Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ С УЗКИМ СПЕКТРОМ

А. С. Мамонтов, Э. Ябара

Аннотация. Изучаются группы без элементов больших порядков. Доказывается, что если множество порядков элементов группы G равно $\{1, 2, 3, 4, p, 9\}$, где $p \in \{7, 5\}$, то G локально конечна.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.316

Ключевые слова: периодическая группа, локально конечная группа, спектр.

1. Введение

Спектром периодической группы G называется множество $\omega(G)$ порядков ее элементов. Если спектр G конечен, то пусть $\mu(G)$ — множество максимальных по делимости элементов из $\omega(G)$. В [1] приводится обзор результатов о строении периодических групп с заданным спектром. В [2] доказана локальная конечность группы G, для которой $\mu(G) = \{4, 9\}$. Основным результатом работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Пусть G — группа и $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{7, 5\}$. Тогда $p = 7$ и G является расширением 2-группы с помощью $L_2(8)$. В частности, G локально конечна.*

Попутно исследуются группы, в которых нет элементов порядка больше 11.

Везде далее $\Gamma_n = \Gamma_n(G)$ обозначает множество элементов порядка n из G; $\Delta = \{x^2 \mid x \in \Gamma_4\}$. Запись $x \sim y$ обозначает, что элементы x и y имеют одинаковые порядки. Очевидно, $uv \sim vu$. Говоря о вычислениях, мы имеем в виду вычисления в GAP по алгоритму перечисления смежных классов [3].

2. Используемые результаты

Лемма 1 (В. П. Шунков [4]). *Если периодическая группа G содержит инволюцию с конечным централизатором, то G локально конечна.*

Лемма 2 (В. П. Шунков [5, теорема 2; 6, теорема 2.4]). *Если G — бесконечная 2-группа конечного периода и F — конечная подгруппа G, то $C_G(F)$ бесконечна.*

Лемма 3 (А. Х. Журтов [7]). *Пусть T — периодическая группа, действующая свободно на нетривиальной абелевой группе и $x \in \Gamma_3(T)$. Тогда либо x лежит в центре T, либо $\langle x^T \rangle$ изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. Во всех случаях центр T нетривиален.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14–21–00065).

Лемма 4 (А. Х. Журтов, В. Д. Мазуров [8, теорема 2]). *Пусть T — группа, для которой $\omega(T) = \{2, 3\} \cup \omega$, где каждый элемент из ω либо взаимно прост с числом 6, либо равен 9. Тогда T локально конечна.*

Лемма 5. *Пусть $x, y \in \Gamma_2$ и $xy \in \Gamma_n$. Если $n = 2k$ четно, то $(xy)^k$ лежит в центре группы $\langle x, y\rangle$. Если $n = 2k + 1$ нечетно и $z = (xy)^k$, то $y^z = x$.*

3. Группы без элементов больших порядков

Основная цель данного раздела — доказательство следующего предложения, которое потом будет использовано в доказательстве теоремы.

Обозначим через F группу $\langle x, t \mid 1 = x^4 = t^2 = (x^2t)^3 = (xt)^4 = [x, t]^3\rangle$. Заметим, что F является группой Фробениуса порядка 36 с ядром $\langle a, a^x\rangle$ и дополнением $\langle x\rangle$, где $a = x^2t$. Действительно, из определяющих соотношений следует, что $[a, a^x] = (tx)^4 = 1$, инволюция t инвертирует a и a^x, и вычисления показывают, что $|F| = 36$.

Предложение. *Пусть периодическая группа G не содержит элементов порядка больше 11.*

(a) *Предположим, что найдутся такие $x \in \Gamma_4(G)$, $t \in \Gamma_2(G)$, что $x^2t \in \Gamma_3(G)$. Тогда группа $K = \langle t, x\rangle$ конечна и изоморфна одной из групп S_5, F, $L_2(7)$, $(A_4 \times A_4) : C_4$.*

(b) *Пусть порядки элементов группы G нечетны или делят 4, а сама группа G содержит подгруппу H, изоморфную $L_2(7)$, и не является локально конечной. Тогда G содержит подгруппу, изоморфную $L_3(4)$.*

(c) *Пусть порядки элементов группы G нечетны или делят 4 и G не содержит подгрупп, изоморфных $L_2(7)$. Если найдутся $x \in \Gamma_4(G)$ и $t \in \Gamma_2(G)$ такие, что $x^2t \in \Gamma_3(G)$, то G локально конечна.*

Доказательство. (a) Обозначим через n порядок элемента t^xt. Пусть сначала $n = 2k + 1$ нечетно. По лемме 5 $t^{(t^xt)^k} = t^x$, поэтому $(t^xt)^kx^{-1} \in C_G(t)$. Группа K является гомоморфным образом группы $G(i, j, l, n, h) = \langle x, t \mid 1 = x^4 = t^2 = (x^2t)^3 = (xt)^i = ((xt)^3x^2t)^j = ((xt)^4x^3t)^l = (t^xt)^n = ((t^xt)^{k_n}x^{-1})^h\rangle$, где $n \in \{5, 7, 9, 11\}$, $k_n = (n - 1)/2$, $i, j, l \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $h \in \{6, 8, 10\}$. Вычисления показывают, что $G(6, 8, 6, *, *)$ тривиальна или изоморфна S_5, $G(8, 8, 8, 9, 8)$ изоморфна F и $G(i, j, l, n, h)$ не содержит элементов порядка 3 при остальных возможных значениях параметров.

Пусть далее n четно. Тогда K является гомоморфным образом группы $G(h, i, j) = \langle x, t \mid 1 = x^4 = t^2 = (x^2t)^3 = (xt)^i = ((xt)^3x^2t)^j = (t^xt)^h\rangle$, где $i, j \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ и $h \in \{6, 8, 10\}$. Вычисления показывают, что $G(8, 9, 9) \simeq L_2(17)$, что невозможно; $G(8, 7, 6) \simeq G(8, 7, 9) \simeq L_2(7)$; $G(10, 6, 8) \simeq S_5$; $G(6, 8, 8) \simeq (A_4 \times A_4) : C_4$ и $G(h, i, j)$ не содержит элементов порядка 3 при остальных возможных значениях параметров.

(b) Рассмотрим матрицы

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

из $L_3(2) \simeq L_2(7)$. Вычисления с матрицами показывают, что $\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = L_3(2)$; $\bar{x}^3 = \bar{y}^2 = (\bar{x}\bar{y})^7 = \bar{z}^4 = 1$, где $\bar{z} = [\bar{x}, \bar{y}]$; $C_{L_3(2)}(\bar{z}^2) = \langle \bar{y}, \bar{y}^{\bar{x}}\rangle$; $\bar{x}^{\bar{y}\bar{x}^2\bar{y}\bar{x}^2} \in N_{L_3(2)}(\langle \bar{y}, \bar{z}^2\rangle)$; $\bar{y}^{\bar{x}^2\bar{y}\bar{x}^2} \in C_{L_3(2)}(\bar{y}^{\bar{x}})$; $\bar{z}^2\bar{y}^{(\bar{x}\bar{y})^2} \in \Gamma_3(L_3(2))$.

Отождествим H с подгруппой $\langle x, y \mid 1 = x^3 = y^2 = (xy)^7 = z^4\rangle$, где $z = [x, y]$. По лемме 1 группа $C = C_G(z^2)$ является бесконечной 2-группой. Пусть $S = C_H(z^2)$. По лемме 2 группа $C_C(S)$ бесконечна. Пусть K — группа порядка 16 из $C_C(S)$, содержащая S. Если K содержит единственную инволюцию z^2, то K является циклической или обобщенной группой кватернионов [9, теорема 12.5.2] и потому содержит элемент порядка 8, что невозможно. Пусть t — инволюция из $C_C(S)$, отличная от z^2. Заметим, что $S = \langle y, y^x\rangle$.

Пусть $a = x^{yx^2yx^2}$ — элемент порядка 3 из нормализатора $N_H(\langle y, z^2\rangle)$. Поскольку t централизует группу $\langle y, z^2\rangle$, то t^a и t^{a^2} также централизуют эту группу. Следовательно, $\langle t^{\langle a\rangle}\rangle$ является 2-группой, на которой элемент a действует без неподвижных точек. По [10, лемма 2] $\langle t^{\langle a\rangle}\rangle = \langle t, t^a\rangle$ абелева, откуда $(at)^3 = 1$.

Заметим, что $i = y^{x^2yx^2} \in C_H(y^x)$. Поскольку $[t, y^x] = 1$, то $(it)^4 = 1$. Пусть $j = y^{(xy)^2}$, тогда $z^2j \in \Gamma_3$. Заметим, что zt — элемент порядка 4 такой, что $(zt)^2 = z^2$. По п. (a) $zjt = (xy)^3t \in \Gamma_4 \cup \Gamma_7$.

Значит, $\langle x, y, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $G(r_1, r_2, r_3, r) = \langle x, y, t \mid 1 = x^3 = y^2 = (xy)^7 = z^4 = t^2 = [t, z] = [y, t] = (at)^3 = (ti)^4 = (xt)^{r_1} = (t^xt)^{r_2} = (yti)^{r_3} = ((xy)^3t)^r\rangle$, где $r_1, r_2, r_3 \in \{4, 5, 7, 9, 11\}$ и $r \in \{4, 7\}$. Вычисления показывают, что индекс $G(r_1, r_2, r_3, r)$ по подгруппе $\langle x, y\rangle$ конечен и либо он тривиален, либо $G(7, 4, 9, 4) \simeq L_3(4)$, либо $|G(9, *, 9, 7) : \langle x, y\rangle| = 56$. В последнем случае $56 \cdot |\langle x, y\rangle|$ не делится на 9, поэтому можно полагать $r_1 = 3$; вычисления показывают, что $|G(3, *, 9, 7)| = 168$; противоречие.

(c) Предположим противное. По п. (a) $\langle t, x\rangle \simeq F$. Отсюда $(xt)^4 = (t^xt)^3 = (x^2t)^3$. По леммам 1 и 2 найдется инволюция y, которая централизует x и не лежит в $\langle t, x\rangle$. Очевидно, $xy \in \Gamma_4$ и $(xy)^2 = x^2$. По п. (a) $\langle t, xy\rangle \simeq F$, откуда $(xyt)^4 = (t^{xy}t)^3 = 1$. Таким образом, группа $\langle x, y, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $G(r_1, r_2) = \langle x, y, t \mid 1 = x^4 = y^2 = t^2 = (x^2t)^3 = y^xy = (xt)^4 = (t^xt)^3 = (x^2t)^3 = (xyt)^4 = (t^{xy}t)^3 = (yt)^{r_1} = (x^2yt)^{r_2}\rangle$. Вычисления по алгоритму перечисления смежных классов показывают, что для любых значений $r_1, r_2 \in \{4, 5, 7, 9, 11\}$ порядок $G(r_1, r_2)$ либо делит 36, либо не делится на 3; противоречие. Предложение доказано.

Для доказательства теоремы также понадобится

Лемма 6. *Пусть $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, $x \in \Gamma_3$, $t \in \Delta$ и G не является локально конечной. Тогда либо G содержит подгруппу $L_3(4)$, либо $\langle x, t\rangle \simeq A_4$.*

Доказательство. Если порядок t^xt делит 9, то по свойствам группы диэдра найдется инволюция t' такая, что $tt' \in \Gamma_3(G)$, и по предложению либо G локально конечна, либо содержит подгруппу, изоморфную $L_3(4)$. Поэтому можно считать, что порядок t^xt не делит 9. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть сначала $xt \in \Gamma_7$. Если порядок tt^x четен, то $\langle x, t\rangle$ является гомоморфным образом простой группы $L_2(7)$. Если порядок tt^x равен $2k + 1$, то $(t^xt)^kx^{-1} \in C_G(t)$. Таким образом, $\langle x, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $G(k) = \langle x, t \mid 1 = x^3 = t^2 = (xt)^7 = (tt^x)^{2k+1} = ((t^xt)^kx^{-1})^4\rangle$. Вычисления показывают, что $G(k)$ тривиальна при $k \in \{1, 2, 3\}$.

2. Пусть теперь $xt \in \Gamma_9$. Положим $y = (xt)^3$ и заметим, что $yt = xtxtx \sim t^xt$. Таким образом, по п. 1 порядок t^xt не делит 7. Следовательно, группа $\langle x, t\rangle$ является гомоморфным образом $H(k) = \langle x, t \mid 1 = x^3 = t^2 = (xt)^9 = (tt^x)^k\rangle$, где $k \in \{3, 4, 5\}$. Вычисления показывают, что $H(3)$ циклическая порядка 3, $H(4) \simeq A_4$ и $H(5) \simeq H(3) \times L_2(19)$.

3. Наконец, пусть порядок xt меньше 7. Тогда $\langle x, t\rangle$ является гомоморфным образом $K(r_1, r_2) = \langle x, t \mid 1 = x^3 = t^2 = (xt)^{r_1} = (tt^x)^{r_2}\rangle$, где $r_1 \in \{3, 4, 5\}$ и $r_2 \in \{3, 4, 5, 7\}$. Вычисления показывают, что $K(4, 3) \simeq S_4$ и $K(5, 5) \simeq A_5$ содержат подгруппу, изоморфную S_3, что невозможно; $K(3, 4) \simeq A_4$ и $K(r_1, r_2)$ тривиальна при остальных значениях параметров. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы

Лемма 7. *Пусть G — локально конечная группа с $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{7, 5\}$. Тогда $p = 7$ и G является расширением 2-группы с помощью $L_2(8)$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \Gamma_4(G), z \in \Gamma_9(G)$ и $t \in \Gamma_p(G)$. Тогда $K = \langle x, y, z, t\rangle$ — конечная группа и $\omega(K) = \omega(G)$. Группа K трипримарна и не содержит элементов смешанного порядка, поэтому она не может быть группой Фробениуса или двойной группой Фробениуса [11, лемма 1.1].

Из классификации трипримарных групп [12] следует, что $p = 7$ и $\overline{K} = K/O_2(K) \simeq L_2(8)$, где $O_2(K)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^6 в K, каждая из которых как $\overline{K}$-модуль изоморфна естественному $GF(2^n)SL_2(2^n)$-модулю. Следовательно, x^2 и y^2 порождают 2-подгруппу. Стало быть, $\langle\Delta\rangle$ — нормальная 2-подгруппа в G, и $G/\langle\Delta\rangle \simeq L_2(8)$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $x \in \Gamma_3(G)$ и $4 \in \omega(G)$. Если для всех $a \in \Delta$ выполнено $ax \in \Gamma_3$, то $\langle\Delta\rangle$ локально конечна.*

Доказательство. По индукции $\langle\Delta\rangle\Gamma_3 = \Gamma_3$.

Если $h = x_1 \dots x_n$ — элемент порядка 3, где $x_1, \dots, x_n \in \Delta$, то $n > 2$ и $x_n = x_{n-1} \dots x_2 x_1 h \in \Gamma_3$, что невозможно. Таким образом, $3 \notin \omega(\langle\Delta\rangle)$. Имеем $\langle\Delta, x\rangle = \langle\Delta\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$ и по [10, лемма 7] $\langle\Delta\rangle$ нильпотентна ступени не выше 2. Поэтому $\langle\Delta\rangle$ локально конечна. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{7, 5\}$. По лемме 7 достаточно доказать, что G локально конечна. Предположим противное.

По предложению G не содержит подгрупп, изоморфных $L_2(7)$. По предложению и лемме 8 $\langle\Delta\rangle$ — локально конечная 2-группа.

Если $T = G/\langle\Delta\rangle$ не содержит инволюций, то T действует свободно на центре $\langle\Delta\rangle$, что невозможно по лемме 3. Таким образом, T содержит инволюцию, элемент порядка 3 и не содержит элементов порядка 4, следовательно, она локально конечна по лемме 4. Отсюда G локально конечна по теореме Шмидта; противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lytkina D., Mazurov V.* Groups with given element orders // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2014. V. 7, N 2. P. 191–203.
2. *Джабара Э., Лыткина Д. В.* О группах периода 36 // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 44–48.
3. Gap: Groups, algorithms, and programming (http://www/gap-system.org).
4. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.
5. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–496.
6. *Шунков В. П.* M_p-группы. М.: Наука, 1990.
7. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 329–338.

8. *Журтов А. Х., Мазуров В. Д.* Локальная конечность некоторых групп с заданными порядками элементов // Владикавк. мат. журн. 2009. Т. 11, № 4. С. 11–15.
9. *Hall M.* The theory of groups. New York: The Macmillan Comp., 1963.
10. *Мазуров В. Д.* О группах периода 60 с заданными порядками элементов. // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 329–346.
11. *Васильев А. В.* О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
12. *Кондратьев А. С., Храмцов И. В.* О конечных трипримарных группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.

Статья поступила 16 февраля 2015 г.

Мамонтов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
andreysmamontov@gmail.com

Enrico Jabara (Ябара Энрико)
Dipartimento di Filosofia e beni culturali,
Universita di Ca ’Foscari,
Dorsoduro 3825/E, 30123 Venezia, Italy
jabara@unive.it