Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 512.54

О 2–ГРУППАХ С КОНЕЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ РАНГА 2

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Получена классификация 2-групп, в которых любая конечная подгруппа порождается двумя элементами.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.315

Ключевые слова: периодическая группа, период, проблема Бернсайда, локально конечная группа.

К 60-летию Евгения Ивановича Хухро

С. И. Адян [1, теорема VII,18] доказал, что в не локально конечных бернсайдовых группах нечетного периода любая конечная подгруппа циклическая. В 2-группах ситуация иная: например, в [2] доказано, что 2-группа, в которой любая конечная подгруппа двуступенно нильпотентна, сама двуступенно нильпотентная и, следовательно, локально конечна. Эти обстоятельства оправдывают исследования, направленные на доказательство локальной конечности 2-групп с заданными свойствами их конечных подгрупп.

Настоящая работа посвящена 2-группам, в которых конечные подгруппы порождаются двумя элементами.

Первый результат работы переносит на бесконечные 2-группы известную классификацию 2-групп, содержащих совпадающую со своим централизатором подгруппу порядка 4.

Прежде чем его сформулировать, напомним известные определения.

Квазициклической p-группой (здесь p — простое число) называется группа, изоморфная группе

$$C(p) = \langle a_0, a_1, \dots \mid a_0^p = 1,\ a_{i+1}^p = a_i,\ i = 0, 1, \dots \rangle.$$

Локально диэдральной 2-группой будем называть как конечную 2-группу диэдра, включая нециклическую группу порядка 4 (четверную группу), так и группу, изоморфную

$$D(2) = \langle C(2), b \mid b^2 = 1,\ a_i^b = a_i^{-1},\ i = 1, 2, \dots \rangle.$$

Локально кватернионной группой будет называться 2-группа, изоморфная либо конечной кватернионной группе, т. е. группе кватернионов порядка 8, или обобщенной группе кватернионов, либо группе

$$Q(2) = \langle C(2), b \mid b^2 = a_0,\ a_i^b = a_i^{-1},\ i = 1, 2, \dots \rangle.$$

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект № 14–21–00065).

Теорема 1. *Бесконечная 2-группа, содержащая совпадающую со своим централизатором подгруппу порядка 4, изоморфна $D(2)$ или $Q(2)$.*

Доказательство основного результата работы (теоремы 3 ниже) базируется на следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть каждая конечная подгруппа K 2-группы G обладает следующими свойствами.*

(1) *Если V — нециклическая подгруппа порядка 4 из K, то $C_K(V)$ — абелева группа с двумя порождающими.*

(2) *Если D — подгруппа диэдра порядка 8 из K, то $C_K(D)$ — циклическая группа.*

Тогда G изоморфна расширению локально циклической группы посредством полудиэдральной, локально циклической или локально диэдральной группы.

Здесь *полудиэдральной группой* называется конечная группа

$$S_n = \langle a, b \mid a^{2^n} = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1+2^{n-1}} \rangle,$$

где n — натуральное число, большее 2.

Для формулировки теоремы 3 потребуется следующее определение.

Однородной группой называется конечная p-группа G экспоненты p^m, для которой при некотором натуральном r фактор-группа $\Omega_i(G)/\Omega_{i-1}(G)$, где $i = 1, 2, \dots, m$, является элементарной абелевой группой порядка p^r. Здесь

$$\Omega_i(G) = \langle x \in G \mid x^{p^i} = 1 \rangle.$$

Тривиальную группу также будем считать однородной группой.

Прямое произведение r циклических групп порядка p^m является однородной группой, однако однородная группа не обязана быть абелевой, как показывает пример группы $\langle a, b \mid a^{p^2} = b^{p^2} = 1,\ a^b = a^{1+p} \rangle$.

Теорема 3. *Пусть G — 2-группа, каждая конечная подгруппа которой порождается двумя элементами. Тогда верно одно из следующих утверждений.*

(1) *G конечна и является расширением однородной (возможно, тривиальной) двупорожденной подгруппы посредством циклической, кватернионной, диэдральной или полудиэдральной группы.*

(2) *G бесконечна и изоморфна одной из следующих групп:*

(a) *$C(2) \times C(2)$;*

(b) *$C(2) \times C$, где C — конечная циклическая 2-группа;*

(c) *$Q(2)$;*

(d) *$\langle C(2), b \mid b^{2^m} = 1,\ a^b = a^{-1}$ для любого a из $C(2)\rangle$, $m = 1, 2, \dots$.*

В частности, G локально конечна и содержит абелеву подгруппу индекса 2 или 1.

§ 1. Обозначения и предварительные факты

Если G — группа, $x, y \in G$, $X, Y \subseteq G$, то $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор x и y, $[X, Y] = \langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle$ — взаимный коммутант X и Y, $G' = [G, G]$ — коммутант G и $Z(G)$ — центр G. Если G — p-группа, то

$$\Omega_i(G) = \langle x \in G \mid x^{p^i} = 1 \rangle,$$

$\Phi(G)$ означает подгруппу Фраттини группы G — пересечение всех максимальных в G подгрупп.

Лемма 1 (В. П. Шунков). *В бесконечной 2-группе любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора.*

Доказательство. См. доказательство предложения 5 в [3].

Лемма 2 (теорема Шункова [4]). *Периодическая группа, содержащая инволюцию, централизатор которой конечен, локально конечна.*

Лемма 3. *Если в бесконечной 2-группе G любая конечная подгруппа является циклической или диэдральной группой, то G изоморфна $C(2)$ или $D(2)$.*

Доказательство. Лемма является частным случаем теоремы 3 из [5].

Лемма 4. *Если каждая конечная подгруппа 2-группы G коммутативна, то G коммутативна.*

Доказательство. Утверждение леммы — частный случай теоремы из [2].

Лемма 5 (В. П. Шунков). *Бесконечная 2-группа G, содержащая единственную инволюцию z, изоморфна $C(2)$ или $Q(2)$.*

Доказательство. По [6, теорема 12.5.2] любая конечная подгруппа из G является циклической или кватернионной группой, поэтому в $G/\langle z\rangle$ любая конечная подгруппа является циклической или диэдральной группой и по лемме 3 $G/\langle z\rangle$ изоморфна $C(2)$ или $D(2)$. Поскольку z — единственная инволюция в G, нетрудно показать, что в первом случае $G \simeq C(2)$, а во втором — $G \simeq Q(2)$.

Лемма 6 [7, теорема 5.4.5]. *Если P — конечная нециклическая 2-группа и $|P/[P,P]| = 4$, то P — диэдральная, кватернионная или полудиэдральная группа.*

Лемма 7. *Пусть F — конечная 2-группа, содержащая подгруппу V порядка 4, совпадающую со своим централизатором в F. Тогда F — одна из следующих групп:*
(а) *абелева группа порядка 4;*
(б) *(обобщенная) группа кватернионов;*
(в) *диэдральная группа;*
(г) *полудиэдральная группа.*

Доказательство. Индукция по $|F|$. Можно считать, что $|F| > 8$. Очевидно, $Z(F)$ содержится в V, $|Z(F)| = 2$, $|N_F(V)| = 8$ и $\overline{V} = N_F(V)/Z(F)$ — совпадающая со своим централизатором подгруппа порядка 4 в $\overline{F} = F/Z(F)$. По индукционному предположению $\overline{F}$ — обобщенная группа кватернионов, диэдральная или полудиэдральная группа. В любом случае $|F : F'| = 4$. Теперь заключение вытекает из леммы 6.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть V — подгруппа порядка 4 2-группы G и $C_G(V) = V$.

Рассмотрим вначале случай, когда V — нециклическая группа.

Лемма 8. *$N_G(V)$ — группа диэдра порядка 8.*

Доказательство. Группа внешних автоморфизмов V изоморфна симметрической группе степени 3, поэтому $|N_G(V) : V| \leq 2$. По лемме 1 $|N_G(V) : V| = 2$, т. е. $|N_G(V)| = 8$. Если все инволюции из $N_G(V)$ лежат в V, то $N_G(V)$ — абелева группа, что не выполняется по условию. Поэтому в $N_G(V) \setminus V$ найдется инволюция t, а в V — инволюция v, не перестановочная с t. Так как $\langle t, v\rangle$ —

неабелева группа, лежащая в группе $N_G(V)$ порядка 8, $N_G(V) = \langle t, v\rangle$ — группа диэдра. Лемма доказана.

Обозначим подгруппу $N_G(V)$ через D. Пусть z — единственная инволюция из центра D. Ясно, что $z \in V$. Пусть a — инволюция из V, отличная от z. Понятно, что $\langle a, z\rangle = V$.

Лемма 9. $C_G(a) = V$.

Доказательство. Если v — инволюция из $D \setminus V$, то $a^v = az$. Предположим, что $C_G(a) \neq V$, и выберем элемент $g \in C_G(a) \setminus V$. Тогда $\langle z, z^g\rangle$ — подгруппа диэдра из $C_G(a)$. В ней найдется нециклическая подгруппа W порядка 4, содержащая z. Если $a \notin W$, то $\langle a, W\rangle$ — абелева группа порядка 8, содержащая V, что по условию невозможно. Поэтому $a \in W$ и $W = V$. Если $V = \langle z, z^g\rangle$, то $a = zz^g$, $z^g = az$, $a^g = a$, откуда вытекает, что $w = gv$ при сопряжении действует на элементы из V следующим образом:

$$a^w = a^{gv} = a^v = az, \quad z^w = (az)^v = a.$$

Поэтому

$$a^{w^2} = (az)^w = a^w z^w = aza = z; \quad z^{w^2} = a^w = az;$$

$$a^{w^3} = (a^{w^2})^w = z^w = a; \quad z^{w^3} = (z^{w^2})^w = (az)^w = z.$$

Эти выкладки показывают, что w индуцирует при сопряжении в V автоморфизм порядка 3, что невозможно в 2-группе G. Полученное противоречие показывает, что $C_G(a) = V$. Лемма доказана.

По лемме 2 G локально конечна. Пусть K — конечная подгруппа в G. Тогда $K_1 = \langle K, V\rangle$ — конечная подгруппа, в которой содержится совпадающая со своим централизатором нециклическая подгруппа V порядка 4. По лемме 7 K_1 — группа диэдра или полудиэдральная группа. Если K_1 — полудиэдральная группа, то пусть $x \in G \setminus K_1$. Тогда снова $\langle K_1, x\rangle$ — диэдральная или полудиэдральная группа, собственным образом содержащая K. Поскольку как в полудиэдральной, так и в диэдральной группе все собственные подгруппы являются циклическими или диэдральными группами, в любом случае K — циклическая или диэдральная группа. По лемме 3 $G \simeq D(2)$.

Пусть $V = \langle v\rangle$ — циклическая группа. Так как V имеет ровно один нетривиальный автоморфизм, как и в первом случае, $N_G(V)$ — неабелева группа порядка 8, т. е. $N_G(V)$ — группа кватернионов или диэдра.

Предположим, что $N_G(V)$ — группа диэдра и W — нециклическая подгруппа порядка 4 из $N_G(V)$. Тогда $v \in N_G(W) \setminus C_G(W)$ и v нормализует $C_G(W)$. Если $C_G(W) \neq W$, то пусть $\overline{w}$ — инволюция из $C_G(W)/W$. Так как $v^2 \in W$, то $\bar{v} = vW$ — инволюция в $\overline{N} = N_G(W)/W$. Поэтому $\langle \overline{w}, \bar{v}\rangle$ — подгруппа диэдра в $\overline{N}$ и полный прообраз D этой подгруппы в $N_G(V)$ — конечная подгруппа. Следовательно, v нормализует подгруппу T порядка 8 из $C_G(W)$, и $|C_T(v)| \geq 4$. Таким образом, $C_G(v) = C_G(V) \neq V$ вопреки условию. Поэтому $C_G(W) = W$, и мы возвращаемся к случаю, для которого теорема доказана.

Пусть $N_G(V)$ — группа кватернионов порядка 8 и z — ее единственная инволюция.

Если z — единственная инволюция в G, то заключение вытекает из леммы 5, поэтому можно считать, что в G есть инволюция w, отличная от z. Поскольку $\langle z, w\rangle$ — группа диэдра, w можно выбрать в $C_G(z)$. Инволюции $\bar{v} = v\langle z\rangle$ и $\overline{w} = w\langle z\rangle$ порождают в $\overline{C} = C_G(z)/\langle z\rangle$ группу диэдра, поэтому $W = \langle v, w\rangle$ —

конечная группа и v не централизует w. С другой стороны, $C_W(v) = \langle v \rangle$, и по лемме 7 W — группа диэдра или полудиэдральная группа. В любом случае в W найдется подгруппа диэдра порядка 8, содержащая v. Пусть U — нециклическая подгруппа порядка 4 из W. Тогда $v \in N_G(U) \setminus C_G(U)$ и v нормализует $C_G(U)$. Если $C_G(U) \neq U$, то пусть $\bar{u}$ — инволюция из $C_G(U)/U$. Так как $v^2 \in U$, то $\bar{v} = vU$ — инволюция в $\overline{N} = N_G(U)/U$. Поэтому $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ — подгруппа диэдра в $\overline{N}$ и полный прообраз D этой подгруппы в $N_G(V)$ — конечная подгруппа. Следовательно, v нормализует подгруппу T порядка 8 из $C_G(U)$ и $|C_T(v)| \geq 4$. Таким образом, $C_G(v) = C_G(V) \neq V$ вопреки условию. Поэтому $C_G(U) = U$, и мы вновь возвращаемся к случаю, для которого теорема доказана. Это заканчивает доказательство теоремы 1.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 2.

Лемма 10. (1) *Централизатор в G любой четверной подгруппы — абелева группа, все конечные подгруппы которой двупорождены.*

(2) *Централизатор в G любой неабелевой подгруппы диэдра — локально циклическая группа.*

Доказательство. (1) Пусть V — четверная подгруппа из G и $C = C_G(V)$. Пусть K — конечная подгруппа из C и $K_1 = VK$. По условию K_1 — абелева двупорожденная группа. Таким образом, все конечные подгруппы из C абелевы и порождаются двумя элементами. По лемме 4 C абелева, и п. (1) доказан.

(2) Как и выше, доказывается, что централизатор C неабелевой подгруппы диэдра из G — абелева группа, все конечные подгруппы которой — циклические группы. Поэтому C — локально циклическая группа. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если все инволюции из G перестановочны, то заключение теоремы верно.*

Доказательство. Предположим противное. По условию леммы все инволюции из G порождают абелеву группу V. Если она циклическая, то G изоморфна $C(2)$ или $Q(2)$ по лемме 5. В частности, выполняется заключение теоремы. Если же V нециклическая, то по условию теоремы V — четверная группа. По лемме 10 $C_G(V)$ — абелева группа ранга 2. Если $C_G(V) = G$, то выполняется заключение теоремы. Поэтому $|G : C_G(V)| = 2$. Пусть $x \in G \setminus C_G(V)$. Тогда $C_G(x)$ содержит ровно одну инволюцию, и поскольку $x^2 \neq 1$, то $C_G(x)$ не является локально кватернионной группой. По лемме 5 $C_G(x)$ — локально циклическая группа. Понятно, что $C_G(V) \cap C_G(x) = Z(G)$, поэтому $x^2 \in Z(G)$. Если $Z(G)$ содержит z такой, что $z^2 = x^2$, то $(xz^{-1})^2 = 1$. Поскольку $x \notin Z(G)$, то xz^{-1} — инволюция, не принадлежащая $C_G(V)$ вопреки условию. Это означает, что x^2 порождает $Z(G)$.

Если $C_G(V)/\langle x^2 \rangle$ — не локально циклическая группа, то $x^2 \in \Phi(C_G(V))$ и в $C_G(V)$ существует элемент c, для которого $x^2 = c^2$. Ясно, что

$$(xc^{-1})^2 = x^2 \cdot (c^{-1})^x \cdot c^{-1}, \quad (xc^{-1})^4 = x^4 \cdot (c^{-2})^x c^{-2} = x^4 x^{-2} \cdot x^{-2} = 1.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $x^4 = 1$. Понятно, что $x^2 = z$ — инволюция из $Z(G)$. Если v — отличная от z инволюция из V, то $v^x = vz$ и $(vx)^2 = x^2 \cdot v^x v = z \cdot vz \cdot v = 1$. Таким образом, vx — инволюция, не содержащаяся в V вопреки условию. Поэтому $\overline{C} = C_G(V)/\langle x^2 \rangle$ — локально циклическая группа.

Далее, для любого $\bar{c}$ из $\overline{C}$ очевидно равенство $\bar{c}^{\bar{x}} = c^x cc^{-1} \cdot \langle x^2 \rangle$, где $\bar{x} = \langle x^2 \rangle x$. Поскольку $c^x c \in C_G(V) \cap C_G(x) = \langle x^2 \rangle$, то $\bar{c}^{\bar{x}} = \bar{c}^{-1}$. Это означает, что $\overline{G} = G/\langle x^2 \rangle$ — локально диэдральная группа, и заключение теоремы в этом случае справедливо.

По лемме 11 в G существуют две неперестановочные инволюции, которые порождают диэдральную подгруппу D. Пусть $C = C_G(D)$. По лемме 10 C — абелева группа с единственной инволюцией z, лежащей в центре D. Пусть a — инволюция из $D \setminus \langle z \rangle$. Тогда $\langle a, z \rangle$ — нециклическая подгруппа порядка 4 и в D есть инволюция v, для которой $a^v = az$.

Лемма 12. $C_G(a) = C_G(\langle a, z \rangle)$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такой $c \in C_G(a)$, что $z^c \neq z$ и $c^2 \in C_G(z)$. Если $a \notin \langle z^c, z \rangle = D_1$, то в G есть абелева группа ранга 3. Поэтому $a \in D_1$ и a — единственная инволюция, лежащая в центре группы диэдра D_1.

В D_1 существует инволюция w, нормализующая, но не централизующая $\langle a, z \rangle$. При этом $a^w = a$, $z^w = az$. Такое невозможно, поскольку тогда wv индуцирует в $\langle a, z \rangle$ автоморфизм порядка 3. Лемма доказана.

Лемма 13. *Любая инволюция из G содержится в $G_1 = C_G(C)$.*

Доказательство. Пусть t — инволюция из G. Если $[a, t] = 1$, то $t \in C_G(a) = C_G(\langle a, z \rangle) \leq C_G(C)$. Пусть $[a, t] \neq 1$, $D_1 = \langle a, t \rangle$. Как и выше, $z \in \langle a, t \rangle$; $D_2 = N_{D_1}(\langle a, z \rangle)$ — группа диэдра и существует инволюция w, для которой $z^w = z$, $a^w = az$. Поэтому vw централизует $\langle a, z \rangle$ и, следовательно, централизует C. Поэтому w централизует C, D_2 централизует C, $\langle a, t \rangle$ централизует C, t централизует C. Лемма доказана.

Лемма 14. *$C \lhd G$ и G/C — полудиэдральная или локально диэдральная группа.*

Доказательство. Пусть $N = \Omega_1(G)$. Тогда $C \leq C_G(N)$ по лемме 13. С другой стороны, $C = C_G(D) \leq C_G(N)$. Поэтому $C = C_G(N) \trianglelefteq G$.

Пусть $V = \overline{D} = DC/C$ — четверная подгруппа из $\overline{G} = G/C$. Покажем, что $C_{\overline{G}}(V) = V$. Пусть $\bar{g} \in C_{\overline{G}}(V)$. Тогда $g \in N_G(DC)$. Пусть $D = \langle a, b \rangle$, где $a^2 = b^2 = 1$. Тогда $a^g = ac_1$, $b^g = bc_1$, где $c_1, c_2 \in C$. Так как $c_1^2 = c_2^2 = 1$, то $c_1, c_2 \in D$, т. е. g содержится в $N_G(D)$ и индуцирует в D внутренний автоморфизм, т. е. $g \in DC$, $\bar{g} \in V$. Если $\overline{G}$ — бесконечная группа, то по теореме 1 $\overline{G} \simeq D(2)$. Если $\overline{G}$ — конечная группа, то $\overline{G}$ — диэдральная или полудиэдральная группа по лемме 7. Лемма доказана.

Она завершает доказательство теоремы 2.

§ 4. Доказательство теоремы 3

Пусть G — 2-группа, в которой каждая конечная подгруппа порождается двумя элементами.

Лемма 15. *Если в G есть две неперестановочные инволюции, то либо G конечна и изоморфна диэдральной или полудиэдральной группе, либо G изоморфна $D(2)$.*

Доказательство. Пусть u, v — инволюции и $[u, v] \neq 1$. Не нарушая общности, можно считать, что $D = \langle u, v \rangle$ — группа порядка 8. Пусть z — центральная инволюция из D и $V = \langle v, z \rangle$. Покажем, что $C_G(V) = V$. Предположим противное. Очевидно,

$$N_G(V) = C_G(V)D = C_G(V)\langle u\rangle.$$

Пусть $\bar{t}$ — инволюция в $C_G(V)/V$ и $\bar{u} = Vu \in N_G(V)/V$. Тогда $\langle u, t\rangle$ — конечная подгруппа, u нормализует абелеву подгруппу порядка 8 из $C_G(V)$ и потому $C_G(D) \not\leq D$. С другой стороны, $Z(D) = \langle z\rangle$ и

$$C_G(D)D/\langle z\rangle = C_G(D)/\langle z\rangle \times D/\langle z\rangle$$

не порождается двумя элементами вопреки условию. Поэтому $C_G(V) = V$. Если G бесконечна, то по теореме 1 $G \simeq D(2)$. Если G конечна, то заключение вытекает из леммы 7. Лемма доказана.

Если $|\Omega_1(G)| = 2$, то заключение теоремы справедливо по лемме 5. Если $|\Omega_1(G)| > 4$, то $\Omega_1(G)$ неабелева и заключение вытекает из леммы 15. Поэтому $\Omega_1(G)$ — четверная группа и можно считать, что $\Omega_1(G) \neq G$.

Если теперь $\Omega_2(G)/\Omega_1(G)$ не является четверной группой, то из теоремы 1 и леммы 5 вытекает, что либо G конечна и удовлетворяет заключению теоремы, либо G — локально конечная группа.

Аналогичные рассуждения показывают, что либо G конечна и удовлетворяет заключению теоремы, либо она локально конечна, либо $\Omega_i(G)/\Omega_{i-1}(G)$ для любого натурального i является четверной группой. Поскольку $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_i(G)$, в этом последнем случае G — локально конечная группа.

Итак, можно считать, что G — бесконечная локально конечная группа. По теореме 1 из [8] в G существует характеристическая подгруппа A конечного индекса, изоморфная прямому произведению r экземпляров группы $C(2)$. По условию теоремы 3 $r = 1$ или $r = 2$.

Пусть вначале $r = 2$. Если при этом $|\Omega_1(G)| \neq 4$, то по теореме 1 и лемме 5 G не может содержать подгруппы, изоморфной A, поэтому $|\Omega_1(G)| = 4$ и точно так же $|\Omega_{i+1}(G)/\Omega_i(G)| = 4$ при любом натуральном i. Это означает, что $\Omega_i(G) = \Omega_i(A)$ при любом i, поэтому

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i(A) = A,$$

т. е. выполнен один из пунктов заключения теоремы 3.

Пусть теперь $r = 1$, т. е. A — квазициклическая группа. Обозначим $C = C_G(A)$. Если C — неабелева группа, то в C есть конечная неабелева подгруппа C_0 и $C_1 = C_0 \cap A$ — циклическая подгруппа из центра C_0. Поскольку C_0/C_1 не может быть циклической группой, ранг группы

$$C_0A/C_1 = C_0/C_1 \times A/C_1$$

больше двух, что по условию неверно. Поэтому C — абелева группа и, следовательно, $C = A \times B$, где B — конечная циклическая группа. Если $C = G$, то выполнен п. (2)(в) заключения теоремы.

Пусть $G \neq C$. Так как $\mathrm{Aut}(C(2)) = \langle\alpha\rangle$, где $x^\alpha = x^{-1}$ для любого $x \in C(2)$, то $|G : C| = 2$.

Если $B = 1$, то пусть $x \in G \setminus A$. Поскольку x централизует $x^2 \in A$ и одновременно $(x^2)^x = x^{-1}$, то $x^2 = 1$ или x^2 — инволюция из A. Поэтому G изоморфна $D(2)$ или $Q(2)$.

Если $B = \langle b \rangle \neq 1$ и $|B| = 2^m$, то пусть x — элемент из $G \setminus A$ и $x^2 = b^r a^s$, где $s, r \in \mathbb{N}$, $a \in A$ и порядок a равен 2^m.

Если r — четное число, то G/U, где $U = \langle b^2, a \rangle$, изоморфна $\langle \bar{x}, \bar{b}, C(2) \rangle$, где $\bar{x} = xU$, $\bar{b} = bU$ — перестановочные инволюции, а эта группа содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, что невозможно.

Поэтому r — нечетное число, $\langle x^2, A \rangle = C$, $G = \langle A, x \rangle$ и G изоморфна одной из групп заключения теоремы. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
2. *Lytkina D. V.* On 2-groups, all of whose finite subgroups are of nilpotency class 2 // Sib. Electronic Math. Reports. 2011. V. 8. P. 1–3.
3. *Лыткина Д. В., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А.* О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 395–400.
4. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.
5. *Лыткина Д. В.* Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 340–349.
6. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
7. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Chelsea Publ. Comp., 1980.
8. *Blackburn N.* Some remarks on Černikov p-groups // Ill. J. Math. 1962. V. 6, N 3. P. 421–433.

Статья поступила 3 февраля 2016 г.

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mazurov@math.nsc.ru