Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 514.764

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ ВАГНЕРА ДЛЯ СЛУЧАЯ МНОГООБРАЗИЯ С КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

С. В. Галаев

Аннотация. На многообразии с контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ вводится понятие N-продолженной связности (связности в векторном расслоении (D, π, X)), где N — эндоморфизм распределения D. Показывается, что тензор кривизны N-продолженной связности при подходящем выборе эндоморфизма N совпадает с тензором кривизны Вагнера.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.310

Ключевые слова: Почти контактная метрическая структура, N-продолженная связность, продолженная почти контактная метрическая структура, тензор кривизны Вагнера.

§ 1. Введение

К тензору кривизны Вагнера [1, 2] приводят условия интегрируемости тензорных дифференциальных уравнений для неголономного многообразия. В работе показано, что в случае контактного многообразия тензор кривизны Вагнера совпадает с тензором кривизны некоторой связности в векторном расслоении, пространством которого является распределение контактной структуры. В построении связности, называемой ниже N*-продолженной связностью*, участвует подходящий для этого эндоморфизм $N : D \to D$ распределения контактной структуры. Выбором эндоморфизма $N : D \to D$ обеспечивается возможность задания связности в векторном расслоении с нужными свойствами. Предлагаемая конструкция N-продолженной связности одновременно представляет собой метод наведения на пространстве расслоения (D, π, X) (продолженной) структуры почти контактного метрического пространства. Истоки используемых идей можно обнаружить в геометрии касательных расслоений.

Изучение геометрии касательных расслоений начинается с основополагающей работы Сасаки [3], опубликованной в 1958 г. Сасаки, используя риманову метрику g, заданную на гладком многообразии X, определяет риманову метрику G на касательном расслоении TX многообразия X. Конструкция Сасаки основана на естественном расщеплении (имеющем место благодаря существованию на римановом многообразии связности Леви-Чивиты) касательного расслоения TTX многообразия TX в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений, слои которых изоморфны слоям расслоения TX. Нечетным аналогом касательного расслоения является распределение D почти контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$. Так же, как и расслоение TTX, касательное расслоение TD благодаря заданию связности над распределением [4] (а затем и N-продолженной связности — связности в векторном расслоении (X, D)) расщепляется в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений. Как показано в [4, 5], на многообразии D естественным образом определяется почти контактная метрическая структура, позволяющая, например, придать инвариантный характер аналитическому описанию механики со связями. В [5] на многообразии D определяется геодезическая пульверизация связности над распределением, являющаяся аналогом геодезической пульверизации, которая задана на пространстве касательного расслоения TX, и имеющая ясную физическую интерпретацию: проекции интегральных кривых геодезической пульверизации связности над распределением совпадают с допустимыми геодезическими (траекториями движения механической системы со связями).

Предлагаемая работа посвящена развитию двух идей: обобщения конструкции Сасаки на случай нечетной размерности [3], а также продолжения внутренней связности.

Работа устроена следующим образом. В § 2 два пункта. В п. 2.1 содержатся краткие сведения о внутренней геометрии почти контактных метрических пространств. Более подробно соответствующий материал излагается в [6]. В п. 2.2 вводится понятие N-продолженной метрической связности. Внутренняя связность задает параллельный перенос допустимых векторов (т. е. векторов, принадлежащих распределению D) вдоль допустимых кривых. Всякая соответствующая ей N-продолженная связность является связностью в векторном расслоении (D, π, X), определяемой внутренней связностью и эндоморфизмом $N : D \to D$. От выбора эндоморфизма $N : D \to D$ зависят свойства продолженной связности, а также свойства (продолженной) почти контактной метрической структуры, возникающей на пространстве D векторного расслоения (D, π, X). Центральной в этом пункте является теорема о существовании и единственности N-продолженной метрической связности с нулевым кручением.

В § 3 на многообразии с почти контактной метрической структурой определяется N-связность. Исследуются простейшие свойства N-связности, в частности, указывается на отношение N-связности к N-продолженной связности.

В § 4 на многообразии D с продолженной метрической связностью определяется продолженная почти контактная метрическая структура. Приводятся некоторые свойства продолженной почти контактной метрической структуры.

§ 2. Внутренняя и N-продолженная связности

2.1. Основные сведения из внутренней геометрии почти контактных метрических пространств. Пусть X — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ и ΓTX — $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей на X. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. *Почти контактной метрической структурой на* X называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X, где φ — тензор типа $(1, 1)$, называемый *структурным эндоморфизмом,* $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно *структурным вектором* и *контактной формой,* g — (псевдо)риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1, \quad \varphi(\vec{\xi}) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \varphi^2 \vec{X} = -\vec{X} + \eta(\vec{X})\vec{\xi},$$

$$g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}), \quad d\eta(\vec{X}, \vec{\xi}) = 0, \quad \vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma TX.$$

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{X},\vec{Y}) = g(\vec{X},\varphi\vec{Y})$ называется *фундаментальной формой структуры.* Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием.* В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется *контактной метрической структурой.* Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если $N_\varphi + 2d\eta\otimes\vec{\xi} = 0$, где N_φ — кручение Нейенхейса, образованное тензором φ. Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой структурой.* Многообразие с заданной на нем сасакиевой структурой называется *сасакиевым многообразием.* Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, и $D^\perp = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$ — его оснащение. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$ и называется *вектором Риба.*

Будем называть почти контактную метрическую структуру *почти нормальной*, если выполняется условие

$$N_\varphi + 2(d\eta\circ\varphi)\otimes\vec{\xi} = 0. \tag{1}$$

Почти нормальное почти контактное метрическое пространство в дальнейшем назовем *почти контактным кэлеровым пространством*, если его фундаментальная форма замкнута. Почти контактное метрическое пространство назовем *почти K-контактным метрическим пространством*, если $L_{\vec{\xi}}g = 0$. Последнее равенство чаще используется в случае, когда форма ω имеет максимальный ранг, тогда соответствующее пространство называют *K-контактным.*

Почти нормальная контактная метрическая структура очевидным образом является сасакиевой структурой. Сасакиевы пространства пользуются большой популярностью у исследователей почти контактных метрических пространств по двум основным причинам. С одной стороны, существует большое количество интересных и содержательных примеров сасакиевых структур, с другой стороны, многообразия Сасаки обладают очень важными и естественными свойствами. В тоже время почти контактные кэлеровы пространства наследуют ряд важных свойств сасакиевых пространств, что оказывается очень существенным в тех случаях, когда почти контактное метрическое пространство в принципе не может быть сасакиевым пространством [6].

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha,\beta,\gamma = 1,\ldots,n;\ a,b,c,e = 1,\ldots,n-1)$ многообразия X будем называть *адаптированной к неголономному многообразию D*, если $D^\perp = \mathrm{Span}\big(\frac{\partial}{\partial x^n}\big)$ [6]. Пусть $P: TX \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D\oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = \mathrm{Span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_a,\partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $\big(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a\big)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a\vec{e}_b] = M^n_{ab}\partial_n$, где компоненты M^n_{ab} образуют так называемый тензор неголономности [2]. Если потребовать, чтобы во всех используемых адаптированных картах выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то, в частности, окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a\vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$. *Адаптированным* будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n\Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда при условии, что $\vec{\xi} = \partial_n$, получаем следующие формулы преобразования координат: $x^\alpha = x^\alpha(x^{\alpha'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'})$.

Тензорное поле типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем *допустимым* (к распределению D), если его координатное представление в адаптированной карте имеет вид

$$t = t^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа $(1, 1)$. Поле аффинора φ, учитывая его свойства, называем *допустимой почти комплексной структурой.* Форму $\omega = d\eta$, также являющуюся допустимой формой, уместно в таком случае назвать *допустимой симплектической формой.*

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону: $t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'}$, где $A^a_{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$.

Замечание 1. Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ являются вновь компонентами допустимого тензорного поля. Кроме того, обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат. Последнее обстоятельство подкрепляется тем фактом, что $(L_{\vec{\xi}} t)^a_b = \partial_n t^a_b$.

Замечание 2. Допустимую тензорную структуру, для которой выполняется равенство $\partial_n t^a_b = 0$, будем называть *проектируемой* (в литературе можно встретить и другие термины, обращенные к структурам с подобным свойством: «базисные», «полубазисные» и т. д.). Как будет следовать из дальнейшего, допустимые проектируемые структуры естественным образом могут рассматриваться как структуры, заданные на многообразии меньшей размерности.

Используя адаптированные координаты, введем следующие допустимые тензорные поля:

$$h^a_b = \frac{1}{2}\partial_n \varphi^a_b, \quad C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}, \quad C^a_b = g^{da} C_{db}, \quad \psi^b_a = g^{da}\omega_{da}.$$

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора g: $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид*

$$\widetilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \quad \widetilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \widetilde{\Gamma}^b_{an} = \widetilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a - \psi^b_a,, \quad \widetilde{\Gamma}^n_{na} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}^a_{nn} = 0,$$

где

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

2.2. N-продолженная метрическая связность. Под внутренней линейной связностью на многообразии с почти контактной метрической структурой [6] понимается отображение $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \to \Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1 \vec{u_1} + f_2 \vec{u_2}} = f_1 \nabla_{\vec{u_1}} + f_2 \nabla_{\vec{u_2}}$,

2) $\nabla_{\vec{u}} f \vec{v} = f \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u} f)\vec{v}$,

где ΓD — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определятся из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$.

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{X},\vec{Y})=\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}-\nabla_{\vec{Y}}\vec{X}-P[\vec{X},\vec{Y}]$. Таким образом, в адаптированных координатах имеем $S^c_{ab}=\Gamma^c_{ab}-\Gamma^c_{ba}$.

Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Важным примером внутренней линейной связности является внутренняя метрическая связность, однозначно определяемая условиями $\nabla g=0$, $S=0$ [2]. В адаптированных координатах имеем

$$\Gamma^a_{bc}=\frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc}). \tag{2}$$

Заметим, что $\Gamma^a_{bc}=\widetilde{\Gamma}^a_{bc}$ (см. теорему 1).

Так же, как и связность в объемлющем пространстве, внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает распределение D. Говорят, что над распределением D *задана связность*, если $\widetilde{D}=\pi_*^{-1}(D)$, где $\pi: D\to X$ разбивается в прямую сумму вида $\widetilde{D}=HD\oplus VD$, VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, сопоставив каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X сверхкарту $\widetilde{K}(x^\alpha,x^n+a)$ на многообразии D, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a=\partial_a-\Gamma^n_a\partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть *адаптированной.* Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(x^\alpha,x^{n+a})$ такого, что $HD=\operatorname{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a=\partial_a-\Gamma^n_a\partial_n-G^b_a\partial_{n+b}$. В случае, когда $G^a_b(x^a,x^{n+a})=\Gamma^a_{bc}(x^a)x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. В [4] введено понятие продолженной связности. Продолженная связность всегда рассматривается относительно некоторой связности над распределением и определяется разложением $TD=\widetilde{HD}\oplus VD$, где $HD\subset\widetilde{HD}$. Продолженная связность является связностью в векторном расслоении. Как следует из определения продолженной связности, для ее задания (при условии уже существующей связности над распределением) достаточно задать векторное поле $\vec{u}$ на многообразии D, имеющее координатное представление $\vec{u}=\partial_n-N^a_b x^{n+b}\partial_{n+a}$, где эндоморфизм $N: D\to D$ может быть выбран произвольно. Будем называть *кручением продолженной связности* кручение исходной внутренней связности. В дальнейшем продолженную связность будем называть *N-продолженной связностью.*

В [2] допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{u},\vec{v})\vec{w}=\nabla_{\vec{u}}\nabla_{\vec{u}}\vec{w}-\nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{u}}\vec{w}-\nabla_{p[\vec{u},\vec{v}]}\vec{w}-p[q[\vec{u},\vec{v}]\vec{w}],$$

названо Вагнером *первым тензором кривизны Схоутена.* Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид $R^d_{abc}=2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c}+2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}$. В случае, когда распределение D не содержит интегрируемого распределения размерности $n-2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [2]. Назовем тензор Схоутена *тензором кривизны распределения* D, а распределение D в случае обращения в нуль тензора Схоутена — *распределением нулевой кривизны.* Нетрудно установить, что частные производные $\partial_n\Gamma^a_{bc}=P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля [2].

Замечание 3. Для (почти) K-контактных пространств тензор кривизны Схоутена наделен теми же свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае это не так.

Векторные поля $\big(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - G^a_n \partial_{n+a}, \partial_{n+a}\big)$ определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $\big(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} dx^b + N^a_b x^{n+b} dx^n\big)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + x^{n+d}\big(2\omega_{ba} N^c_d + R^c_{bad}\big)\partial_{n+c}, \tag{3}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d}\big(\partial_n \Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d\big)\partial_{n+c}, \tag{4}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab}\partial_{n+c}. \tag{5}$$

Из (3), (4) следует выражение для тензора кривизны продолженной связности:

$$K(\vec{u}, \vec{v})\vec{w} = 2\omega(\vec{u}, \vec{v}) N \vec{w} + R(\vec{u}, \vec{v})\vec{w}, \tag{6}$$

$$K(\vec{\xi}, \vec{u})\vec{v} = P(\vec{u}, \vec{v}) - (\nabla_{\vec{u}} N)\vec{v}, \tag{7}$$

где $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$.

Теорема 2. *Существует N-продолженная метрическая связность, однозначно определяемая следующими условиями:*

1) $\vec{Z} g(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\nabla_{\vec{Z}} \vec{X}, \vec{Y}) + g(\vec{X}, \nabla_{\vec{Z}} \vec{Y})$ *(свойство метричности),*
2) $\nabla_{\vec{X}} \vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}} \vec{X} - p[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$ *(отсутствие кручения),*
3) N *— симметрический оператор такой, что*

$$g(N\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{2} L_{\vec{\xi}}\, g(\vec{X}, \vec{Y}), \tag{8}$$

где $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \Gamma D$ *— сечения распределения* D, $P : TX \to D$ *— проектор.*

Доказательство. Первые два условия теоремы однозначно определяют внутреннюю метрическую связность [2]. Альтернируя вторую ковариантную производную, получаем $\nabla_{[e}\nabla_{a]} g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc} R^d_{eab} - g_{bd} R^d_{eac}$.

Сравнивая полученный результат с (8), находим явное выражение для эндоморфизма N:

$$N^f_b = \frac{1}{4(n-1)}\omega^{ea}\big(R^f_{eab} + g_{bd} g^{cf} R^d_{eac}\big).$$

Если $\partial_n g_{ab} = 0$, то полагаем $N = 0$. Тем самым теорема доказана.

Будем называть N-продолженную связность, наделенную свойствами теоремы 2, *N-продолженной метрической связностью.*

Будем использовать следующее обозначение для продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$. В частном случае $\nabla^1 = (\nabla, 0)$. Не требуя выполнения условия (8) и сопоставляя равенство $\nabla_{[e}\nabla_{a]} g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc} R^d_{eab} - g_{bd} R^d_{eac}$ с равенством $\nabla_n g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac}$, заключаем, что справедлива

Теорема 3. *Тензор кривизны Вагнера совпадает с тензором кривизны N-продолженной метрической связности при условии, что* $N^d_b = \frac{1}{4(n-1)}\omega^{ca} R^d_{cab}$.

§ 3. Специальные связности на многообразиях с почти контактной метрической структурой

Э. Картан (см. [7–9]) первым рассмотрел линейную метрическую связность с кручением вместо связности Леви-Чивиты. Наибольшим интересом среди метрических связностей с кручением пользуется полусимметрическая связность, систематическое исследование которой проведено Яно в [10]. Четвертьсимметрическая связность определена в 1975 г. Голабом [11]. Большое количество работ посвящено как метрическим, так и неметрическим связностям с кручением, заданным на многообразиях с почти контактной метрической структурой. Остановимся здесь лишь на работе Бежанку [12]. В ней определяется связность ∇^B на многообразии Сасаки с помощью формулы

$$\nabla^B_{\vec{X}} = \widetilde{\nabla}_{\vec{X}}\vec{Y} - \eta(\vec{X})\widetilde{\nabla}_{\vec{Y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{Y})\widetilde{\nabla}_{\vec{X}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{X},\vec{Y})\vec{\xi}.$$

В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются $\Gamma^{Ba}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической в более общем случае почти контактной метрической структуры, чем структура Сасаки. Действительно, так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна почти K-контактности почти контактной метрической структуры. Определим на многообразии с почти контактной метрической структурой связность ∇^N с помощью равенства $\nabla^N_{\vec{X}} = \nabla^B_{\vec{X}}\vec{Y} + \eta(\vec{X})N\vec{Y}$, где N — эндоморфизм из теоремы 2. Назовем введенную связность *N-связностью.* Отличными от нуля компонентами N-связности самое большее будут

$$\Gamma^{Na}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}), \quad \Gamma^{Na}_{nc} = N^a_c.$$

Кручение N-связности определяется равенством

$$S^N(\vec{X},\vec{Y}) = 2\omega(\vec{X},\vec{Y})\vec{\xi} + \eta(\vec{X})N\vec{Y} - \eta(\vec{Y})N\vec{X}$$

. Непосредственными вычислениями в адаптированных координатах проверяется справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. *N-связность является метрической связностью.*

§ 4. *N*-продолженная связность как почти контактная метрическая структура

Пусть на многообразии X задана контактная метрическая структура $(D, \varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X)$. Определим на распределении D как на гладком многообразии почти контактную метрическую структуру $(\widetilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$, полагая

$$\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b), \quad \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{u}, \partial_{n+b}) = 0,$$

$$J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}, \quad J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a.$$

Векторные поля $\left(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_{ac}x^{n+c}\partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - G^a_n\partial_{n+a}, \partial_{n+a}\right)$ определяются здесь продолженной связностью. Полученную структуру будем называть *продолженной почти контактной метрической структурой.* Пусть $\widetilde{\omega} = d\lambda$. Непосредственно проверяется, что отличные от нуля компоненты формы $\widetilde{\omega}$ определяются равенствами $\widetilde{\omega}_{ab} = \omega_{ab}$. Таким образом, $\mathrm{rk}\,\widetilde{\omega} = \frac{n-1}{2}$. Отсюда, в частности, следует, что построенная структура не является контактной и, в частности, структурой Сасаки.

Теорема 5. *Продолженная почти контактная метрическая структура является почти K-контактной тогда и только тогда, когда исходная структура K-контактна.*

Доказательство. Ненулевые компоненты производной Ли $L_{\vec{u}}\tilde{g}$ в адаптированных координатах имеют следующий вид:

$$(L_{\vec{u}}\tilde{g})_{ab} = \partial_n g_{ab}, \tag{9}$$

$$(L_{\vec{u}}\tilde{g})_{n+a,n+b} = \partial_n g_{ab} - g_{ac}N_b^c - -g_{cb}N_a^c, \tag{10}$$

$$(L_{\vec{u}}\tilde{g})_{n+a,b} = g_{ac}\big(P_{bd}^c - \nabla_b N_d^c\big)x^{n+d}. \tag{11}$$

На самом деле компоненты (10) также равны нулю как компоненты ковариантной производной от метрического тензора. Равенство $\partial_n g_{ab} = 0$ влечет два других: $N_d^c = 0$, $P_{bd}^c = 0$ (см. (9) и (11)), что и доказывает теорему.

Пусть исходная структура K-контактна ($N = 0$), тогда имеет место

Теорема 6. *Почти контактная метрическая структура $(\widetilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ почти нормальна тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.*

Доказательство. Перепишем равенство (1) в новых обозначениях:

$$N_J + 2(d\tilde{\eta} \circ J) \circ \vec{u} = 0.$$

В [6] доказано, что почти контактная структура почти нормальна тогда и только тогда, когда $\widetilde{P} \circ N_J = 0$, где $\widetilde{P} : TD \to \widetilde{D}$ — проектор. Воспользовавшись равенствами (3)–(5) в случае связности ∇^1, получаем следующие выражения для компонент тензора Нейенхейса аффинора J:

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = -R_{abc}^e x^{n+c}\partial_{n+e},$$

$$N_J(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = 2\omega_{ba} + R_{abc}^e x^{n+c}\partial_{n+e},$$

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = 0,$$

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = N_J(\partial_{n+a}, \partial_n) = -x^{n+c}P_{ac}^b\partial_{n+b}.$$

Таким образом, продолженная почти контактная метрическая структура почти нормальна тогда и только тогда, когда обращаются в нуль тензор кривизны Схоутена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вагнер В. В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий: VIII Междунар. конкурс им. Н. И. Лобачевского (1937): отчет. Казань: Казан. физ.-мат. о-во, 1940.
2. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Т. 5. С. 173–255.
3. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1958. N 10. P. 338–354.
4. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 3. С. 17–22.
5. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Математика. 2013. № 4. С. 1–9.
6. *Галаев С. В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 12, № 1. С. 16–22.

7. *Cartan E.* Sur les varietes à connexion affine et la theorie de la relative. I // Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 1923. V. 40. P. 325–412.
8. *Cartan E.* Sur les varietes à connexion affine et la theorie de la relative generalisee. I // Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 1924. V. 41. P. 1–25.
9. *Cartan E.* Sur les varietes à connexion affine et la theorie de la relative generalisee. II // Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 1925. V. 42. P. 17–88.
10. *Yano K.* On semi-symmetric metric connections // Revue Roum. Math. Pures Appl. 1970. V. 15. P. 1579–1586.
11. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor New Ser. 1975. V. 29. P. 249–254.
12. *Bejancu A.* Kähler contact distributions // J. Geom. Phys. 2010. V. 60. P. 1958–1967.

Статья поступила 12 апреля 2015 г.

Галаев Сергей Васильевич
Саратовский гос. университет им. Н. Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410012
sgalaev@mail.ru