Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 515.162.3

ТАБУЛИРОВАНИЕ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННОЙ БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА

С. В. Матвеев, Л. Р. Набеева

Аннотация. Табулированы все узлы в ориентируемой утолщенной бутылке Клейна, имеющие диаграммы с тремя и менее перекрестками. Различность узлов доказывается с помощью обобщенного скобочного полинома Кауффмана от четырех переменных.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.317

Ключевые слова: утолщенная бутылка Клейна, узел, обобщенный полином Кауффмана.

1. Введение. Статья посвящена составлению таблицы узлов в утолщенной бутылке Клейна $K\tilde{\times}I$, минимальные диаграммы которых имеют не более трех перекрестков. Сначала строятся регулярные графы степени 4, имеющие не более трех вершин. Для каждого графа перечисляются гомеоморфные ему проекции, затем — отвечающие им диаграммы узлов. Различность большинства полученных узлов удалось доказать при помощи специально построенного полезного инварианта узлов в утолщенной бутылке Клейна — аналога полинома Кауффмана [1]. Полученная таблица содержит 33 узла. До сих пор таблицы глобальных узлов, т. е. узлов в трехмерных многообразиях, отличных от сферы, строились только для проективного пространства [2], утолщенного тора [3] и полнотория [4]. Изучение и табулирование узлов в утолщенной бутылке Клейна впервые предпринято в настоящей статье.

2. Проекции и диаграммы узлов в $K\tilde{\times}I$. Утолщенная бутылка Клейна — это ориентируемое косое произведение $K\tilde{\times}I$ бутылки Клейна K на отрезок I. *Узлом* в $K\tilde{\times}I$ называется произвольная простая замкнутая кривая в $\mathrm{Int}(K\tilde{\times}I)$. Два узла $k_1, k_2 \subset K\tilde{\times}I$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм многообразия $K\tilde{\times}I$ на себя, переводящий k_1 в k_2. Узлы в $K\tilde{\times}I$, как и классические узлы, удобно задавать проекциями и размеченными проекциями, т. е. диаграммами.

Определение 1. Связный граф $G \subset K$ называется *проекцией*, если каждая его вершина имеет валентность 4 и правило «прямо — вперед» определяет его полный обход.

Постановка задачи и разработка методов ее решения были выполнены первым автором в рамках работы в лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020). Второй автор выполнил работу по составлению таблиц и вычислению инвариантов при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00441) и в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (№ 1.1260.2014/K).

Разумеется, проекции классических узлов обладают этими свойствами. Поэтому такое определение проекции узла в $K\tilde{\times}I$ вполне оправдано. Отметим, что в нашем случае общепринятый способ задания классических узлов с помощью проекций с разрывами вблизи вершин, т. е. диаграмм, не работает. Причина в том, что бутылка Клейна K неориентируема. Поэтому понятия «выше — ниже», нужные для разметки перекрестков, не определены.

Чтобы устранить это препятствие, будем представлять K в виде квадрата, боковые стороны которого отождествлены по параллельному переносу, а основания — по суперпозиции параллельного переноса и симметрии относительно середины основания. При этом все вершины рассматриваемой проекции G данного узла k должны попасть внутрь квадрата. Тогда G будет представлять собой набор таких собственных дуг в квадрате, что при указанных отождествлениях концы дуг склеиваются попарно. Диаграмма узла отличается от его проекции тем, что вершины проекции размечены упомянутым общепринятым способом. Так как квадрат ориентируем, понятия «выше — ниже» определены корректно. Примеры проекции и диаграммы узла в $K\tilde{\times}I$ представлены на рис. 1.

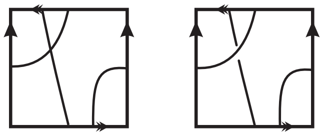

Рис. 1.

Известно, что при составлении таблиц классических узлов стараются ограничиться примарными узлами, поскольку по теореме Шуберта все другие узлы однозначно представимы в виде связных сумм примарных узлов. Для небольших таблиц примарность табличных узлов проверена, но для узлов с 16 и более перекрестками пока нет. Мы тоже будем стараться сократить число рассматриваемых проекций и отвечающих им узлов в $K\tilde{\times}I$ за счет отсеивания тех проекций и узлов, которые можно получить из уже построенных с помощью несложных операций.

Определение 2. Диаграмма узла $k \subset K\tilde{\times}I$ называется *минимальной*, если ее сложность (число перекрестков) не превосходит сложности любой диаграммы любого узла, эквивалентного узлу k. Проекция $G \subset K$ называется *минимальной*, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.

Определение 3. Проекция $G \subset K$ называется *приводимой*, если ее дополнение содержит нетривиальную простую замкнутую кривую.

Определение 4. Проекция $G \subset K$ называется *составной*, если найдется такой диск $D \subset K$, что пересечение $G \cap \partial D$ состоит из двух точек и D содержит вершину графа G.

Определение 5. Минимальная проекция $G \subset K$ называется *существенной*, если она не является составной или приводимой.

При табулировании проекций можно ограничиться существенными проекциями. Действительно, согласно определению 2 все отвечающие неминимальной проекции диаграммы задают узлы, которые имеют проекции с меньшим числом вершин и поэтому уже встретились раньше. Приводимые проекции лучше табулировать отдельно, поскольку каждая из них содержится либо в кольце, либо в листе Мёбиуса, лежащих в K. Тем самым можно заранее составить таблицы проекций в кольце и листе Мёбиуса и учесть все неэквивалентные вложения этих поверхностей в K. Составные проекции можно не рассматривать, так как отвечающие им узлы получаются из узлов меньшей сложности взятием связных сумм с классическими узлами.

3. Графические типы проекций в K.

Лемма 1 [3]. *Существуют ровно 6 связных регулярных графов степени 4, имеющих не более трех вершин и двух петель (рис. 2).*

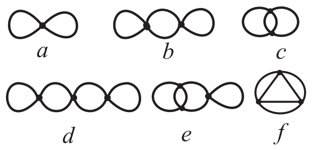

Рис. 2.

4. Основные результаты.

Теорема 1. *Имеется ровно 17 различных существенных проекций в K, число вершин которых не превосходит трех. Все они изображены на рис. 3.*

Теорема 2. *Существуют не более 33 различных существенных узлов в $K\tilde{\times}I$, имеющих диаграммы с тремя и менее перекрестками (рис. 4).*

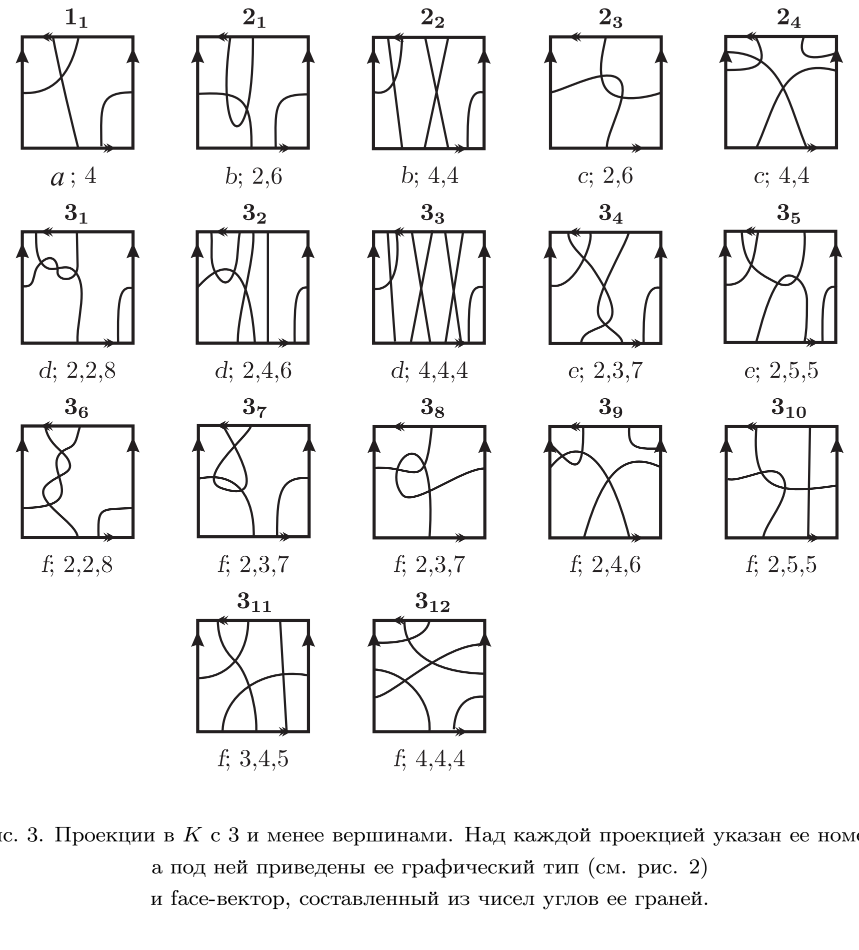

Рис. 3. Проекции в K с 3 и менее вершинами. Над каждой проекцией указан ее номер, а под ней приведены ее графический тип (см. рис. 2) и face-вектор, составленный из чисел углов ее граней.

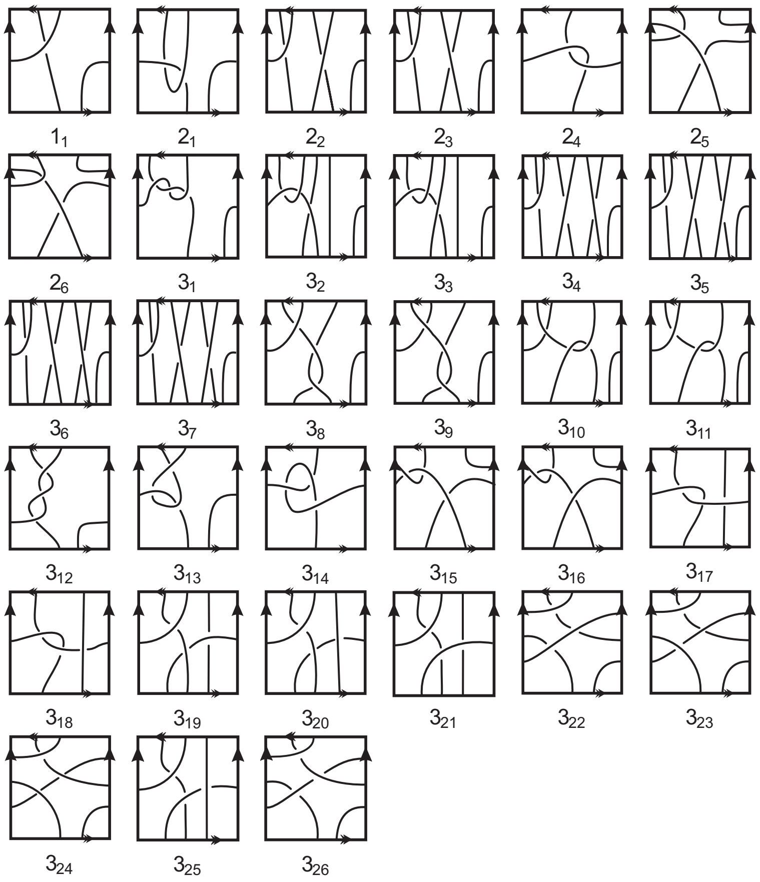

Рис. 4. Существенные узлы в $K\tilde{\times}I$ с тремя и менее перекрестками.

Нам понадобится операция устранения вершины, изображенная на рис. 5. Ориентируем ребра проекции, используя любой из двух ее полных обходов по правилу «прямо — вперед». Тогда операция устранения данной вершины состоит в замене этой вершины пунктирной дугой так, как это показано на рисунке. В результате получится новый граф, у которого на одну вершину меньше и который снабжен пунктирной дугой.

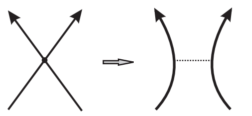

Рис. 5. Устранение вершины.

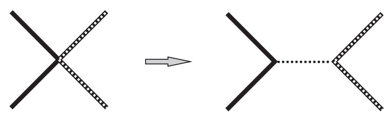

Рис. 6. Устранение нетрансверсальной точки пересечения двух окружностей.

Нам также понадобится еще одна операция устранения вершины. Пусть данная проекция G содержит две вложенные окружности, которые пересекаются ровно в одной вершине, причем не трансверсально. Тогда операция устранения состоит в небольшом сдвиге окружностей так, чтобы эта вершина растянулась в пунктирную дугу, соединяющую данные окружности (на рис. 6 одна окружность декорирована, а вторая — нет).

Доказательство теоремы 1. Разобьем доказательство на шесть случаев, по числу графических типов проекций с тремя и менее вершинами (см. рис. 2).

1. Рассмотрим существенную проекцию G типа (a). Так как ее вершина является разбивающей, устранение этой вершины дает пару окружностей в K, соединенных пунктирной дугой. Поскольку дуга имеет всего два конца, обе окружности односторонние. В противном случае одна из них имела бы свободную сторону, вдоль которой можно было бы провести нетривиальную простую замкнутую кривую в $K \setminus G$. Это противоречит существенности проекции. Окружности можно соединить только одной пунктирной дугой с точностью до гомеоморфизмов $(K,G) \to (K,G)$ (см. схему соединения на рис. 7 слева). Стянув пунктирную дугу в точку, получим проекцию 1_1 (см. рис. 3). По аналогичной причине существенных проекций с тремя петлями нет.

2. Рассмотрим существенную проекцию G типа (b). Устранив обе ее вершины, получим цепочку из трех окружностей, соединенных двумя пунктирными дугами. Как и выше, две крайние окружности односторонние, а оставшаяся может быть как тривиальной, так и нетривиальной. Это показано на средней и правой схеме на рис. 7. Стянув дуги в точки, получим проекции 2_1 и 2_2 (см. рис. 3).

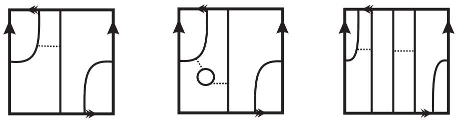

Рис. 7. Схемы проекций типов (a) и (b).

3. Рассмотрим существенную проекцию G типа (c). Устранив одну из ее вершин, получим пару окружностей, которые трансверсально пересекаются в одной точке и соединены пунктирной дугой. С точностью до гомеоморфизма в K есть только две такие пары: (m,μ) и (m_1,m_2), где μ — меридиан бутылки K, а m, m_1, m_2 — односторонние окружности. В обоих случаях пунктирные дуги проводятся однозначно (рис. 8). Стягивая их в точки, получаем проекции 2_3 и 2_4 (см. рис. 3).

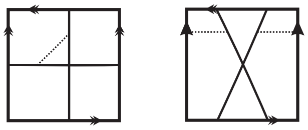

Рис. 8. Схемы проекций типа (c).

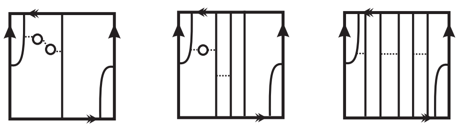

Рис. 9. Схемы проекций типа (d).

4. Построение существенных проекций типа (d) аналогично построению проекций типов (a) и (b). Устранение всех трех ее вершин дает цепочку из четырех окружностей, соединенных тремя пунктирными дугами. Как и раньше, крайние окружности должны быть односторонними. Средние окружности могут быть как тривиальными, так и нетривиальными. Таким образом, имеем три возможности расположения окружностей, которые удобно закодировать так: (m,t,t,m), (m,t,λ,m), (m,λ,λ,m), где буквы m обозначают односторонние окружности, t — тривиальные окружности, а λ — параллели бутылки K. Соответствующие схемы показаны на рис. 9. Стягивание пунктирных дуг в точки дает три новые проекции 3_1, 3_2 и 3_3 (см. рис. 3).

5. Пусть G — проекция типа (e). Устранив вершину ее петли и одну из двух оставшихся вершин, получим три окружности c_1, c_2, c_3. Две из них, скажем c_1, c_2, трансверсально пересекаются в одной точке и соединены пунктирной дугой. Окружность c_3 расположена отдельно и соединена пунктирной дугой с одной из первых двух. Как отмечено выше, две окружности в K могут трансверсально пересекаться в одной точке только в следующих двух случаях.

1. Одна из окружностей является меридианом, т. е. имеет тип μ, а вторая односторонняя.

2. Обе окружности односторонние.

В первом случае окружность c_3 обязана быть тривиальной, но тогда G будет иметь тривиальную петлю, что противоречит условию ее существенности. Во втором случае окружность c_3 тоже должна обращать ориентацию, так как быть тривиальной или иметь тип λ она не может из-за существенности проекции G. Заметим, что дополнение в K к объединению окружностей c_1, c_2, c_3 состоит из открытого диска и открытого кольца. Поэтому нетрудно показать, что соединяющие окружности пунктирные дуги можно провести только двумя неэквивалентными способами (рис. 10). Стягивание пунктирных дуг в точки дает проекции 3_4 и 3_5.

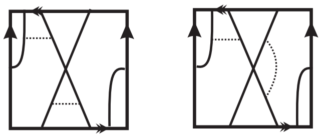

Рис. 10. Схемы проекций типа (e).

6. Пусть G — проекция типа (f). Она представляет собой цепочку из трех окружностей $c_1, c_2, c_3 \subset G$, каждые две из которых имеют одну общую вершину. Допустим, что в какой-нибудь вершине проходящие через нее окружности (пусть c_1, c_2) пересекаются трансверсально. Тогда ни в одной из двух других вершин пересечение окружностей не может быть трансверсальным, поскольку иначе имели бы проекцию не узла, а зацепления.

Как и выше, возможны два случая.

1. Одна из окружностей c_1, c_2 является меридианом, т. е. имеет тип μ, а вторая обращает ориентацию, т. е. имеет тип m.

2. Обе окружности c_1, c_2 имеют тип m.

Устранив обе нетрансверсальные точки пересечения окружности c_3 с c_1, c_2, получим новую окружность $\tilde{c}_3$ (чуть смещенную копию окружности c_3), которая соединена непересекающимися пунктирными дугами с окружностями c_1 и c_2. В первом случае окружность $\tilde{c}_3$ может быть только тривиальной, во втором как тривиальной, так и односторонней. Схемы соответствующих трех проекций показаны на рис. 11 вверху. Стягивая пунктирные дуги в точки, получаем проекцию 3_8 в первом случае и проекции 3_9, 3_{11} — во втором.

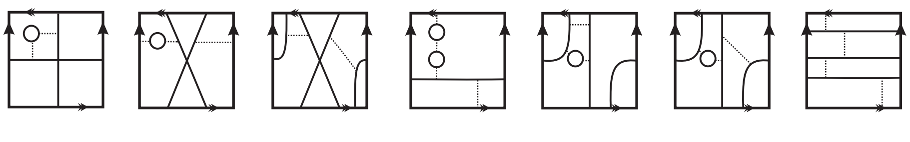

Рис. 11. Схемы проекций типа (f).

Допустим, что все три точки пересечения окружностей $c_1, c_2, c_3 \subset G$ не являются трансверсальными. Устранив их, приходим к замкнутой цепочке из трех непересекающихся окружностей, соединенных тремя пунктирными дугами. Потенциально возможные случаи удобно кодировать тройками типов участвующих окружностей.

1. (μ, t, t). Одна окружность является меридианом, а две другие тривиальны.

2. (m, m, t). Две окружности односторонние, а третья тривиальна.

3. (μ, μ, μ). Все три окружности являются меридианами.

Схемы соответствующих четырех проекций показаны на рис. 11 внизу. При стягивании пунктирных дуг в первом случае получается проекция 3_6, во втором — проекции 3_7 и 3_{11} (схемы которых отличаются расположением пунктирных дуг), в третьем — проекция 3_{12}.

Поскольку параллель λ разбивает K на два листа Мёбиуса, тройки, содержащие λ, не могут привести к существенным проекциям. Оставшиеся тройки (μ, t, t), (m, t, t) и (t, t, t) дают проекции зацеплений. Поэтому других проекций типа (f) нет.

Для доказательства теоремы 2 понадобится новый инвариант узлов в утолщенной бутылке Клейна, который можно назвать *обобщенным полиномом Кауффмана.* В отличие от обычной нормализованной скобки Кауффмана от одной переменной (см. [1]), мы используем четыре переменные A, x, y и z, которые нужны для учета числа и типов окружностей в K, получающихся после разрешения всех перекрестков диаграммы согласно выбранному состоянию s. Точная формула такова:

$$X(K) = (-A)^{-3w(K)} \sum_s A^{\alpha(s)-\beta(s)} (-A^2 - A^{-2})^{\gamma(s)} x^{\delta_1(s)} y^{\delta_2(s)} z^{\delta_3(s)},$$

где $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ — число маркеров A и B в состоянии s, $\gamma(s)$ — число тривиальных окружностей на бутылке Клейна, полученных в результате разрешения всех перекрестков, а $\delta_1(s)$, $\delta_2(s)$ и $\delta_3(s)$ — числа окружностей типов μ, λ и m соответственно. Сумма берется по всем возможным состояниям, а $w(K)$ обозначает число скручивания диаграммы. Доказательство того, что этот полином является инвариантом узла, практически совпадает с приведенным в [1] доказательством инвариантности полинома Кауффмана для классических узлов, поэтому его опускаем.

Доказательство теоремы 2. Чтобы для данной проекции построить диаграммы отвечающих ей узлов, нужно путем разрывов разметить все ее перекрестки. С учетом того, что при замене всех перекрестков противоположными класс эквивалентности узла остается прежним, каждая проекция с тремя вершинами может дать не более четырех различных узлов. Более того, если проекция имеет двуугольную грань, то число отвечающих ей различных узлов снижается до двух, а если эта двуугольная грань граничит по ребру с треугольной, то остается только один узел. В результате получаются 33 диаграммы.

Ниже приведена таблица полиномов Кауффмана для всех узлов, заданных диаграммами на рис. 4. Здесь уместно отметить, что если диаграммы двух узлов отличаются друг от друга на смену типов всех перекрестков, то их полиномы Кауффмана отличаются на смену знаков всех степеней переменной A. Такие полиномы считаем одинаковыми.

1_1: $-A^4x - A^{-2}z^2$,
2_1: $A^{-8}x + (A^{-6} - A^{-2})z^2$,
2_2: $A^{-8}x + 2A^{-6}z^2 + A^{-4}yz^2$,
2_3: $x + (A^{-2} + A^2)z^2 + yz^2$,
2_4: $(A^4 + A^6 - A^{10})z$,
2_5: $(-2A^4 - 2A^8) + A^4y + A^8x^2$,
2_6: $(-A^{-4} - 2 - A^4) + y + x^2$,

3_1: $-A^{-12}x + (-A^{-10} + A^{-6} - A^{-2})z^2$,
3_2: $-A^{-4}x + (-A^{-6} - A^{-2} + A^2)z^2 + (-A^{-4} + 1)yz^2$,
3_3: $-A^{-12}x + (-2A^{-10} + A^{-6})z^2 + (A^{-8} - A^{-4})yz^2$,
3_4: $-A^{-4}x + (-A^{-6} - A^{-2} + A^2)z^2 - 2A^{-4}yz^2 - A^{-2}y^2z^2$,
3_5: $-A^{-12}x + (-2A^{-10} + A^{-6})z^2 - 2A^{-8}yz^2 - A^{-6}y^2z^2$,
3_6: $-A^4x - A^2z^2 + (-1 - A^4)yz^2 - A^2y^2z^2$,
3_7: $-A^{-4}x - A^{-2}z^2 + (-A^{-4} - 1)yz^2 - A^{-2}y^2z^2$,
3_8: $(-1 + A^6 - A^{10})z - A^2yz$,
3_9: $(A^6 - A^8 - A^{10})z - A^6yz$,
3_{10}: $(A^4 - A^{10} + A^{14})z + (-A^8 + A^{12})yz$,
3_{11}: $(-A^2 + A^4 + A^6)z + (-A^4 + A^8)yz$,
3_{12}: $(-A^{-16} + A^{-12} - A^{-8})x - A^{-6}z^2$,
3_{13}: $(A^4 - A^8 + A^{12})x + (-A^{10} + A^{14})z^2$,
3_{14}: $(A^{-2} + 1 - A^2 - A^4 + A^8)z$,
3_{15}: $(-A^{-2} + A^2 + 2A^6) + (A^{-2} - A^2)y - A^6x^2$,
3_{16}: $(-A^2 + 2A^{10} + A^{14}) + (A^6 - A^{10})y - A^{10}x^2$,
3_{17}: $(-2A^8 + A^{12})x + (-A^6 - A^{10} + A^{14})z^2$,
3_{18}: $(-1 - A^4 + A^8)x + (-2A^2 + A^6)z^2$,
3_{19}: $(A^{-8} - 2A^{-4} - A^{-2} + A^2)z - A^{-2}yz$,
3_{20}: $A^4z - A^2yz$,
3_{21}: $(-A^{-10} - A^{-8} + A^{-6})z - A^{-6}yz$,
3_{22}: $3A^{-12}x - A^{-6}z^2 - A^{-12}x^3$,
3_{23}: $(A^{-8} + A^{-4} + 1)x - A^{-2}z^2 - A^{-4}x^3$,
3_{24}: $(1 + A^4 + A^8)x - A^2z^2 - A^4x^3$,
3_{25}: $A^{-4}z - A^{-2}yz$,
3_{26}: $(A^{-8} + A^{-4} + 1)x - A^{-2}z^2 - A^{-4}x^3$.

Примечание. Нетрудно доказать, что узлы 3_{20}, 3_{25} эквивалентны. Для этого достаточно перенести один из перекрестков диаграммы узла 3_{25} через верхнее основание квадрата и повернуть диаграмму на 180 градусов. Это же относится к узлам $3_{23}, 3_{24}$.

Доказать различность узлов 3_6, 3_7, которые имеют одинаковые обобщенные полиномы Кауффмана, авторам не удалось. Это же относится к узлам 3_{23}, 3_{26}.

Из таблицы полиномов Кауффмана видно, что все остальные узлы имеют различные полиномы. Поэтому среди них нет дубликатов.

Гипотеза. *Узел* 3_6 *отличен от узла* 3_7, *а узел* 3_{24} *отличен от узла* 3_{26}.

Авторы благодарны В. В. Таркаеву за вычисление инвариантов и компьютерную проверку правильности таблицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kauffman L. H.* State models and the Jones polynomial // Topology. 1987. V. 26, N 3. P. 395–407.
2. *Дроботухина Ю. В.* Классификация зацеплений в $\mathbb{R}P^3$ с небольшим числом точек скрещивания // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1991. Т. 193. С. 39–63.
3. *Акимова А. А., Матвеев С. В.* Классификация узлов малой сложности в утолщенном торе // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 3. С. 10–21.

4. *Gabrovsek B., Mroczkowski M.* Knots in the solid torus up to 6 crossings // J. Knot Theory Ramifications. 2012. V. 21, N 11. P. 43.

Статья поступила 10 ноября 2015 г.

Матвеев Сергей Владимирович
Челябинский гос. университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
matveev@csu.ru

Набеева Лилия Руслановна
Челябинский гос. университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
liya.nabeyeva@yandex.ru