Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 517.98

О КОМПАКТНОМ МАЖОРИРОВАНИИ ОДНОРОДНЫХ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ПОЛИНОМОВ

З. А. Кусраева

Аннотация. Установлена теорема типа Доддса — Фремлина — Викстеда о компактном мажорировании для ортогонально аддитивных однородных полиномов в банаховых решетках. Доказательство основано на теореме о линеаризации для указанного класса полиномов, установленной автором ранее.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.313

Ключевые слова: банахова решетка, ортогонально аддитивный полином, проблема мажорирования, вогнутизация, компактность, теорема Доддса — Фремлина — Викстеда.

Полиномы в векторных решетках обладают интересными порядковыми свойствами, а классы полиномов в банаховых решетках, определяемые в смешанных терминах нормы и порядка, имеют весьма богатую структуру, в связи с чем эти объекты привлекают возрастающее внимание исследователей. В то время как алгебраические свойства полиномов и взаимосвязи полиномов с геометрическими и линейно-топологическими свойствами банаховых пространств изучены достаточно хорошо (см., например, [1]), исследование порядковых свойств однородных полиномов в векторных и банаховых решетках начато совсем недавно (начиная с работы [2]). Ранее стали изучаться ортогонально аддитивные полиномы, введенные в [3]. Следующие статьи [4–12] и имеющиеся в них ссылки дают достаточно полное представление о состоянии предмета в настоящее время.

Проблема мажорирования для линейных операторов, действующих в банаховых решетках, формулируется так: сохраняет ли линейный оператор то или иное свойство (компактность, слабая компактность и т. д.), которым обладает его мажоранта? Первый результат такого типа получен в [13], однако интерес к этой проблеме возрос после выхода в свет работы [14]. Один из наиболее известных результатов, теорема Доддса — Фремлина — Викстеда, дает полное описание таких пар банаховых решеток, что любой действующий в них линейный положительный оператор с компактной мажорантой компактен (см. [14, 15]). Решения, полученные для различных классов линейных операторов, представлены в [16–20]. Проблема мажорирования для однородных полиномов была поставлена в [21].

Цель настоящей работы — доказать теорему типа Доддса — Фремлина — Викстеда для ортогонально аддитивных однородных полиномов в банаховых

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–91339 ННИО-а).

решетках. Рассмотрим векторные решетки E и F. Отображение P из E в F называют *однородным полиномом*, если существуют целое число $s \geq 1$ и полилинейный оператор $\varphi : E^s \to F$ такие, что $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$ для всех $x \in E$. При этом существует единственный симметричный s-линейный оператор φ с таким свойством, именуемый *порождающим оператором* для P. Кроме того, принято говорить, что P — *однородный полином степени* s или, короче, *s-однородный полином*. Однородный полином P именуют *ортогонально аддитивным*, если $P(x + y) = P(x) + P(y)$ для любых дизъюнктных $x, y \in E$. Напомним, что элементы векторной решетки $x, y \in E$ *дизъюнктны* (в символах $x \perp y$), если $|x| \wedge |y| = 0$.

Ортогонально аддитивный s-однородный полином называют *положительным*, если положительным является порождающий его полилинейный оператор φ, т. е. $\varphi(x_1, \dots, x_s) \geq 0$ для любых $0 \leq x_1, \dots, x_s \in E$; *регулярным*, если он представим в виде разности двух положительных ортогонально аддитивных s-однородных полиномов. Положительность полинома P записывается в виде $0 \leq P$. Обозначим символом $\mathscr{P}^r_o({}^sE, F)$ пространства всех регулярных ортогонально аддитивных s-однородных полиномов, действующих из E в F. Отношение частичного порядка в $\mathscr{P}^r_o({}^sE, F)$ вводится, как обычно, с помощью конуса положительных полиномов: $P \leq Q$ в том и только в том случае, когда $0 \leq Q - P$. Очевидно, что при этом $\mathscr{P}^r_o({}^sE, F)$ — упорядоченное векторное пространство. Если F порядково полна, то $\mathscr{P}^r_o({}^sE, F)$ также порядково полная векторная решетка.

Всюду ниже, если не оговорено иное, E и F — банаховы решетки. Говорят, что банахова решетка E *порядково непрерывна* или имеет *порядково непрерывную норму*, если $\lim\limits_{\alpha} \|x_\alpha\| = 0$ для любой убывающей сети (x_α) в E такой, что $\inf\limits_{\alpha} x_\alpha = 0$. Банахова решетка E называется *p-выпуклой* $(1 \leq p < \infty)$, если существует константа $M < \infty$ такая, что для любого конечного набора $\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ имеет место неравенство (см. [22])

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \right\| \leq M \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

Выражение $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ понимается в смысле однородного функционального исчисления, т. е. оно определяется как $f(x_1, \dots, x_n)$, где однородная непрерывная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определяется формулой

$$f(t_1, \dots, t_n) := \left(\sum_{i=1}^{n} |t_i|^p \right)^{1/p}, \quad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Напомним также, что элемент $x > 0$ векторной решетки E называют *атомом*, если для любого $0 \leq y \leq x$ выполняется $y = \lambda x$ при некотором $0 \leq \lambda \leq 1$. Банахова решетка называется *дискретной* или *атомичной*, если для любого $0 \neq y \in E_+$ существует атом $x \in E$ такой, что $0 < x \leq y$. Необходимые сведения из теории векторных и банаховых решеток см. в [16, 17]. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $1 \leq p \in \mathbb{R}$, $s \leq p$ и $s \in \mathbb{N}$, а E и F — банаховы решетки, причем E p-выпукла. Равносильны следующие утверждения.*

(1) *Для любой пары s-однородных ортогонально аддитивных полиномов P, Q из E в F, удовлетворяющих условию $0 \le P \le Q$, компактность Q влечет компактность P.*

(2) *Выполняется одно из следующих (не взаимоисключающих) условий:*

(a) *E не содержит банаховых подрешеток, изоморфных l_s, а F порядково непрерывна;*

(b) *$\mathscr{P}^r_o({}^sE, \mathbb{R})$ атомична, E не содержит банаховых подрешеток, изоморфных l_s;*

(c) *F атомична и порядково непрерывна.*

Доказательство этой теоремы, представленное ниже в виде ряда вспомогательных утверждений, опирается на теорему о линеаризации для указанного класса полиномов, полученную в [4]. Комбинируя этот результат с конструкцией вогнутизации (см. [23]), удается свести общее утверждение теоремы 1 к ее частному случаю $s = p = 1$, представляющему собой следующий хорошо известный результат Доддса, Фремлина и Викстеда.

Теорема 2. *Для произвольных банаховых решеток E и F равносильны следующие утверждения.*

(1) *Если S и T — линейные операторы из E в F, причем $0 \le S \le T$ и T компактен, то S также компактен.*

(2) *Выполняется одно из следующих (не взаимоисключающих) условий:*

(a) *E' и F порядково непрерывны;*

(b) *E' атомична и порядково непрерывна;*

(c) *F атомична и порядково непрерывна.*

Доказательство. Тот факт, что условие 2(a) обеспечивает справедливость утверждения (1), установили Доддс и Фремлин в [14]. Оставшаяся часть теоремы 2 принадлежит Викстеду (см. [15]). $\square$

Рассмотрим конструкцию p-вогнутизации, где $0 \le p \in \mathbb{R}$. Для произвольной банаховой решетки $E := (E, +, \cdot, \le)$ определим новую векторную решетку $E_{(p)} := (E, \oplus, *, \le)$, снабдив упорядоченное множество $(E, \le)$ новыми операциями: сложением $x \oplus y := (x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}$ $(x, y \in E)$ и умножением на скаляры $\alpha * x := \alpha^{\frac{1}{p}} x$ $(x \in E,\ \alpha \in \mathbb{R})$. Тогда $E_{(p)}$ также векторная решетка, называемая *p-вогнутизацией* E (см. [23, § 4.4; 24, 1.d]). (Отметим, что $x \oplus y$ определяется с помощью функционального исчисления, причем под степенью t^p понимается выражение вида $|\alpha|^p \operatorname{sign}(\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.)

Лемма 1. *Существует порядковый изоморфизм ι_p из E на $E_{(p)}$, для любых $x, y \in E$ удовлетворяющий следующим условиям:*

(1) $x \le y \Longleftrightarrow \iota_p(x) \le \iota_p(y)$,

(2) $x \perp y \Longrightarrow \iota_p(x + y) = \iota_p(x) \oplus \iota_p(y)$,

(3) $\iota_p(\alpha^{1/p} x) = \alpha * \iota_p(x)$, *в частности*, $\iota_p(-x) = -\iota_p(x)$,

(4) $\iota_p(|x|) = |\iota_p(x)|$,

(5) $\iota_p((x^p + y^p)^{\frac{1}{p}}) = \iota_p(x) \oplus \iota_p(y)$.

Доказательство. Достаточно взять тождественный оператор $\imath_p := I_E$, рассматриваемый как отображение из E в $E_{(p)}$. Требуемые свойства вытекают непосредственно из определений. $\square$

Напомним, что векторную решетку называют *равномерно полной*, если в ней каждая равномерная последовательность Коши равномерно сходится (равномерную сходимость называют также *сходимостью с регулятором*). Пользуясь однородным функциональным исчислением, можно ввести *канонический s-морфизм* $\odot_s$ равномерно полной векторной решетки E, действующий из E^s в $E_{(s)}$ по правилу $(x_1, \dots, x_s) \mapsto x_1 \odot_s \dots \odot_s x_s := f(x_1, \dots, x_s)$, где $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ — положительно однородная непрерывная функция, определяемая формулой $f(t_1, \dots, t_s) := (t_1 \cdot \ldots \cdot t_s)^{\frac{1}{s}}$.

Лемма 2. *Для любого $2 \leq s \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\odot_s$ полилинеен, симметричен и положителен;*

(2) *$\odot_s$ ортосимметричен, т. е. $x_1 \odot_s \dots \odot_s x_s = 0$, если $x_i \perp x_j$ для какой-нибудь пары индексов $1 \leq i, j \leq s$;*

(3) *$\odot_s$ является решеточным s-морфизмом, т. е. $|x_1 \odot_s \dots \odot_s x_s| = |x_1| \odot_s \dots \odot_s |x_s|$ для всех $x_1, \dots, x_s \in E$;*

(4) *$\iota_s(x) = x \odot_s |x| \odot_s \dots \odot_s |x|$ для всех $x \in E$.*

Доказательство см. в [25, § 5]. □

Канонический полином $\jmath_s : E \to E_{(s)}$ степени s векторной решетки E определяется формулой $\jmath : x \mapsto x^{s\odot} := x \odot_s \dots \odot_s x$ $(x \in E)$. Как видно, ι и $\jmath$ совпадают на E_+.

Если E — банахова решетка и $1 \leq p < \infty$, то можно определить на $E_{(p)}$ полунорму $\|\cdot\|_{(p)}$ формулой

$$\|x\|_{(p)} := \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^p : |x| = u_1 \oplus \dots \oplus u_n;\, u_1, \dots, u_n \in E_+;\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Векторную решетку $E_{(p)}$, снабженную полунормой $\|\cdot\|_{(p)}$, будем по-прежнему обозначать символом $E_{(p)}$ и называть *вогнутизацией* банаховой решетки E.

Лемма 3. *Если E — p-выпуклая банахова решетка с константой M, $s \in \mathbb{N}$ и $s \leq p$, то $E_{(s)}$ — p/s-выпуклая банахова решетка и выполнены оценки $\frac{1}{M^s}\|x\|^s \leq \|\iota_s(x)\|_{(s)} \leq \|x\|^s$ для всех $x \in E$. Более того, ι_s является гомеоморфизмом из E на $E_{(s)}$.*

Доказательство. См. в [24, п. 1.d] требуемые оценки, а также предложение 5 из [26]. Утверждение о гомеоморфизме следует из того что последовательность (x_n) равномерно сходится в E тогда и только тогда, когда $(\iota_s(x_n))$ равномерно сходится в $E_{(s)}$ (см. [23, предложение 4.8(1)]. □

Однородный ортогонально аддитивный полином $P : E \to F$ называют *ограниченным*, если $\|P\| := \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| < \infty$; *компактным* (*слабо компактным*), если множество $P(U(E))$ относительно (слабо) компактно в F, где $U(E) := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ — единичный шар векторной решетки E. Для регулярного полинома вводится также *регулярная норма:*

$$\|P\|_r := \inf\bigl\{\|Q\| : 0 \leq Q \in \mathscr{P}^r_o({}^sE, F),\, |P(x)| \leq Q(|x|)\, (x \in E)\bigr\}.$$

Теорема 3. *Пусть E и F — векторные решетки, причем E равномерно полна и $1 \leq s \in \mathbb{N}$. Тогда любой ортогонально аддитивный регулярный s-однородный полином P, действующий из E в F, допускает единственное представление в виде $P = S \circ \jmath_s$, где S — линейный регулярный оператор из $E_{(s)}$ в F. Более того, соответствие $P \leftrightarrow S$ является изоморфизмом упорядоченных векторных пространств $\mathscr{P}^r_o({}^sE, F)$ и $\mathscr{L}^r(E_{(s)}, F)$. Если, кроме того, E и F —*

банаховы решетки, причем E s-выпукла с константой $0 < M \in \mathbb{R}$, то имеют место оценки $\|P\|_r \le \|S\|_r \le M^s \|P\|_r$.

Доказательство. Для случая векторных решеток требуемое содержится в теореме 4 из [4] (см. также теорему 3.3 из [4]). Предположим, что E и F — банаховы решетки. Так же, как и в линейном случае, для положительного полинома P ввиду неравенства $|P(x)| \le P(|x|)$ имеем $\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in U(E)_+\}$, где $U(E)_+ := U(E) \cap E_+$. В силу леммы 3 получим $\jmath_s(U(E)_+) \subset U(E_{(s)})_+ \subset \jmath_s(MU(E)_+)$. Принимая в расчет эти включения и представление $P = S \circ \jmath_s$, для положительного P выводим

$$
\begin{aligned}
\|P\| &= \sup\{\|(S \circ \jmath_s)(x)\| : x \in U(E)_+\} = \sup\{\|Sy\| : y \in \jmath_s(U(E)_+)\} \\
&\le \sup\{\|Sy\| : y \in U(E_{(s)})_+\} = \|S\| \le \sup\{\|Sy\| : y \in \jmath_s(MU(E))_+\} \\
&= \sup\{\|P(x)\| : x/M \in U(E)_+\} = \sup\{\|P(Mx)\| : x \in U(E)_+\} = M^s \|P\|.
\end{aligned}
$$

Оценки для произвольного регулярного полинома вытекают из оценок, установленных в силу изоморфизма между упорядоченными векторными пространствами $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ и $\mathscr{L}^r(E_{(s)}, F)$. □

Следствие. *Для любой s-выпуклой банаховой решетки E сопряженная банахова решетка $(E_{(s)})'$ и банахова решетка полиномов $\mathscr{P}_o^r({}^sE, \mathbb{R})$ решеточно изоморфны.*

Лемма 4. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $s \le p \in \mathbb{R}$. Всякий регулярный ортогонально аддитивный s-однородный полином из p-выпуклой банаховой решетки в нормированную решетку непрерывен* (*ограничен по норме*).

Доказательство. Согласно теореме 3 регулярный ортогонально аддитивный s-однородный полином P, определенный на банаховой решетке E, допускает представление $P = S_1 \circ \jmath_s - S_2 \circ \jmath_s$, где S_1 и S_2 — линейные положительные операторы на $E_{(s)}$. Так как $E_{(s)}$ — банахова решетка по лемме 3, линейные операторы S_1 и S_2 непрерывны (см. [16, теорема 4.3]). □

Лемма 5. *Пусть E — банахова решетка. Сопряженная банахова решетка E' порядково непрерывна тогда и только тогда, когда E не содержит замкнутых подрешеток, изоморфных l_1.*

Доказательство. См. эквивалентность (1) $\Longleftrightarrow$ (4) в теореме 4.69 из [16] или i) $\Longleftrightarrow$ viii) в теореме 2.4.14 из [17]. □

Лемма 6. *Пусть E — p-выпуклая банахова решетка, $1 \le s \le p \in \mathbb{R}$. Сопряженная банахова решетка $(E_{(s)})'$ порядково непрерывна тогда и только тогда, когда E не содержит замкнутых подрешеток, изоморфных l_s.*

Доказательство. В силу леммы 3 $E_{(s)}$ — банахова решетка, поэтому применима лемма 5. Следовательно, нужно лишь доказать, что $E_{(s)}$ не содержит банаховых подрешеток, изоморфных l_1 тогда и только тогда, когда E не содержит банаховых подрешеток, изоморфных l_s. Заметим сначала, что G — банахова подрешетка в E тогда и только тогда, когда $\overline{G} := \iota_s(G)$ — банахова подрешетка в $E_{(s)}$.

Пусть G — банахова подрешетка в E. Ясно, что $\overline{G}$ является подрешеткой и в $E_{(s)}$, поскольку ι_s — изоморфизм упорядоченных множеств E и $E_{(s)}$. В то же время для ненулевого скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $\lambda * G = \lambda^{1/s} G = G$. Замкнутая подрешетка банаховой решетки равномерно полна, поэтому она допускает функциональное исчисление, значит, $(x^s + y^s)^{1/s} \in G$ для $x, y \in G$, что в силу леммы 1(5) влечет $\iota(x) \oplus \iota(y) \in E_{(p)}$. Возьмем последовательность (u_n) в $\overline{G}$, которая сходится по норме к некоторому $u \in E_{(s)}$. Если $x_n := \iota^{-1}(u_n)$ и $x := \iota^{-1}(u)$, то $x_n \in G$ и последовательность (x_n) сходится по норме к $x \in E$ согласно лемме 3. Ввиду замкнутости G имеем $x \in G$, а значит, $u \in \overline{G}$.

Предположим, что (g_n) — дизъюнктная последовательность в E, а G — порожденная ею замкнутая подрешетка в E. Тогда в силу доказанного замкнутая подрешетка $\overline{G}$, порожденная в $E_{(s)}$ последовательностью $(\bar{g}_n)$, где $\bar{g}_n := \iota_s(g_n)$, совпадает с $\iota_s(G)$. Пусть h — изоморфизм нормированных решеток из l_s на G, причем $g_n = h(e_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где (e_n) — стандартный базис пространства l_s. Это означает, что каждый элемент $x \in G$ допускает представление $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n g_n$ для некоторой последовательности $b = (b_n) \in l_s$, причем существует константа $C > 0$ (не зависящая от $b \in l_s$), обеспечивающая справедливость неравенств

$$\frac{1}{C}\|b\|_{l_s} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n g_n \right\| \leq C\|b\|_{l_s} \quad (b = (b_n) \in l_s).$$

Но тогда каждый элемент $\bar{x} \in \overline{G} = \iota_s(G)$ допускает представление

$$\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{g}_n,$$

где $a_n = b_n^s$ и $\bar{g}_n = \iota_s(g_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Остается заметить, что

$$\frac{1}{C}\|a\|_{l_1} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{g}_n \right\| \leq C\|a\|_{l_1} \quad (a = (a_n) \in l_1),$$

так как $b \in l_s$ в том и только в том случае, когда $a \in l_1$ и при этом $\|a\|_{l_1} = \|b\|_{l_s}$. Отсюда видно, что $\overline{G}$ и l_1 решеточно и топологически изоморфны. Повторив те же рассуждения для отображения ι_s^{-1}, получим обратное утверждение. $\square$

Доказательство теоремы 1. В силу теоремы 3 и леммы 4 утверждение (1) равносильно тому, что для любой пары линейных операторов S и T из $E_{(s)}$ в F, удовлетворяющих условию $0 \leq S \leq T$, компактность T влечет компактность S. По теореме 2 последнее равносильно выполнению одного из следующих условий: (a′) $(E_{(s)})'$ и F порядково непрерывны; (b′) $(E_{(s)})'$ атомична и порядково непрерывна; (c) F атомична и порядково непрерывна. Эквивалентность (a′) $\Longleftrightarrow$ (a) следует из леммы 6. Для обоснования эквивалентности (b′) $\Longleftrightarrow$ (b) нужно заметить, что в силу следствия из теоремы 3 $(E_{(s)})'$ и $\mathscr{P}_o^r({}^sE, \mathbb{R})$ атомичны одновременно, и вновь привлечь лемму 6. $\square$

Теорема 4. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $s \leq p \in \mathbb{R}$. Предположим, что E и F — банаховы решетки, причем E p-выпукла. Равносильны следующие утверждения:*

(1) *для любой пары s-однородных ортогонально аддитивных полиномов P и Q из E в F, удовлетворяющих условию $0 \leq P \leq Q$, слабая компактность Q влечет слабую компактность P;*

(2) *либо E не содержит банаховых подрешеток, изоморфных l_s, либо F порядково непрерывна.*

Доказательство. Теорема 4 для линейных операторов ($p = s = 1$) установлена в [27]: для того чтобы произвольный линейный положительный оператор из E в F, мажорируемый каким-нибудь слабо компактным линейным оператором, был слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одна из банаховых решеток E' и F была порядково непрерывной. Из этого факта выводится требуемое по изложенной выше схеме. $\square$

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за справедливую критику и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dineen S.* Complex analysis on infinite dimensional spaces. Berlin: Springer-Verl., 1999.
2. *Grecu B. C., Ryan R. A.* Polynomials on Banach spaces with unconditional bases // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. V. 133, N 4. P. 1083–1091.
3. *Sundaresan K.* Geometry of spaces of homogeneous polynomials on Banach lattices // Applied geometry and discrete mathematics. DIMACS Ser. Discrete Math. Compute. Sci. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. P. 571–586.
4. *Кусраева З. А.* О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 315–325.
5. *Кусраева З. А.* Однородные ортогонально аддитивные полиномы в векторных решетках // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 5. С. 704–710.
6. *Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc. 2006. V. 38, N 3. P. 459–469.
7. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 388, N 2. P. 845–862.
8. *Perez-Garcia D., Villanueva I.* Orthogonally additive polynomials on spaces of continuous functions // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 306, N 1. P. 97–105.
9. *Ibort A., Linares P., Llavona J. G.* A representation theorem for orthogonally additive polynomials on Riesz spaces // arXiv: 1203.2379vl [math.Fa], 2012.
10. *Linares P.* Orthogonally additive polynomials and applications: PhD Thesis. Universidad Complutense de Madrid, 2009.
11. *Loane J.* Polynomials on Riesz spaces: PhD Thesis. Galway: National Univ. Ireland, 2008.
12. *Toumi M. A.* Orthogonally additive polynomials on Dedekind σ-complete vector lattices // Proc. Irish Royal Academy. 2011. V. 110, N 1. P. 83–94.
13. *Абрамович Ю. А.* Слабо компактные множества в топологических K-пространствах // Теория функций, функцион. анализ и прил. 1972. № 15. С. 27–35.
14. *Dodds P., Fremlin D.* Compact operators in Banach lattices // Israel J. Math. 1978. V. 34, N 4. P. 287–320.
15. *Wickstead A. W.* Converses for the Dodds–Fremlin and Kalton–Saab theorems // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1996. V. 120, N 1. P. 175–179.
16. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. Orlando: Acad. Press, 1985.
17. *Meyer-Nieberg P.* Banach lattices. Berlin etc.: Springer-Verl., 1991.
18. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* Positive operators // Handbook of the geometry of Banach spaces / Eds. W. B. Johnson, J. Lindenstrauss. Amsterdam etc.: Elsevier, 2001. V. 1. P. 85–122.
19. *Flores J., Hernández F. L., Tradacete P.* Domination problems for strictly singular operators and other related classes // Positivity. 2011. V. 15, N 4. P. 595–616.
20. *Flores J., Hernández F. L., Tradacete P.* Disjointly homogeneous Banach lattices and applications. // arXiv: 1509.01499vl [math.Fa], 2015.
21. *Kusraev A. G.* Domination problem for positive operators in Banach lattices // Математический анализ и математическое моделирование: Тр. VII региональной школы-конфер. молодых ученых «Владикавказская молодежная математическая школа». Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. С. 33–40.
22. *,Diestel J., ,Jarchow H., ,Tonge A.* Absolutely summing operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. (Cambr. Stud. Adv. Math.; V. 43).
23. *Szulga J.* (p,r)-convex functions on vector lattices // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1994. V. 37, N 2. P. 207–226.
24. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. V. 2. Function spaces. Berlin etc.: Springer-Verl., 1979.
25. *Boulabiar K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Comm. Algebra. 2006. V. 34, N 4. P. 1435–1442.

26. *Bu Q., Buskes G., Popov A. I., Tcaciuc A., Troitsky V. G.* The 2-concavification of a Banach lattice equals the diagonal of the Fremlin tensor square // Positivity. 2012. V. 17, N 2. P. 283–298.

27. *Wickstead A. W.* Extremal structure of cones of operators // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1981. V. 2, N 32. P. 239–253.

Статья поступила 26 октября 2015 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362019
zali13@mail.ru