Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 517.51

О ПОВЕДЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ — УОЛША ИСПРАВЛЕННОЙ ФУНКЦИИ

Л. Н. Галоян, Р. Г. Меликбекян

Аннотация. Доказано, что для любой последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k \downarrow 0$ с $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \notin l_2$, для любых чисел $0 < \epsilon < 1$, $p \in [1,2]$ и для каждой функции $f \in L^p(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0,1)$ с $\operatorname{mes}\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, модули ненулевых коэффициентов Фурье — Уолша которой удовлетворяют условиям $|c_k(\tilde{f})| = a_k$, $k \in \operatorname{spec}(\tilde{f})$.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.311

Ключевые слова: коэффициенты Фурье, система Уолша, пространство $L^p(0,1)$.

Введение. В работе изучается поведение коэффициентов Фурье по системе Уолша после исправления функции. *Системой Уолша — Пэли* $\{W_k\}$ называют набор функций (см. [1, 2])

$$W_0(x) = 1, \quad W_n(x) = \prod_{s=1}^{k} r_{m_s}(x), \quad n = \sum_{s=1}^{k} 2^{m_s},\ m_1 > m_2 > \dots > m_s,$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — система Радемахера:

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), \quad r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Положим

$$c_k(f) = \int_0^1 f(x) W_k(x)\, dx, \quad \text{где } f(x) \in L^1[0,1],\ k = 0, 1, \dots,$$

$$\operatorname{spec}(f) = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, c_k(f) \neq 0\}.$$

Доказывается следующая

Теорема. *Пусть дана последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k \downarrow 0$ с $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \notin l_2$. Тогда для любых чисел $0 < \epsilon < 1$, $p \in [1,2]$ и для каждой функции $f \in L^p(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0,1)$, $\operatorname{mes}\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, модули ненулевых коэффициентов Фурье — Уолша которой удовлетворяют условиям*

$$|c_k(\tilde{f})| = a_k, \quad k \in \operatorname{spec}(\tilde{f}).$$

Напомним, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину [3]. Им в 1912 г. была получена знаменитая

Теорема 1 (C-свойство Лузина). *Для любой измеримой почти всюду конечной на* $[0,1]$ *функции* f *и для любого* $\epsilon > 0$ *существуют измеримое множество* E *с мерой* $|E| > 1-\epsilon$ *и непрерывная на* $[0,1]$ *функция* g*, совпадающая с* f *на* E.

В 1939 г. Д. Е. Меньшов [4] доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема 2 (усиленное C-свойство Меньшова). *Пусть* f *— измеримая функция, конечная почти всюду на* $[0,2\pi]$. *Для любого* $\epsilon > 0$ *можно определить непрерывную функцию* g*, совпадающую с* f *на некотором множестве* E *с мерой* $|E| > 2\pi - \epsilon$ *и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на* $[0,2\pi]$.

В 1988 г. М. Г. Григоряну [5] удалось доказать, что тригонометрическая система обладает *усиленным* L^1*-свойством* суммируемых функций. Оно состоит в следующем: для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,2\pi]$ с мерой $|E| > 2\pi - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,2\pi]$ можно найти функцию $g \in L^1[0,2\pi]$, совпадающую с f на E, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0,2\pi]$-норме.

Далее в этом направлении интересные результаты получены в [3–17]. Ряд работ [7–12] посвящен теоремам исправления с целью получения монотонности модулей ненулевых коэффициентов Фурье (по системам Хаара, Уолша, Фабера — Шаудера) от корректированной функции.

Приведем те утверждения, которые непосредственно относятся к полученному в настоящей работе результату.

(a) Для системы Хаара $\chi = \{\chi_n(x)\}$ в [7] установлено, что для любой последовательности $a_k \downarrow 0$ с $a_k = o\bigl(\frac{1}{\sqrt{k}}\bigr)$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \notin l_2$ и для каждого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для произвольной $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ такую, что $\tilde{f}(x) = f(x)$ на E и коэффициенты Фурье — Хаара от функции $\tilde{f}$ удовлетворяют условиям

$$\int_0^1 \tilde{f}(x)\chi_n(x)\,dx = a_n, \quad n \in \operatorname{spec}(\tilde{f}).$$

Для системы Уолша $\{W_n\}$ в [9, 10] доказаны следующие результаты.

(b) Для любых $0 < \epsilon < 1$, $p \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^p(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0,1)$, $\operatorname{mes}\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$, такую, что все ненулевые члены последовательности $\{|c_n(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке (здесь $c_k(\tilde{f})$ — коэффициенты Фурье — Уолша исправленной функции $\tilde{f}$).

(c) Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1)$, совпадающую с f на E, такую, что ее ряд Фурье — Уолша сходится к ней почти всюду на $[0,1)$ и все ненулевые члены последовательности коэффициентов Фурье — Уолша вновь полученной функции расположены в убывающем порядке.

(d) Для любой последовательности $a_k \downarrow 0$ с $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \notin l_2$ и для каждого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для произвольной $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E, такую, что

$$c_n(\tilde{f}) = \int_0^1 \tilde{f}(x)W_n(x)\,dx = a_n, \quad n \in \operatorname{spec}(\tilde{f}).$$

Для системы Фабера — Шаудера $\{\Phi_n(x)\}$ в [12] получен следующий результат.

(e) Пусть $b_k \downarrow 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} = \infty$. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ и для любой измеримой почти всюду конечной на [0,1] функции f можно определить непрерывную функцию

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tilde{f})\Phi_k(x)$$

с $\operatorname{mes}\{f \neq \tilde{f}\} < \epsilon$ такую, что $|A_n(\tilde{f})| = b_n$, $n \in \operatorname{spec}(\tilde{f})$.

Вспомогательные утверждения. Мы будем пользоваться следующей леммой, доказанной в [14].

Лемма 1. *Пусть даны последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k \downarrow 0$ с $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \notin l_2$, числа $n_0 > 1$ ($n_0 \in \mathbb{N}$), $\gamma \neq 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и промежуток вида $\Delta = \Delta_m^{(k)} = \left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right)$, $k \in [1, 2^m]$. Тогда существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ и полиномы $H(x)$, $Q(x)$ по системе Уолша вида*

$$H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} b_k W_k(x), \quad Q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \delta_k a_k W_k(x),$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(a) $\delta_k = \pm 1, 0$,

(b) $|E| = |\Delta|(1-\varepsilon)$,

(c) $H(x) = 0$, $x \in [0,1] \setminus \Delta$,

(d) $|Q(x) - \gamma| < \delta$, $x \in E$,

(e) $|H(x)| < C\frac{|\gamma|}{\varepsilon} + \delta$, $x\in \Delta$ (*C — абсолютная постоянная*),

(f) $\int\limits_0^1 |Q(x) - H(x)|^2\, dx < \varepsilon\delta^2|\Delta|$.

Основным средством для доказательства сформулированной выше теоремы является

Лемма 2. *Пусть дана последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k \downarrow 0$, с $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \notin l_2$. Тогда для любых чисел $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < \delta$, $\varepsilon < 1$, $p \in [1,2]$ и для каждого полинома $f(x)$ по системе Уолша с $|f| > 0$ можно найти измеримое множество $E \subset [0,1]$, функцию g и полином по системе Уолша вида*

$$Q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \text{где } \delta_k = \pm 1, 0,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

1) $|E| = 1 - \varepsilon$,

2) $g(x) = f(x)$, $x \in E$,

3) $\left(\int\limits_0^1 |Q(x) - g(x)|^2\, dx\right)^{1/2} < \delta$,

4) $\left(\int\limits_0^1 |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \frac{B}{\varepsilon}\left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$ $\forall p \in [1,2]$,

где B — абсолютная постоянная.

Доказательство леммы 2. Пусть

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x), \quad [0,1) = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} \Delta_\nu, \tag{1}$$

где Δ_ν, $\nu = 1, 2, \dots, \mu_0$, — некоторые непересекающиеся двоичные промежутки (χ_Δ– характеристическая функция множества Δ). Выберем число $\beta > 0$ таким образом, что

$$\max\left\{\beta, \beta\sum_{\nu=1}^{\mu_0}|\Delta_\nu|^{\frac{1}{2}}\right\} < \min\left\{\frac{\delta}{4}; C\frac{\min|f|}{\varepsilon}; \left(\int_0^1 |f|^p\,dx\right)^{1/p}\right\}. \tag{2}$$

Последовательным применением леммы 1 для всех $1 \le \nu \le \mu_0$ можно определить множества $E_\nu \subset \Delta_\nu$ и полиномы

$$H_\nu(x) = \sum_{k=2^{N_{\nu-1}}}^{2^{N_\nu}-1} b_k W_k(x), \quad Q_\nu(x) = \sum_{k=2^{N_{\nu-1}}}^{2^{N_\nu}-1} \delta_k a_k W_k(x),$$

где $N_0 = n_0$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $\delta_k = \pm 1, 0$,
2) $|E_\nu| = |\Delta_\nu|(1-\varepsilon)$,
3) $H_\nu(x) = 0$, $x \in [0,1]\setminus\Delta_\nu$,
4) $|Q_\nu(x) - \gamma_\nu| < \beta$, $x \in E_\nu$,
5) $|H_\nu(x)| < C\frac{|\gamma_\nu|}{\varepsilon} + \beta$, $x\in \Delta_\nu$, $C > 1$ — абсолютная постоянная,
6) $\int_0^1 |Q_\nu(x) - H_\nu(x)|^2\,dx < \varepsilon\beta^2|\Delta_\nu|$.

Положим

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\mu_0} E_\nu, \tag{3}$$

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} Q_\nu(x), \tag{4}$$

$$H(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} H_\nu(x), \tag{5}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in E, \\ Q(x) & \text{при } x\in [0,1]\setminus E. \end{cases} \tag{6}$$

Из (3), (6) и условия 2 вытекает, что

$$g(x) = f(x) \text{ при } x \in E, \quad |E| = 1-\varepsilon,$$

т. е. пп. 1 и 2 выполнены. В силу (2), (4), (5) и условия 6 имеем

$$\left(\int_0^1 |Q(x) - H(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \sum_{\nu=1}^{\mu_0}\left(\int_0^1 |Q_\nu(x) - H_\nu(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$
$$\le \beta\sum_{\nu=1}^{\mu_0}(\varepsilon|\Delta_\nu|)^{\frac{1}{2}} < \min\left\{\frac{\delta}{4}; \left(\int_0^1 |f|^p\,dx\right)^{1/p}\right\}. \tag{7}$$

Используя (1), (2) и условия 3, 4, 6, имеем

$$\left(\int\limits_E |H(x)-f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \sum_{\nu=1}^{\mu_0}\left(\int\limits_{E_\nu}|H_\nu(x)-\gamma_\nu|^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{\mu_0}\left(\int\limits_{E_\nu}|H_\nu(x)-Q_\nu(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + \sum_{\nu=1}^{\mu_0}\left(\int\limits_{E_\nu}|Q_\nu(x)-\gamma_\nu|^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$< \beta\sum_{\nu=1}^{\mu_0}(\varepsilon|\Delta_\nu|)^{\frac12} + \beta\sum_{\nu=1}^{\mu_0}|\Delta_\nu|^{\frac12} < \frac{\delta}{2}. \quad (8)$$

Отсюда и из соотношений (4)–(7) заключаем

$$\left(\int\limits_0^1 |Q(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\int\limits_E |Q(x)-f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\int\limits_0^1 |Q(x)-H(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int\limits_E |H(x)-f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < \delta,$$

что доказывает п. 3 настоящей леммы. Далее, используя (2), (5) и условия 3, 5, для любого $p\in[1,2]$ получим

$$\left(\int\limits_0^1 |H(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\sum_{\nu=1}^{\mu_0}\int\limits_{\Delta_\nu}|H(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\sum_{\nu=1}^{\mu_0}\int\limits_{\Delta_\nu}|H_\nu(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

$$\le \left(\sum_{\nu=1}^{\mu_0}\left(C\frac{|\gamma_\nu|}{\varepsilon}+\beta\right)^p|\Delta_\nu|\right)^{1/p} \le \frac{2C}{\varepsilon}\left(\int\limits_0^1|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Отсюда и из (6), (7) следует, что при всех $p\in[1,2]$

$$\left(\int\limits_0^1 |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_0^1 |Q(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

$$\le \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_0^1 |Q(x)-H(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int\limits_0^1 |H(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

$$< \frac{4C}{\varepsilon}\left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

т. е. п. 4 имеет место с $B=4C$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ $a_k\downarrow 0$ с $\{a_k\}_{k=1}^\infty\notin l_2$ и числа $0<\varepsilon<1$, $p\in[1,2]$ фиксированы. Пронумеровав все полиномы Уолша с рациональными коэффициентами, можно представить их в виде последовательности

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty. \quad (9)$$

Применяя лемму 2, можно найти последовательности функции $\{g_n^{(j)}(x)\}_{j=1}^n$, $n \geq 1$, множеств $\{E_n^{(j)}\}_{j=1}^n$, $n \geq 1$, и полиномов вида

$$Q_n^{(j)}(x) = \sum_{k=2^{m_n^{(j-1)}}}^{2^{m_n^{(j)}}-1} \delta_k^{(n,j)} a_k W_k(x) \quad \bigl(\delta_k^{(n,j)} = \pm 1, 0\bigr), \tag{10}$$

где

$$M_n^{(j)} = 2^{m_n^{(j)}}, \quad 0 \leq M_1^{(0)} < M_1^{(1)} = M_2^{(0)} < M_2^{(1)} < M_2^{(2)}$$
$$< \cdots < M_{n-1}^{(n-1)} = M_n^{(0)} < M_n^{(1)} < \cdots < M_n^{(n)} = M_{n+1}^{(0)} < M_{n+1}^{(1)} \ldots, \tag{11}$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$g_n^{(j)}(x) = f_n(x) \quad \text{при } x \in E_n^{(j)}, \tag{12}$$

$$\bigl|E_n^{(j)}\bigr| = 1 - 2^{-j}, \tag{13}$$

$$\int_0^1 \bigl|Q_n^{(j)}(x) - g_n^{(j)}(x)\bigr|^2 dx < 2^{-4n}, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{14}$$

$$\bigl\|g_n^{(j)}(x)\bigr\|_p < B \cdot 2^j \|f_n\|_p, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{15}$$

Пусть $f(x) \in L^p[0,1]$. Положим $\lambda = \max\{1; \|f\|_p\}$. Нетрудно видеть, что можно выбрать последовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^\infty$ из последовательности (9) такую, что

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) - f(x) \right\|_p = 0, \tag{16}$$

$$\|f_{k_n}(x)\|_p \leq 4^{-2n}, \quad n \geq 2, \tag{17}$$

где

$$k_1 > j_0 = [\log_{\frac{1}{2}} \varepsilon] + 1. \tag{18}$$

Положим

$$Q_1(x) = Q_{k_1}^{(j_0+1)}, \quad E_1 = E_{k_1}^{(j_0+1)}, \quad g_1 = g_{k_1}^{(j_0+1)}.$$

Пусть определены числа $k_1 = \nu_1 < \cdots < \nu_{q-1}$, функции $f_{\nu_n}(x)$, $g_n(x)$, $1 \leq n \leq q-1$, множества E_n, $1 \leq n \leq q-1$, и полиномы

$$Q_n(x) = Q_{\nu_n}^{(n+j_0)}(x) = \sum_{k=M_{\nu_n}^{(n+j_0-1)}}^{M_{\nu_n}^{(n+j_0)}-1} \delta_k^{(\nu_n, n+j_0)} a_k W_k(x),$$

которые для всех $1 \leq n \leq q-1$ удовлетворяют следующим условиям:

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E_n, \tag{19}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n [Q_k(x) - g_k(x)] \right\|_p < 4^{-(n-1)}, \tag{20}$$

$$|E_n| > 1 - \varepsilon 2^{-n}, \tag{21}$$

$$\|g_n(x)\|_p < \frac{B\lambda}{\varepsilon} \cdot 2^{-(n-8)}, \tag{22}$$
$$\|f_{\nu_n}\|_p < \lambda \cdot 4^{-(n-3)},$$

где $B > 1$ — константа из леммы 2. Нетрудно видеть, что можно выбрать функцию $f_{\nu_q}(x)$ $(\nu_q > \nu_{q-1})$ из последовательности (9) таким образом, что

$$\int\limits_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right|^p dx < 4^{-2pq}. \tag{23}$$

В силу (17), (20) и (23) имеем

$$\|f_{\nu_q}\|_p \le \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right\|_p + \|f_{k_q}\|_p + \left\| \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right\|_p < \lambda \cdot 4^{-(q-3)}. \tag{24}$$

Положим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x) + \left[g_{\nu_q}^{(q+j_0)}(x) - f_{\nu_q}(x) \right], \tag{25}$$

$$Q_q(x) = Q_{\nu_q}^{(q+j_0)}(x) = \sum_{k=M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}}^{M_{\nu_q}^{(q+j_0)}-1} \delta_k^{(\nu_q, n+j_0)} a_k W_k(x), \tag{26}$$

$$E_q(x) = E_{\nu_q}^{(q+j_0)}. \tag{27}$$

Учитывая соотношения (12) и (27), получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E_q.$$

В силу (14) и (23)–(26) имеем

$$\left\| \sum_{j=1}^{q} [Q_j(x) - g_j(x)] \right\|_p = \left\| \sum_{j=1}^{q-1} [Q_j(x) - g_j(x)] + Q_q(x) - g_q(x) \right\|_p$$
$$\le \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right\|_p + \left\| g_{\nu_q}^{(q+j_0)} - Q_{\nu_q}^{(q+j_0)} \right\|_p < 4^{-(q-1)}.$$

Из (15), (20), (23)–(25) вытекает, что

$$\|g_q(x)\|_p \le \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right\|_p + \left\| \sum_{j=1}^{q-1} [(Q_j(x)) - g_j(x)] \right\|_p + \left\| g_{\nu_q}^{(q+j_0)} \right\|_p$$
$$< 4^{-2q} + 4^{-q+2} + B \cdot 2^{q+j_0} \|f_{\nu_q}(x)\|_p < \frac{B\lambda}{\varepsilon} \cdot 2^{-q+8}.$$

По индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$, множеств $\{E_q\}_{q=1}^{\infty}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}$, удовлетворяющих условиям (19)–(22) для всех $q \ge 1$. Положим

$$E = \bigcap_{q=1}^{\infty} E_q. \tag{28}$$

Из (21) вытекает, что $|E| > 1 - \epsilon$.

Далее, согласно (22) имеем

$$\left\| \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x) \right\|_p \le \sum_{q=1}^{\infty} \|g_q(x)\|_p < \infty. \tag{29}$$

Определим функцию $\tilde{f}(x)$ и последовательность чисел $\{\delta_k\}$ следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \tag{30}$$

$$\delta_k = \begin{cases} \delta_k^{(\nu_q, q+j_0)}, & k \in \left[M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}, M_{\nu_q}^{(q+j_0)}\right),\ q = 1, 2, \dots, \\ 0, & k \notin \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} \left[M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}, M_{\nu_q}^{(q+j_0)}\right). \end{cases}$$

Из (16), (19), (20), (22), (28)–(30) следует, что

$$\tilde{f}(x) \in L^p[0,1], \quad \tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in E,$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{q-1} Q_n(x) - \tilde{f}(x) \right\|_p \le \left\| \sum_{n=1}^{q-1} (Q_n(x) - g_n(x)) \right\|_p + \sum_{n=q}^{\infty} \|g_n(x)\|_p \le \frac{B\lambda}{\varepsilon} \cdot 2^{-(q-10)}$$

и тем самым (см. (26))

$$\delta_k a_k = \int_0^1 \tilde{f}(x) W_k(x)\, dx = c_n(\tilde{f}), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Теорема доказана.

Возникают следующие вопросы, ответы на которые нам не известны.

Вопрос 1. *Верна ли теорема в случае $p > 2$?*

Вопрос 2. *Верна ли теорема для тригонометрической системы?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. Ф., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. *Paley R. E. A. C.* A remarkable set of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc. 1932. V. 34. P. 241–279.
3. *Лузин Н. Н.* К основной теореме интегрального исчисления // Мат. сб. 1912. Т. 28, № 2. С. 266–294.
4. *Меньшов Д. Е.* О равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1942. Т. 53, № 2. С. 67–96.
5. *Grigorian M. G.* On the convergence of Fourier series in the metric of L^1 // Anal. Math. 1991. V. 17. P. 211–237.
6. *Григорян М. Г.* Нелинейная аппроксимация по тригонометрической системе в весовом пространстве L^p // Изв. НАН Армении. Сер. Мат. 2015. Т. 50, № 3. С. 3–21.
7. *Григорян М. Г., Гогян С. Л.* Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций // Анал. Мат. 2006. Т. 32. С. 49–80.
8. *Григорян М. Г., Галоян Л. Н., Кобелян А. Х.* О сходимости рядов Фурье по классическим системам // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 7. С. 55–94.
9. *Григорян М. Г., Навасардян К. А.* О поведении коэффициентов Фурье по системе Уолша // Изв. НАН Армении. Сер. Мат. 2016. Т. 51, № 1. С. 3–20.

10. *Григорян М. Г.* Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация // Мат. сб. 2012. № 3. С. 49–78.
11. *Навасардян К. А.* О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами // Изв. НАН Армении. Сер. Мат. 2007. Т. 42, № 5. С. 51–64.
12. *Grigorian M. G., Sargsyan A. A.* On the coefficients of expansion of elements from $C[0, 1]$ space by the Faber–Schauder system // J. Funct. Spaces Appl. 2011. V. 2. P. 34–42.
13. *Григорян М. Г., Кротов В. Г.* Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложения Фурье по системе Фабера — Шаудера // Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 2. С. 17–25.
14. *Навасардян К. А.* О нуль рядах по двойной системе Уолша // Изв. НАН Армении. Сер. Мат. 1994. Т. 29, № 1. С. 59–78.
15. *Геворкян Г. Г., Навасардян К. А.* О рядах Уолша с монотонными коэффициентами // Изв. РАН. 1999. Т. 632, № 1. С. 41–60.
16. *Галоян Л. Н.* О сходимости в метриках L^p средних Чезаро отрицательного порядка рядов Фурье — Уолша // Изв. НАН Армении. Сер. Математика. 2012. Т. 47, № 3. С. 35–54.
17. *Grigoryan M. G., Galoyan L. N.* On the uniform convergence of negative order Cesaro means of Fourier series // J. Math. Anal. Appl. 2016. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.09.001.

Статья поступила 30 сентября 2015 г.

Галоян Левон Николаевич, Меликбекян Размик Гегамович
Ереванский гос. университет,
кафедра высшей математики на физическом факультете,
ул. Алека Манукяна, 1, Ереван 0025, Армения
`levongaloyan@mail.ysu.am`, `melikbekyan@yahoo.com`