Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 512.579

АВТОМОРФИЗМЫ НЕКОТОРЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ ТЕПЛИЦА

Е. В. Липачева, К. Г. Овсепян

Аннотация. Исследуются группы автоморфизмов подалгебр $\mathscr{T}_m$ и $\mathscr{T}(m)$ классической алгебры Теплица, инвариантных относительно конечной подгруппы группы S^1. Также приводится описание группы автоморфизмов подалгебры компактных операторов в $\mathscr{T}_m$. Дается связь между автоморфизмами алгебр $\mathscr{T}_m$ и $\mathscr{T}(m)$.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.314

Ключевые слова: алгебра Теплица, подалгебра алгебры Теплица, автоморфизмы алгебры Теплица, алгебра компактных операторов.

1. Введение

Одним из хорошо известных и используемых алгебраических объектов в современной математической физике является классическая алгебра Теплица $\mathscr{T}$, т. е. C^*-алгебра на пространстве Харди H^2 на единичной окружности S^1, порожденная операторами Теплица с непрерывными символами. В работах многих авторов исследуются как сама эта алгебра, так и различные ее модификации, изучаются свойства полученных алгебр [1–6]. Данная статья также посвящена одному из обобщений алгебры Теплица, которое возникает при исследовании C^*-алгебр, порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы.

Ранее авторами было начато изучение C^*-подалгебр алгебры Теплица $\mathscr{T}$, порожденных мономами, индекс которых кратен числу m. Такая C^*-алгебра была обозначена через $\mathscr{T}_m$, и было показано, что она состоит из неподвижных точек относительно конечной подгруппы группы S^1 порядка m. Были описаны все неприводимые бесконечномерные представления этой C^*-алгебры (см. [7, 8]), было дано полное описание всех инвариантных идеалов алгебры $\mathscr{T}_m$ (см. [9]). Также доказано, что если J — инвариантный идеал C^*-алгебры $\mathscr{T}_m$ и $J \neq \mathscr{K}_m$, то она может быть представлена в виде прямой суммы $\mathscr{T}_m \cong \mathscr{T}_n \oplus J$ для некоторого $n < m$.

В [10] дано описание автоморфизмов классической алгебры Теплица. Основной целью данной статьи является исследование автоморфизмов подалгебр алгебры Теплица — C^*-алгебр $\mathscr{T}(m)$ и $\mathscr{T}_m$. Также полностью описывается группа автоморфимов $\mathrm{Aut}(\mathscr{K}_m)$ алгебры компактных операторов в $\mathscr{T}_m$.

Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за внимательное прочтение статьи и сделанные ценные замечания, что позволило улучшить текст.

2. Необходимые сведения

Пусть $C(S^1)$ — C^*-алгебра непрерывных функций на единичной окружности S^1, наделенная равномерной нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{e^{i\theta}\in S^1} |f(e^{i\theta})|.$$

Обозначим через L^2 и H^2 соответственно пространства Лебега и Харди на S^1. Каждая функция f из $C(S^1)$ определяет оператор-мультипликатор M_f на L^2: $M_f g = f\cdot g$. Отображение $f \to M_f$ есть *-вложение $C(S^1)$ в $B(L^2)$ — алгебру линейных ограниченных операторов на L^2. Оператор Теплица обозначается через T_f и определяется следующим образом: $T_f(\cdot) = PM_fP(\cdot)$, где $P : L^2 \to H^2$ — ортопроектор. Функция f называется *символом оператора* Теплица T_f. Так как $M_{\bar f} = M_f^*$ — мультипликатор, сопряженный к M_f, то $T_{\bar f} = T_f^*$.

Алгеброй Теплица называется равномерно замкнутая подалгебра $\mathscr{T}$ алгебры $B(H^2)$, порожденная операторами T_f, $f \in C(S^1)$. Используя теорию рядов Фурье, можно показать, что алгебра Теплица порождается двумя операторами T_z и $T_{\bar z}$, где z — тождественная функция: $z(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$. Отметим, что $T_{\bar z} = T_z^*$ — оператор, сопряженный к оператору T_z. В дальнейшем оператор T_z будем обозначать через T. Семейство функций $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ образует ортонормированный базис в H^2, и $Tz^k = z^{k+1}$. Поэтому T называется *оператором одностороннего сдвига*. Сдвиги на $C(S^1)$ порождают представление $\pi : S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathscr{T})$ группы S^1 в группу автоморфизмов алгебры $\mathscr{T}$:

$$\pi(e^{i\tau})(T_f) = T_{f_\tau}, \quad \text{где } f_\tau(e^{i\theta}) = f(e^{i(\theta+\tau)}).$$

С помощью подгруппы $G_m = \{e^{i\theta} \in S^1 : e^{im\theta} = 1\}$ группы S^1 определим две подалгебры алгебры $\mathscr{T}$: алгебру $\mathscr{T}(m)$, порожденную операторами из множества

$$\{T_f : \pi(e^{i\tau})(T_f) = T_f \text{ для всех } e^{i\tau} \in G_m\},$$

и алгебру

$$\mathscr{T}_m = \{A \in \mathscr{T} : \pi(e^{i\tau})(A) = A \text{ для всех } e^{i\tau} \in G_m\}.$$

Если $f \in C(S^1)$ — функция такая, что $\pi(e^{i\tau})(T_f) = T_f$ для всех $e^{i\tau} \in G_m$, то f аппроксимируется полиномами вида $\sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k z^{km}$. Поэтому алгебра $\mathscr{T}(m)$ порождается операторами T^m и T^{*m} и, следовательно, изоморфна алгебре Теплица $\mathscr{T}$. Чуть позже увидим, что $\mathscr{T}(m) \subsetneq \mathscr{T}_m$. В данной статье исследуются автоморфизмы этих алгебр.

Из определения алгебры $\mathscr{T}$ следует, что конечные линейные комбинации операторов вида T^kT^{*l}, $k,l \in \mathbb{Z}_+$, плотны в C^*-алгебре $\mathscr{T}$. Оператор T^kT^{*l} называется *мономом*, а число $l-k$ — *индексом монома* T^kT^{*l} и обозначается через $\mathrm{ind}(T^kT^{*l})$. Заметим, что $\mathrm{ind}(T^kT^{*l})$ есть индекс Фредгольма оператора T^kT^{*l}.

Каждый элемент A из $\mathscr{T}$ представляется в виде формального ряда:

$$A \simeq \sum_{k,l\in\mathbb{Z}_+} \alpha_{k,l} T^kT^{*l}, \quad \alpha_{k,l} \in \mathbb{C},$$

где $\alpha_{k,l} = (Az^l, z^k)$, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в H^2.

Так как $\pi(e^{i\tau})(T^kT^{*l}) = e^{i\tau(l-k)}T^kT^{*l}$, то C^*-алгебру $\mathscr{T}_m$ можно определить как подалгебру алгебры Теплица, порожденную мономами, индекс которых кратен числу m. Следовательно, любой элемент A из $\mathscr{T}_m$ можно представить в виде формального ряда:

$$A \simeq \sum_{k,l\in\mathbb{Z}_+,\, l-k\in m\mathbb{Z}} \alpha_{k,l}T^kT^{*l},$$

а если A из $\mathscr{T}(m)$, то

$$A \simeq \sum_{k,l\in m\mathbb{Z}_+} \alpha_{k,l}T^kT^{*l}.$$

Определим отображение $\gamma^k : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$, полагая $\gamma^k(A) = T^kAT^{*k}$, где $k \in \mathbb{Z}_+$. Из равенства $T^*T = I$ следует, что γ^k — эндоморфизм и $\gamma^k \circ \gamma^l = \gamma^{k+l}$. Так как $\operatorname{ind}\gamma^n(T^kT^{*l}) = l-k$ и сужение γ^n на $\mathscr{T}_m$ также является эндоморфизмом, $\mathscr{T}_m$ как векторное пространство представляется в виде прямой суммы

$$\mathscr{T}_m = \mathscr{T}(m) \oplus \gamma(\mathscr{T}(m)) \oplus \cdots \oplus \gamma^{m-1}(\mathscr{T}(m)),$$

где $\gamma^i(\mathscr{T}(m))\gamma^j(\mathscr{T}(m)) = 0$, если $i \neq j$ (см. [9]).

Пусть $\mathscr{K}(m)$, $\mathscr{K}_m$, $\mathscr{K}$ — подалгебры компактных операторов в алгебрах $\mathscr{T}(m)$, $\mathscr{T}_m$, $\mathscr{T}$ соответственно. Тогда существуют короткие точные последовательности:

$$0 \longrightarrow \mathscr{K}' \xrightarrow{\ \tau'\ } \mathscr{T}' \xrightarrow{\ \pi'\ } C(S^1) \longrightarrow 0,$$

где $\mathscr{T}'$ — одна из приведенных выше алгебр, а $\mathscr{K}'$ — содержащийся в ней идеал компактных операторов, τ' — вложение, π' — фактор-отображение. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{K}(m) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & \mathscr{T}(m) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & C(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{K}_m \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & \mathscr{T}_m \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & C(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{K} \arrow[r] & \mathscr{T} \arrow[r] & C(S^1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативна, где $\varphi_1 : \mathscr{T}(m) \to \mathscr{T}_m$, $\varphi_2 : \mathscr{T}_m \to \mathscr{T}$ — вложения, а ψ — эндоморфизм алгебры $C(S^1)$, т. е. $\psi f(z) = f(z^m)$ (см. [8, 9]).

В заключение этого раздела приведем некоторые утверждения, полученные в [7–9].

Представим пространство Харди H^2 в виде прямой суммы:

$$H^2 = H_0^2 \oplus H_1^2 \oplus \cdots \oplus H_{m-1}^2, \tag{1}$$

где H_j^2 — замкнутое подпространство, порожденное базисом $\{z^{j+km}\}_{k=1}^{\infty}$.

Пространства H_j^2, $j = 0, \ldots, m-1$, инвариантны относительно мономов, индекс которых кратен числу m. Поэтому они инвариантны и относительно алгебр $\mathscr{T}(m)$, $\mathscr{T}_m$. Каждый оператор из $\mathscr{T}_m$ однозначно представляется в виде

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_{m-1}.$$

Пусть $P_j = T^jT^{*j}$, $1 \leq j \leq m-1$, тогда C^*-алгебра $\mathscr{T}_m$ порождается алгеброй $\mathscr{T}(m)$ и проекторами $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$. Кроме того,

$$P_j|_{H_i^2} = \begin{cases} I|_{H_i^2}, & i \geq j, \\ T^mT^{*m}|_{H_i^2}, & i < j. \end{cases} \tag{2}$$

Определим унитарный оператор $u_j : H_j^2 \to H^2$, $0 \le j \le m-1$, полагая на базисных элементах $u_j(e_{j+km}) = e_k$. Так как H_j^2 — инвариантные пространства для C^*-алгебр $\mathscr{T}_m$, унитарный оператор $u = u_0 \oplus \dots \oplus u_{m-1} : H_0^2 \oplus H_1^2 \oplus \dots \oplus H_{m-1}^2 \to \bigoplus\limits_{j=0}^{m-1} H^2$ порождает вложение

$$\rho : \mathscr{T}_m \to \bigoplus_{j=0}^{m-1} B(H^2), \quad \rho(A) = uAu^*, \text{ где } A \in \mathscr{T}_m.$$

Поскольку $T^m e_{i+km} = e_{i+(k+1)m}$, оператор $\rho(T^m) = T \oplus \dots \oplus T$ представляет собой m копий оператора сдвига T. Алгебра $\mathscr{T}(m)$ порождается операторами T^m и T^{*m}, следовательно, для любого $A \in \mathscr{T}(m)$ найдется такой оператор $B \in \mathscr{T}$, что

$$\rho(A) = B \oplus \dots \oplus B.$$

Очевидно, верно и обратное: для любого $B \in \mathscr{T}$ найдется оператор $A \in \mathscr{T}(m)$ такой, что $\rho(A) = B \oplus \dots \oplus B$. Поэтому

$$\rho(\mathscr{T}(m)) = m\mathscr{T} = \Big\{A \in \bigoplus^{m} \mathscr{T} : A = B \oplus B \oplus \dots \oplus B,\ B \in \mathscr{T}\Big\},$$

где через $\bigoplus\limits^{m} \mathscr{T}$ обозначена прямая сумма m экземпляров алгебры Теплица $\mathscr{T}$.

Из формулы (2) получаем, что $\rho(P_i) = TT^* \oplus \dots \oplus TT^* \oplus I \oplus \dots \oplus I$.

Всюду в дальнейшем алгебру $\mathscr{T}(m)$ будем отождествлять с алгеброй $m\mathscr{T}$, а проекторы P_i, $1 \le i \le m-1$, — с проекторами $\rho(P_i)$. Отсюда, в частности, получается, что подалгебру компактных операторов $\mathscr{K}_m$ в алгебре $\mathscr{T}_m$ можно отождествить с алгеброй

$$\rho(\mathscr{K}_m) = \bigoplus^{m} \mathscr{K},$$

где через $\bigoplus\limits^{m} \mathscr{K}$ обозначена прямая сумма m экземпляров подалгебры компактных операторов $\mathscr{K}$ в алгебре Теплица $\mathscr{T}$.

Из вышеизложенного следует, что алгебра $\mathscr{T}_m$ может быть отождествлена с алгеброй

$$\Big\{A \in \bigoplus^{m} \mathscr{T} : A = (B + K_1) \oplus \dots \oplus (B + K_m), \quad B \in \mathscr{T},\ K_1, \dots, K_m \in \mathscr{K}\Big\}.$$

Наконец, алгебра $\mathscr{T}_m$ может быть представлена в виде $\mathscr{T}_m = m\mathscr{T} \oplus J_i$, где $J_i = \mathscr{K} \oplus \dots \oplus \mathscr{K} \oplus 0 \oplus \mathscr{K} \oplus \dots \oplus \mathscr{K}$ — идеал в $\mathscr{T}_m$, i-я координата которого есть нуль. Доказательства приведенных здесь утверждений можно найти в [7–9].

3. Автоморфизмы алгебры $\mathscr{K}_m$

В данном разделе опишем группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathscr{K}_m)$. Напомним, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathscr{K})$ полностью описывается группой унитарных операторов, т. е. для любого $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{K})$ найдется унитарный оператор $U \in B(H^2)$, такой, что $\varphi(A) = UAU^*$ (см. [11]).

Напомним, что $\mathscr{K}_m$ представляется в виде прямой суммы:

$$\mathscr{K}_m = \mathscr{K} \oplus \mathscr{K} \oplus \dots \oplus \mathscr{K}.$$

Каждый компактный оператор B из $\mathscr{K}_m$ представляется в виде $B = B_0 \oplus B_1 \oplus \dots \oplus B_{m-1}$, где $B_i \in \mathscr{K}$, $0 \le i \le m-1$.

Пусть $\varphi_0,\dots,\varphi_{m-1} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{K})$, тогда понятно, что $(\varphi_0 \oplus \dots \oplus \varphi_{m-1}) \in \mathrm{Aut}(\mathscr{K}_m)$. Пусть S_m — группа перестановок m чисел. Для любого $\gamma \in S_m$ обозначим через V_γ оператор, который действует следующим образом: $V_\gamma(K_0 \oplus \dots \oplus K_{m-1}) = K_{\gamma(0)} \oplus \dots \oplus K_{\gamma(m-1)}$.

Теорема 3.1. *Для любого автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathscr{K}_m)$ существуют такие $\varphi_0,\dots,\varphi_{m-1} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{K})$ и $\gamma \in S_m$, что $\sigma = V_\gamma \circ (\varphi_0 \oplus \dots \oplus \varphi_{m-1})$.*

Доказательство. В [9] описано семейство всех максимальных идеалов алгебры $\mathscr{K}_m$:

$$\begin{aligned} J_i &= \{A \in \mathscr{K}_m : A_i = 0\} \\ &= \{A \in \mathscr{K}_m : A = K_0 \oplus \dots \oplus K_{i-1} \oplus 0 \oplus K_{i+1} \oplus \dots \oplus K_{m-1},\ K_j \in \mathscr{K}\}. \end{aligned}$$

Так как $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathscr{K}_m)$, то σ сохраняет семейство максимальных идеалов, т. е. $\sigma : J_i \to J_{\gamma(i)}$ для некоторой перестановки $\gamma \in S_m$. По полученной перестановке построим V_γ, действующий следующим образом:

$$V_\gamma(K_0 \oplus \dots \oplus K_{m-1}) = K_{\gamma(0)} \oplus \dots \oplus K_{\gamma(m-1)}.$$

Понятно, что $V_\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathscr{K}_m)$ и автоморфизм $\tau = V_{\gamma^{-1}} \circ \sigma$ сохраняет все максимальные идеалы и, следовательно, их пересечения. В частности, это верно для минимальных идеалов $I_i = \bigcap\limits_{j=0, j\neq i}^{m-1} J_j$. Поэтому существуют $\varphi_0,\dots,\varphi_{m-1} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{K})$ такие, что $\tau = \varphi_0 \oplus \dots \oplus \varphi_{m-1}$ и $\sigma = V_\gamma \circ (\varphi_0 \oplus \dots \oplus \varphi_{m-1})$. $\square$

Отметим, что обратное к теореме 3.1 утверждение тривиально.

4. Автоморфизмы алгебры $\mathscr{T}(m)$

Напомним структуру автоморфизмов классической алгебры Теплица. Так как $T_{f\cdot g} - T_f \cdot T_g$ — компактный оператор для любых функций f и g из $C(S^1)$ (см. [2]), в короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{T} \xrightarrow{\pi} C(S^1) \longrightarrow 0$$

фактор-отображение π восстанавливает символ оператора Теплица T_f, т. е. $\pi(T_f) = f$.

Пусть $\varphi : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ — автоморфизм. Поскольку $\varphi(K) = K$, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathscr{T} \arrow[d, "\pi"] \\ C(S^1) \arrow[r, "\tau"] & C(S^1) \end{tikzcd},$$

где τ — автоморфизм алгебры $C(S^1)$. Этот автоморфизм порождает сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\sigma : S^1 \to S^1$ такой, что

$$(\tau f)(e^{i\theta}) = f(\sigma(e^{i\theta})) \quad \text{для} \quad f \in C(S^1).$$

Верно и обратное: *каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\sigma : S^1 \to S^1$ порождает некоторый автоморфизм классической алгебры Теплица* (см. [10]), *т. е. для каждого гомеоморфизма $\sigma : S^1 \to S^1$ существует автоморфизм алгебры Теплица $\varphi : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ такой, что $\varphi(T_f) = T_{f\circ\sigma} + K$, где K — компактный оператор, зависящий от f.*

Опишем автоморфизмы C^*-алгебры $\mathscr{T}(m)$, порожденной операторами T_z^m, T_z^{*m}. Отметим, что $T^m = T_z^m$ на каждом H_i в разложении (1) действует как оператор сдвига $T = T_z$, т. е. $T_z^m = T_z \oplus \dots \oplus T_z$ (см. [9]). Поскольку

$$\begin{aligned}\varphi(T_z^m) &= \varphi(T_z \oplus \dots \oplus T_z) = \varphi(T_z) \oplus \dots \oplus \varphi(T_z)\\ &= (T_{z\circ\sigma} + K) \oplus \dots \oplus (T_{z\circ\sigma} + K) = T_{z\circ\sigma} \oplus \dots \oplus T_{z\circ\sigma} + K \oplus \dots \oplus K,\end{aligned}$$

автоморфизм алгебры $\mathscr{T}(m)$ имеет аналогичное представление как автоморфизмы алгебры Теплица. Если $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathscr{T}(m))$, то $\varphi(T_z^m) = mT_{z\circ\sigma} + mK$, где $mK \in \mathscr{K}(m)$, $mT_{z\circ\sigma} = T_{z\circ\sigma} \oplus \dots \oplus T_{z\circ\sigma} \in \mathscr{T}(m)$.

Поскольку фактор-алгебру $\mathscr{T}(m)/\mathscr{K}(m)$ в нашем представлении можно рассматривать как m копий алгебры $C(S^1)$, вышеприведенная конструкция позволяет утверждать следующее: *каждый автоморфизм $\varphi : \mathscr{T}(m) \to \mathscr{T}(m)$ порождает m копий гомеоморфизмомов m копий окружности S^1. Обратно, m копий гомеоморфизмомов*

$$m\sigma = \sigma \oplus \dots \oplus \sigma : mS^1 \to mS^1$$

порождают с точностью до компактного оператора $mK = K \oplus \dots \oplus K \in \mathscr{K}(m)$ автоморфизм $\varphi : \mathscr{T}(m) \to \mathscr{T}(m)$ такой, что

$$\varphi(T_z^m) = T_{z\cdot\sigma} \oplus \dots \oplus T_{z\cdot\sigma} + K \oplus \dots \oplus K.$$

5. Автоморфизмы алгебры $\mathscr{T}_m$

Два автоморфизма алгебры Теплица $\psi_1, \psi_2 \in \operatorname{Aut}(\mathscr{T})$ назовем *эквивалентными* и обозначим через $\psi_1 \sim \psi_2$, если $\psi_1(T) = \psi_2(T) + K$, где K — некоторый компактный оператор из $\mathscr{K}$.

Разобьем $\operatorname{Aut}(\mathscr{T})$ на классы эквивалентности. Будем обозначать через $\{\delta\}$ класс эквивалентности автоморфизма δ. Если $\pi \in \{\delta\}$, то $\pi(T) = \delta(T) + K'$, где $K' \in \mathscr{K}$. Эти классы эквивалентности образуют группу. Действительно, рассмотрим $\{\pi_1\}$, $\{\pi_2\}$ — два класса эквивалентности автоморфизмов из $\operatorname{Aut}(\mathscr{T})$, и пусть $\sigma_1 \in \{\pi_1\}$, $\sigma_2 \in \{\pi_2\}$. Тогда

$$\begin{aligned}(\sigma_1\sigma_2)(T) = \sigma_1(T) \cdot \sigma_2(T) &= (\pi_1(T) + K_1)(\pi_2(T) + K_2)\\ &= \pi_1(T)\pi_2(T) + K_3 = (\pi_1\pi_2)(T) + K_3,\end{aligned}$$

где $K_1, K_2, K_3 \in \mathscr{K}$, что означает $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \in \{\pi_1\pi_2\}$. Далее, если $\sigma_1 \in \{\pi\}$ и $\sigma_2 \in \{\pi^{-1}\}$, то $(\sigma_1\sigma_2)(T) = \pi\pi^{-1}(T) + K = I + K$, т. е. $\sigma_1\sigma_2 \in \{I\}$. Таким образом, классы эквивалентности образуют группу в $\operatorname{Aut}(\mathscr{T})$.

Теорема 5.1. *Любой автоморфизм алгебры $\mathscr{T}_m$ имеет вид*

$$\tau = V_\gamma \circ (\sigma_0 \oplus \sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1})$$

для некоторых эквивалентных автоморфизмов $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1} \in \operatorname{Aut}(\mathscr{T})$ и перестановки $\gamma \in S_m$.

Доказательство. Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть $\sigma : \mathscr{T}_m \to \mathscr{T}_m$ — автоморфизм алгебры $\mathscr{T}_m$ такой, что $\sigma(J_i) = J_i$, где $J_i = \{A : A = \mathscr{K} \oplus \dots \oplus \mathscr{K} \oplus 0 \oplus \mathscr{K} \oplus \dots \oplus \mathscr{K}\}$. Тогда σ представляется в виде $\sigma = \sigma_0 \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}$, где $\sigma_i : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$, $i = 0, \dots, m-1$, — эквивалентные автоморфизмы алгебры Теплица.*

Доказательство. Поскольку каждое пространство H_j^2, $0 \le j \le m-1$, в равенстве (1) инвариантно относительно алгебры $\mathscr{T}_m$ и сужение этой алгебры на H_j^2 есть алгебра Теплица, справедливо включение $\mathscr{T}_m \subset \mathscr{T} \oplus \dots \oplus \mathscr{T}$. Пусть $\sigma(T^m) = \sigma(T \oplus \dots \oplus T) = B_0 \oplus \dots \oplus B_{m-1}$, где $B_0 \oplus \dots \oplus B_{m-1} \in \mathscr{T}_m$. Покажем сначала, что отображения $\sigma_i : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$, $\sigma_i(T) = B_i$, $i = 0, \dots, m-1$, определенные на образующих, расширяются до гомоморфизмов алгебры Теплица. Действительно, пусть $T^lT^{*k} \in \mathscr{T}$, тогда $T^lT^{*k} \oplus \dots \oplus T^lT^{*k} \in \mathscr{T}(m)$ и

$$\sigma(T^lT^{*k} \oplus \dots \oplus T^lT^{*k}) = \big(B_0^lB_0^{*k} \oplus \dots \oplus B_{m-1}^lB_{m-1}^{*k}\big).$$

Отсюда получается, что $\sigma_i(T^lT^{*k}) = B_i^lB_i^{*k}$, $i = 0, \dots, m-1$. Это означает, что выше определенные σ_i, $i = 0, \dots, m-1$, являются гомоморфизмами алгебры Теплица.

Таким образом, для любого $mB \in \mathscr{T}(m)$ верно следующее представление:

$$\sigma(mB) = \sigma_0(B) \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}(B).$$

Покажем, что приведенное выше представление автоморфизма σ также верно для элементов алгебры $\mathscr{T}_m$, т. е. $\sigma(A) = \sigma_0(A_0) \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}(A_{m-1})$ для любого $A = A_0 \oplus \dots \oplus A_{m-1} \in \mathscr{T}_m$. Действительно, зафиксировав i-ю координату элемента A, представим его в следующем виде:

$$\begin{aligned} A &= mA_i + (A_0 - A_i) \oplus \dots \oplus 0 \oplus \dots \oplus (A_{m-1} - A_i) \\ &= mA_i + K_0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \dots \oplus K_{m-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $(K_0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \dots \oplus K_{m-1}) \in J_i$. Применяя σ к (3) и используя то, что $\sigma(J_i) = J_i$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sigma(mA_i) + \sigma(K_0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \dots \oplus K_{m-1}) \\ &= \sigma_0(A_i) \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}(A_i) \oplus (\widetilde{K}_0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \dots \oplus \widetilde{K}_{m-1}) \\ &= (\sigma_0(A_i) \oplus \widetilde{K}_0) \oplus \dots \oplus \sigma_i(A_i) \oplus \dots \oplus (\sigma_{m-1}(A_i) \oplus \widetilde{K}_{m-1}). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\sigma(A) = B_0 \oplus \dots \oplus B_{m-1} \in \mathscr{T}_m$. Из вышеизложенного следует, что $B_i = \sigma_i(A_i)$. Значит, меняя фиксированную i-ю координату, получим

$$\sigma(A) = \sigma_0(A_0) \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}(A_{m-1}).$$

Покажем теперь, что $\mathrm{Ker}(\sigma_i) = \{0\}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$. Действительно, пусть $\sigma_i(C) = 0$ для некоторого $C \in \mathscr{T}$, тогда $\sigma(mC) = \sigma_0(C) \oplus \dots \oplus \sigma_i(C) \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}(C) \in J_i$, т. е. $mC \in J_i$ и $C = 0$. Таким образом, $\mathrm{Ker}(\sigma_i) = \{0\}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Покажем, что σ_i, $i = 0, 1, \dots, m-1$, сюръективны. Пусть $D \in \mathscr{T}$, тогда $mD \in \mathscr{T}(m) \subset \mathscr{T}_m$. Так как σ — автоморфизм алгебры $\mathscr{T}_m$, существует элемент $D_0 \oplus \dots \oplus D_{m-1} \in \mathscr{T}_m$ такой, что $\sigma(D_0 \oplus \dots \oplus D_{m-1}) = mD$. С другой стороны,

$$\sigma(D_0 \oplus \dots \oplus D_{m-1}) = \sigma_0(D_0) \oplus \dots \oplus \sigma_i(D_i) \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}(D_{m-1}) = mD.$$

Таким образом, для любого элемента $D \in \mathscr{T}$ существует $D_j \in \mathscr{T}$ такой, что $\sigma_i(D_j) = D$. Следовательно, вышеопределенные отображения σ_i, $i = 0, \dots, m-1$, являются автоморфизмами алгебры Теплица.

Осталось показать, что σ_i, $i = 0, 1, \dots, m-1$, — эквивалентные автоморфизмы алгебры Теплица. Действительно, так как

$$\sigma(T^m) = \sigma(T \oplus T \oplus \dots \oplus T) = \sigma_0(T) \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}(T) = (A + K_0) \oplus \dots \oplus (A + K_{m-1}),$$

получаем, что $\sigma_i(T) - \sigma_j(T)$ — компактный оператор. Таким образом, $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ — эквивалентные автоморфизмы. $\square$

Докажем теорему. Пусть $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathscr{T}_m)$. Тогда τ отображает семейство идеалов $\{J_i\}$, $i = 0, \dots, m-1$, в себя, откуда, как показано в теореме 3.1, получаем перестановку $\gamma \in S_m$. Она задает автоморфизм V_γ, действующий следующим образом: $V_\gamma(A_0 \oplus \dots \oplus A_{m-1}) = A_{\gamma(0)} \oplus \dots \oplus A_{\gamma(m-1)}$. Обозначим его через $\sigma = V_{\gamma^{-1}} \circ \tau$. Очевидно, что σ есть автоморфизм алгебры $\mathscr{T}_m$, причем σ отображает каждый максимальный идеал J_i, $i = 0, 1, \dots, m-1$, в себя, поскольку $\sigma(J_i) = V_{\gamma^{-1}} \circ \tau(J_i) = V_{\gamma^{-1}}(J_{\gamma(i)}) = J_i$. Таким образом, имеют место все условия леммы 5.1, следовательно, согласно лемме 5.1 σ представляется в виде $\sigma = \sigma_0 \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}$, где σ_i, $i = 0, \dots, m-1$, — эквивалентные автоморфизмы алгебры Теплица. Таким образом,

$$\tau = V_\gamma \circ (\sigma_0 \oplus \sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}).$$

Обратно, пусть заданы m эквивалентных автоморфизмов $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{T})$, $\gamma \in S_m$ и V_γ. Покажем что $\tau = V_\gamma \circ (\sigma_0 \oplus \sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1})$ является автоморфизмом алгебры $\mathscr{T}_m$. Пусть для определенности $\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1} \in \{\delta\}, \delta \in \mathrm{Aut}(\mathscr{T})$. Тогда для любого $A \in \mathscr{T}$

$$\sigma_0(A) = \delta(A) + K_0, \dots, \sigma_{m-1}(A) = \delta(A) + K_{m-1},$$

где $K_0, \dots, K_{m-1} \in \mathscr{K}$. Положим $\xi = \sigma_0 \oplus \dots \oplus \sigma_{m-1}$. Понятно, что

$$\begin{aligned}\xi(A) = (\delta(A) + K_0) \oplus \dots \oplus (\delta(A) + K_{m-1})& \\ = (\delta(A) \oplus \dots \oplus \delta(A)) + (K_0 \oplus \dots \oplus K_{m-1}) &= m\delta(A) + K',\end{aligned}$$

где $m\delta(A) = \delta(A) \oplus \dots \oplus \delta(A) \in \mathscr{T}(m)$, а $K' = K_0 \oplus \dots \oplus K_{m-1} \in \mathscr{K}_m$, следовательно, $\xi(A) \in \mathscr{T}_m$. Если $\xi(A) = 0$, то $\sigma_i(A) = 0$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, значит, $A = 0$ и $\mathrm{Ker}(\xi) = \{0\}$. Таким образом, $\xi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{T}_m)$. Так как $V_\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathscr{T}_m)$, то $\tau = V_\gamma \circ \xi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{T}_m)$. $\square$

Естественно возникает вопрос: является ли сужение автоморфизма алгебры $\mathscr{T}_m$ на $\mathscr{T}(m)$ автоморфизмом алгебры $\mathscr{T}(m)$? Справедливо

Следствие 5.1. *Автоморфизм φ алгебры $\mathscr{T}_m$ не обязательно сохраняет алгебру $\mathscr{T}(m)$.*

Доказательство. Предположим обратное: пусть $\varphi|_{\mathscr{T}(m)} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{T}(m))$. Согласно теореме 5.1 $\varphi = U_\gamma \circ (\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m)$, где $\sigma_i \in \mathrm{Aut}(\mathscr{T})$. Тогда $\varphi(T^m) = U_\gamma(\sigma_1(T) \oplus \dots \oplus \sigma_m(T))$. По результатам разд. 4 $\varphi|_{\mathscr{T}(m)} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{T}(m))$ тогда и только тогда, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_m$. Следовательно, в общем случае автоморфизм алгебры $\mathscr{T}_m$ не обязательно сохраняет алгебру $\mathscr{T}(m)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Coburn L. A.* The C^*-algebra generated by an isometry // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, N 5. P. 722–726.
2. *Мерфи Дж.* C^*-алгебра и теория операторов. М.: Факториал, 1997.

3. *Douglas R. G.* On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries // Acta Math. 1972. V. 128, N 1. P. 143–152.

4. *Murphy G. J.* Ordered groups and Toeplitz algebras // J. Operator Theory. 1987. V. 18. P. 303–326.

5. *Григорян С. А., Салахутдинов А. Ф.* C^*-алгебры, порожденные полугруппами с сокращением // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 16–25.

6. *Авхадиев М. А., Григорян С. А., Липачева Е. В.* Компактная квантовая полугруппа, порожденная изометрией // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 89–93.

7. *Овсепян К. Г.* О C^*-алгебрах, порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы // Изв. НАН Армении. Математика. 2014. Т. 49, № 5. С. 67–75.

8. *Липачева Е. В., Овсепян К. Г.* Структура подалгебр алгебры Теплица неподвижных относительно конечной группы автоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2015. № 6. С. 14–23.

9. *Липачева Е. В., Овсепян К. Г.* Структура инвариантных идеалов алгебры $\mathscr{T}_m$ // Изв. НАН Армении. Математика. 2015. Т. 50, № 2. С. 38–52.

10. *Muhly P. S., Xia J.* Automorphisms of the Toeplitz algebra // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 116, N 4. P. 1067–1076.

11. *Davidson K. R.* C^*-algebras by example. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Fields Inst. Monogr.; V. 6).

Статья поступила 23 апреля 2015 г.

Липачева Екатерина Владимировна
Казанский гос. энергетический университет,
кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, 51, Казань 420066
elipacheva@gmail.com

Овсепян Карен Гайкович
Иджеванский филиал Ереванского гос. университета,
кафедра общей математики и естествознания,
ул. Усаногакан, 3, Иджеван 4001, Армения
karen.hovsep@gmail.com