфизмом $(\mathrm{Aut}(G/H))_0 = (Z_F(D)/D)_0$. Централизатор решетки D в группе Ли F можно описать так. Он есть произведение компактной группы Ли $N_K(\Phi_K)/L$ и фактор-группы централизатора $Z_R(D)/(\Gamma \cap A)$ (причем $\dim(Z_R(D)/\Gamma \cap A) \geq \dim A$). Централизатор решетки в разрешимой группе Ли абелев (см. § 4), и потому приходим к такому утверждению.

Теорема 6. *Пусть $M = G/H$ — компактное элементарное однородное пространство с разрешимой фундаментальной группой. Тогда группа Ли $(\mathrm{Aut}(G/H))_0$ изоморфна компактной группе Ли $N_K(\Phi_K)/L \cdot T$, где T — некоторый тор положительной размерности* (*явно описанный выше*).

Полученный результат показывает, что даже в не самых общих случаях описание группы автоморфизмов может выглядеть весьма громоздко.

В качестве приложения полученного результата исследуем, когда для элементарных однородных пространств группа автоморфизмов одномерна. В силу теоремы 6 и ее доказательства это будет, только если $N_K(\Phi_K) = L$ и $\dim T = 1$ или если $\dim T = 0$ (что возможно, только если $\dim(A) = 0$ и G/H есть прямое произведение $K/L \times R/\Gamma$) и $\dim(N_K(\Phi_K)/L) = 1$.

Из равенства $N_K(\Phi_K) = L$ в силу конструкции элементарных однородных пространств вытекает, что $T_c = \{e\}$ и потому однородное пространство G/H диффеоморфно прямому произведению $K/L \times R/\Gamma$, при этом $\dim N_K(L) = \dim L$. Последнее равенство означает, что транзитивное действие компактной группы Ли K на многообразии K/L асистатично. Что касается равенства $\dim T = 1$, то оно представляет собой свойство решетки $\Gamma \subset R$ (точнее, ее централизатора), которое в каких-то других терминах для произвольных разрешимых групп Ли R охарактеризовать не удается. Но из него следует, в частности, что центр группы Ли R должен быть одномерен.

Если

$$G/H = (K \times R)/(L \times \Gamma)) = K/L \times R/\Gamma,$$

то

$$\mathrm{Aut}(G/H) = \mathrm{Aut}(K/L) \times N_R(\Gamma)/\Gamma.$$

Для равенств $\dim(\mathrm{Aut}\, G/H) = 1$ и $\dim T = 0$ здесь необходимо и достаточно, чтобы соответственно было $\dim N_K(L)/L = 1$ и нормализатор решетки Γ в R был дискретен. В общем случае проверка каждого из этих условий требует дополнительных исследований однородного пространства K/L и решетки $\Gamma \subset R$.

Из изложенного, в частности, вытекает

Следствие. *Если для компактного элементарного однородного пространства группа автоморфизмов одномерна, то оно диффеоморфно прямому произведению однородного пространства K/L компактной полупростой группы Ли K и солвмногообразия вида R/Γ* (*где Γ — решетка в некоторой односвязной разрешимой группе Ли R*).

§ 4. О централизаторах и нормализаторах решеток в группах Ли

Как показано в § 3, вычисление группы автоморфизмов компактного однородного пространства во многом сводится к вычислению нормализаторов (и даже централизаторов) решеток в связных группах Ли. Эти вопросы довольно подробно изучались во многих статьях ранее. В этом параграфе вкратце перечислим несколько известных результатов и укажем некоторые их применения к вычислению групп автоморфизмов компактных однородных пространств.

Рассмотрим компактное однородное пространство вида G/Γ, где Γ — решетка в некоторой группе Ли G, которую можно считать односвязной, так как переход к ее универсальной накрывающей не влияет на группу автоморфизмов соответствующего однородного пространства, что отмечено выше. Заметим, что в большинстве своем результаты этого параграфа (как, кстати, и предыдущих) справедливы и тогда, когда однородное пространство G/Γ имеет конечную меру (т. е., в частности, оно плезиокомпактно, см. введение).

Подгруппа $N_G(\Gamma)$ — замкнутая равномерная подгруппа в группе Ли G. При этом $Q = N_G(\Gamma)/\Gamma$ — компактная группа Ли (изоморфная группе $\mathrm{Aut}(G/\Gamma)$). Поэтому $(N_G(\Gamma))_0$ — связная группа Ли с компактной алгеброй Ли (в частности, редуктивная) и ее универсальная накрывающая может быть представлена в виде прямого произведения $K \times \mathbf{R}^n$ при некотором $n \geq 0$, где K — односвязная компактная (и потому полупростая) группа Ли.

Так как подгруппа Γ дискретна, связная компонента единицы группы Ли $N_G(\Gamma)$ тривиально действует на Γ, т. е. ее централизует. Получаем, что

$$(N_G(\Gamma))_0 = (Z_G(\Gamma)_0.$$

Отсюда легко выводится, что группа $\Gamma{\cdot}(Z_G(\Gamma))_0$ — подгруппа конечного индекса в $N_G(\Gamma)$ и группа Ли $(Z_G(\Gamma)/(\Gamma \cap Z_G(\Gamma))_0$ изоморфна Q_0 — связной компоненте единицы группы автоморфизмов Q однородного пространства G/Γ. Поэтому от изучения нормализатора решетки естественно переходим к изучению ее централизатора. Строению централизаторов решеток в группах Ли посвящено много статей. В них важную роль играет множество ограниченных элементов групп $B(G)$ групп Ли G, т. е. множество таких элементов, классы сопряженности которых относительно компактны в группе Ли G (т. е. замыкание этих классов компактно). Ясно, что $B(G)$ всегда содержит центр группы G.

Теорема 7. *Пусть G — полупростая группа Ли, не имеющая компактных факторов, а Γ — решетка в G. Тогда группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G/\Gamma)$ компактного однородного пространства G/Γ конечна и абелева.*

Доказательство. Так как группа Ли $\mathrm{Aut}(G/\Gamma)$ компактна, то $Z_G(\Gamma) \subset B(G)$ (см., например, [8]). Дело в том, что если $x \in Z_G(\Gamma)$, то $\Gamma \subset Z_G(x)$. Но подгруппа $Z_G(x)$ замкнута и равномерна (ибо она содержит равномерную подгруппу Γ). Ясно, что класс сопряженных с x элементов компактен в G, т. е. $x \in B(G)$. При отсутствии компактных факторов у группы Ли G группа $B(G)$ абелева [8].

Далее, центр $Z(G)$ полупростой группы Ли дискретен, поэтому группа $Z_G(\Gamma)$ дискретна [8, следствие 2′], а также абелева. Тогда получаем, что группа $\mathrm{Aut}(G/\Gamma)$ абелева, а также дискретна и потому конечна в силу своей компактности.

Покажем, например, что условие отсутствия компактных факторов в группе Ли G в теореме 7 существенно.

Пусть $S = S_c \times S_n$ — полупростая группа Ли, для которой S_c — максимальный связный компактный нормальный делитель, а связный нормальный делитель S_n не имеет компактных факторов. Если $\Gamma \subset S_n$ — решетка в S_n, то ее нормализатор $N_S(\Gamma)$ содержит S_c. Поэтому здесь группа автоморфизмов однородного пространства S/Γ не будет конечной, ибо она содержит S_c. Отметим, что если рассмотрим другое, в некотором смысле «диагональное», вложение решетки Γ в группу Ли S, то группа автоморфизмов может уменьшиться по сравнению с приведенным выше примером.

Приведем еще один полезный пример вычисления группы автоморфизмов, в более общей ситуации, уже рассматривавшийся выше. Рассмотрим группу Ли $G = E(n) = SO(n) \cdot \mathbf{R}^n$ (группу движений евклидова пространства размерности n) и в ней решетку, изоморфную $\mathbf{Z}^n$, причем целиком лежащую в $\mathbf{R}^n$. Тогда $N_G(\Gamma) = \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{R}^n$ и группа автоморфизмов однородного пространства G/Γ не будет конечной — она изоморфна $\mathbf{Z}_2 \cdot T^n$.

В связи с теоремой 7 естественно возникает вопрос: какие именно конечные группы могут быть реализованы как группы автоморфизмов компактных однородных пространств S/Γ полупростых групп Ли S с дискретной стационарной подгруппой Γ? Отметим, что если Γ_1 — нормальный делитель конечного индекса в Γ, то в группе $\mathrm{Aut}(S/\Gamma_1)$ содержится конечная группа Γ/Γ_1. Вопрос о том, какими могут быть конечные фактор-группы решеток в полупростых группах Ли, насколько известно автору, не получил до сих пор полного решения. Представляет интерес, например, описание конечных фактор-групп для арифметических решеток.

В заключение несколько слов о решетках Γ в разрешимых группах Ли R. Здесь в некоторых случаях связная компонента единицы централизатора (и нормализатора) решетки совпадает с центром группы Ли R. Так будет, если группа Ли G нильпотентна, треугольна, алгебраична или комплексна (см., например, [3]). В этих случаях группа Ли $(N_R(\Gamma))_0$ является тором той же размерности, что и центр группы Ли R.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Онищик А. Л.* Топология транзитивных групп преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995.
2. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
3. *Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Шварцман О. В.* Дискретные подгруппы групп Ли // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 21. С. 5–120. (Итоги науки и техники).
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Лань, 2009.
5. *Горбацевич В. В.* Модификации транзитивных действий групп Ли на компактных многообразиях и их применения // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1981. С. 131–145.
6. *Горбацевич В. В.* О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой // I: Геометрические методы в задачах анализа и алгебры. 1981. С. 71–87; II: Вопросы теории групп и гомологической алгебры. 1982. С. 13–28; III: Вопросы теории групп и гомологической алгебры. 1985. С. 93–103; IV: Вопросы теории групп и гомологической алгебры. 1991. С. 88–98.
7. *Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Группы Ли преобразований // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 20. С. 103–240. (Итоги науки и техники).

8. *Greenleaf F., Moskovitz M.* Compactness of homogeneous spaces of finite volume // Amer. J. Math. 1975. V. 97. P. 248–259.

Статья поступила 3 июля 2015 г.

Горбацевич Владимир Витальевич
Московский гос. технологический университет МАТИ им. К. Э. Циолковского,
кафедра высшей математики,
ул. Оршанская, 3, Москва 121552
vgorvich@yandex.ru