Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 517.518.366

НЕРАВЕНСТВА ТИПА СИДОНА И СИЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С. С. Волосивец, Т. В. Лихачева

Аннотация. Для систем характеров групп Виленкина получены неравенства типа Сидона, обобщающие результаты Морица и Авдиспахича — Пепича. Даны их приложения к теории сильной аппроксимации функций рядами по системам характеров. Полученные результаты являются аналогами тригонометрических результатов Тотика, Лейндлера, Немета и Сиддики.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.309

Ключевые слова: система характеров, неравенство типа Сидона, сильная аппроксимация, классы Гёльдера.

1. Введение

Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \le p_n \le N$ при $n \in \mathbb{N}$. Пусть также $\mathbb{Z}(p_j) = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$ — циклическая группа порядка p_j со сложением по модулю p_j, $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Определим $G(\mathbf{P})$ как прямое произведение $\mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, с операцией $\oplus$, мерой Хаара μ и топологией, соответствующими прямому произведению. Элементами G являются последовательности $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, где $x_k \in \mathbb{Z}(p_k)$, $n \in \mathbb{N}$. Важную роль при этом играют подгруппы $G_n = \{x \in G : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$ (считаем, что $G_0 = G$), и смежные классы $G_n(y) = y \oplus G_n = \{x \in G : x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n\}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $y \in G$. Известно, что $G_n(y)$ одновременно открыты и компактны. Мера $\mu(G_n(y))$ равна m_n^{-1} при $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналоги функций Радемахера на группе G задаются формулами $r_k(x) = \exp(2\pi i x_k/p_k)$. Если

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \quad n_k \in \mathbb{Z}(p_k), \tag{1}$$

есть P-ичное представление $n \in \mathbb{Z}_+$, то по определению $\chi_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} r_k^{n_k}(x)$, $x \in G$. На самом деле в формуле (1) произведение конечно. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, называемая *системой характеров группы* G, ортонормирована на G и полна в $L^1(G)$.

Для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in G$ имеют место равенства

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y), \quad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}, \tag{2}$$

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K).

где $\ominus$ — операция, обратная к $\oplus$. Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, 3].

Введем коэффициенты Фурье функции $f \in L^1(G)$, ядро Дирихле и частную сумму Фурье по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$\hat{f}(n) = \int_G f(t)\overline{\chi_n(t)}\,dt,\ n \in \mathbb{Z}_+; \quad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x),\ n \in \mathbb{N};$$

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пространства $L^p(G)$, $1 \le p < \infty$, рассматриваются с нормами

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f(x)^p\,d\mu(x)|\right)^{1/p}.$$

Пространство $C(G)$ непрерывных на G функций снабжено нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in G}|f(x)|$. Эти пространства $X(G) = C(G)$, $L^p(G)$, $1 \le p < \infty$, однородны в следующем смысле:

1) множество $\mathscr{P}$ полиномов по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ содержится и плотно в $X(G)$;

2) для $f \in X(G)$ справедливы включение $f \in L^1(G)$ и неравенство $\|f\|_1 \le C\|f\|_X$, где C не зависит от f;

3) для любых $f \in X(G)$ и $h \in G$ верны включение $f(\cdot \oplus h) \in X(G)$ и равенство $\|f\|_X = \|f(\cdot \oplus h)\|_X$.

Как установлено в [2, гл. 4, лемма 1] в двоичном случае, для функции f, принадлежащей однородному пространству $X(G)$, и $g \in L^1(G)$ их свертка

$$f * g(x) = \int_G f(x \ominus t)g(t)\,d\mu(t)$$

существует в $X(G)$, при этом

$$\|f * g\|_X \le \|f\|_X\|g\|_1. \tag{3}$$

Пусть $\mathscr{P}_n = \{f \in L^1(G) : \hat{f}(k) = 0, k \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Введем модуль непрерывности и наилучшее приближение для $f \in C(G)$ равенствами

$$\omega_n(f)_\infty = \sup_{h\in G_n} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+;$$

$$E_n(f)_\infty = \inf\{\|f - t_n\|_\infty : t_n \in \mathscr{P}_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для $f \in C(G)$ известны неравенства А. В. Ефимова [3, гл. 10, § 10.5]

$$E_{m_n}(f)_\infty \le \|f - S_{m_n}(f)\|_\infty \le \omega_n(f)_\infty \le 2E_{m_n}(f)_\infty. \tag{4}$$

Пусть $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ — убывающая к нулю последовательность положительных чисел. Введем пространство $H^\omega(G) = \{f \in C(G) : \omega_n(f)_\infty \le C\omega_n,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ с нормой

$$\|f\|_{\infty,\omega} = \|f\|_\infty + \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \omega_n(f)_\infty/\omega_n,$$

относительно которой оно банахово.

Следуя Хе Зелину [4], рассмотрим ядро $T_r^{(\alpha)} = \sum\limits_{i=0}^{m_r-1} i^\alpha \chi_i$, $\alpha > 0$. Если $f \in C(G)$ и последовательность $T_r^{(\alpha)} * f$ имеет предел g в $C(G)$ при $r \to \infty$, то будем считать, что существует обобщенная производная $f^{[\alpha]} = g$ в $C(G)$. Если существует $f^{[\alpha]} \in H^\omega$, то $f \in W^\alpha H^\omega$.

По последовательности $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$, убывающей к нулю, можно построить функцию $\omega(x)$ на $[0,1)$: $\omega(1/m_n) = \omega_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\omega(x)$ линейна на $[1/m_n, 1/m_{n-1}]$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что если $\omega_n \le C\omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то $\omega(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию: $\omega(2t) \le C_1\omega(t)$, $t \in (0, 1/2)$.

Будем писать $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty \in B$, если $\sum\limits_{k=n}^\infty \omega_k \le C\omega_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\omega \in B_\alpha$, $\alpha > 0$, если $\sum\limits_{k=0}^n m_k^\alpha \omega_k \le C m_n^\alpha \omega_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Легко видеть, что условие $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty \in B$ равносильно условию

$$\sum_{k=n}^\infty k^{-1}\omega(k^{-1}) \le C\omega(n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\omega(t)$ строится по $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$, как указано выше. Аналогично условие $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty \in B_\alpha$, $\alpha > 0$, равносильно условию

$$\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1}\omega(1/k) \le Cn^\alpha\omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Неравенства типа Сидона играют важную роль в теории интегрируемости и L^1-сходимости рядов по ортонормированным системам. Хороший обзор на эту тему содержится в работе Фридли [5]. В случае рядов по характерам групп отметим следующий результат.

Теорема А. *Пусть* $1 < p \le 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\{a_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\left\|\sum_{i=0}^{n-1} a_i D_{i+1}(x)\right\|_1 \le C(p)n^{1/q}\left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p\right)^{1/p}.$$

Для $p_i = 2$, т. е. для системы Уолша, теорема А установлена Морицем и Шиппом [6]. В более общем случае групп с не обязательно ограниченной образующей последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ Авдиспахичем и Пепичем [7] она установлена в менее точном виде, который совпадает с теоремой А для сумм вида $\sum\limits_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} a_i D_{i+1}(x)$. Мориц [8] в случае $p_i = 2$ для системы Уолша на $[0,1)$ оценил интеграл $\int\limits_\gamma^1 \left|\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i D_{i+1}(x)\right| dx$. Мы доказываем аналог последнего результата в теореме 1, а затем применяем его для оценки L^1 нормы более общих сумм $\sum\limits_{i=1}^r a_i D_{k_i}$ (теорема 2).

С теорией сильной аппроксимации сумм тригонометрических рядов можно познакомиться по монографии Лейндлера [9]. Для сильных средних Валле-Пуссена известен следующий результат.

Теорема B. *Пусть* $\lambda_n \in \mathbb{Z} \cap [1, n]$, $n = O(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in C_{2\pi}$ *(т. е.* f *есть* 2π*-периодическая непрерывная функция) и* $p > 0$, $S_k^T(f)$ *— частные суммы ряда Фурье* f*. Тогда*

$$\left(\lambda_n^{-1} \sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} \left|S_k^T(f)(x)\right|^p\right)^{1/p} = O(\|f\|_{C_{2\pi}}),$$

$$\left(\lambda_n^{-1} \sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} \left|S_k^T(f)(x) - f(x)\right|^p\right)^{1/p} = O\big(E_{n-\lambda_n}^T(f)_\infty\big),$$

где $E_n^T(f)_\infty$ *— наилучшее приближение тригонометрическими полиномами порядка не выше* n *по равномерной норме.*

Теорему B можно рассматривать как частный случай теоремы 1.1 из [9, гл. 1]. Аналог теоремы B для мультипликативных систем на $[0, 1)$ доказан авторами [10]. Тотик [11] получил оценку

$$\left(r^{-1} \sum_{i=1}^{r} \left|S_{k_i}^T(f)(x) - f(x)\right|^p\right)^{1/p} = O\big(E_{k_1}^T(f)_\infty \log(2n/r)\big), \tag{5}$$

где $0 < k_1 < \dots < k_r \le n$. Он же в [12] обобщил теорему B следующим образом.

Теорема C. *Пусть* $\Phi(t)$ *— непрерывная возрастающая на* $[0, \infty)$ *функция такая, что* $\Phi(0) = 0$*. Чтобы неравенство*

$$n^{-1} \sum_{k=n+1}^{2n} \Phi\left(\left|S_k^T(f)(x) - f(x)\right|\right) \le K\Phi\big(E_n^T(f)_\infty\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

было верно для любой $f \in C_{2\pi}$*, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого* $A > 0$ *выполнялись следующие условия:*

1) $\Phi(t) \le e^{At}$, $t \in (0, \infty)$;

2) $\Phi(2t) \le A\Phi(t)$, $t \in (0, 1)$.

В настоящей работе устанавливаем аналоги (5) и теоремы C в части достаточности. Кроме того, приводятся теоремы о характеризации классов $W^\alpha H^\omega$ при помощи сильных средних Валле-Пуссена и степенных сильных средних.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 [1, гл. 4, § 3]. 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$*. Тогда для* $x \in G_k \backslash G_{k+1}$ *справедливо неравенство* $|D_n(x)| \le m_{k+1}$.

2. *При* $n \in \mathbb{Z}_+$ *и* $x \in G$ *справедлива формула* $D_{m_n}(x) = m_n X_{G_n}(x)$*, где* X_E *— характеристическая функция множества* E.

3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *записано в виде* (1)*. Тогда*

$$D_n(t) = \chi_n(t) \left(\sum_{i=1}^{\infty} D_{m_{i-1}}(t) \sum_{l=1}^{n_i} \chi_{m_{i-1}}^{-l}(t)\right), \quad t \in G.$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in C(G)$, $V_n(f) = n^{-1} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} S_k(f)$. *Тогда*

$$\|f - V_n(f)\|_\infty \le C E_{n+1}(f)_\infty.$$

Доказательство. Ясно, что $V_n(f) = f * (2F_{2n} - F_n)$, где $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} D_k/n$. Известно, что $\|F_n\|_1 = O(1)$ (см. [1, гл. 4, § 10]) и что $S_k(t_{n+1}) = t_{n+1}$ при $k \ge n+1$ и $t_{n+1} \in \mathscr{P}_{n+1}$. Пусть $t_{n+1} \in \mathscr{P}_{n+1}$ таков, что $E_{n+1}(f)_\infty = \|f - t_{n+1}\|_\infty$, тогда с учетом (3) имеем

$$\|f - V_n(f)\|_\infty \le \|f - t_{n+1}\|_\infty + \|V_n(t_{n+1}) - V_n(f)\|_\infty \le C_1 E_{n+1}(f)_\infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. 1. *Пусть* $a_n \ge 0$ *и* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k = O(\omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$, *где* ω *построено согласно введению по* $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow 0$. *Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$$

принадлежит H^ω.

2. *Пусть* $a_n \ge 0$ *и сумма* $f(x)$ *ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ *конечна для всех* $x \in G$. *Если* $\omega_n \le C\omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и* $f \in H^\omega$, *то*

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O(\omega(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. 1. Так как $\|\chi_k\|_\infty = 1$, то

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{m_n - 1} a_k \chi_k \right\|_\infty \le \sum_{k=m_n}^{\infty} a_k \le C_1 \omega(1/m_n) = C_1 \omega_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда в силу (4) $\omega_n(f) \le 2C_1\omega_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, т. е. $f \in H^\omega$.

2. Пусть $n \in [m_i, m_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Тогда согласно неравенству А. В. Ефимова (4)

$$E_n(f)_\infty \le E_{m_i}(f)_\infty \le \omega_i(f)_\infty \le C_2\omega_i \le C_3\omega_{i+1} \le C_3\omega(1/n).$$

Поскольку $\|\chi_k\|_\infty = \chi_k(0) = 1$, из $f \in H^\omega$ и того, что коэффициенты Фурье функции $f - V_n(f)$ неотрицательны, по лемме 2 вытекает неравенство

$$C_3\omega(1/n) \ge E_n(f)_\infty \ge C_4 \|f - V_n(f)\|_\infty$$
$$= C_4 \left(\sum_{k=n+1}^{2n-1} (k-n) a_k/n + \sum_{k=2n}^{\infty} a_k \right) \ge C_4 \sum_{k=2n}^{\infty} a_k.$$

В силу условия $\omega_n \le C_5\omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, легко видеть, что $\omega(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию $\omega(2x) \le C_5^2 \omega(x)$, $x \in [0, 1/2]$. Поэтому

$$\sum_{k=2n}^{\infty} a_k \le C_6 \omega(1/2n), \quad n \in \mathbb{N},$$

и аналогично доказывается, что
$$\sum_{k=2n-1}^{\infty} a_k \le C_7\omega(1/(2n-1)), \quad n\in\mathbb{N}.$$
Эти неравенства устанавливают утверждение 2. Лемма доказана.

Будем рассматривать сильные средние степенного типа
$$\sigma_n(f,r,\beta) := \left(n^{-\beta}\sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1}|f(x)-S_k(f)(x)|^r\right)^{1/r}.$$
В [9] содержится много результатов, посвященных их тригонометрическим аналогам.

Лемма 4. *Пусть $f\in C(G)$, $\beta>0$, $r\ge 1$. Тогда*
$$|\sigma_n(f,r,\beta)(x)| \le C\left(n^{-\beta}\sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1}E_k^r(f)_\infty\right)^{1/\beta}. \tag{6}$$

Доказательство. Из теоремы 3.3 в [10] вытекает, что если $a_{n,k}\ge 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k}=1$ и $\{a_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ убывают по k, то
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}|f(x)-S_k(f)(x)|^r\right)^{1/r} \le C_1\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}E_k^r(f)_\infty\right)^{1/r}, \quad n\in\mathbb{N}.$$
Далее, пусть $a_{n,k}=k^{\beta-1}/n^\beta$. Так как $\{a_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ убывает при $\beta<1$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k}\le C_2$, утверждение доказано при $0<\beta<1$. При $\beta\ge 1$ последовательность $\{a_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ возрастает по k и в этом случае по теореме 3.1 из [10]
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}|f(x)-S_k(f)(x)|^r\right)^{1/r}$$
$$\le C_3\left(\sum_{k=0}^{[\log_2 n]-1} 2^k a_{n,2^{k+1}}E_{2^k}^r(f)_\infty + n a_{n,n}E_{[(n+1)/2]}^r(f)_\infty\right)^{1/r}.$$
Учитывая неравенства вида
$$2^k a_{n,2^{k+1}}E_{2^k}^r(f)_\infty \le 2\cdot 4^{\beta-1}\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} a_{n,i}E_i^r(f)_\infty, \quad k\ge 1,$$
и равенство $a_{n,2}E_1^r(f)_\infty = 2^{\beta-1}a_{n,1}E_1^r(f)_\infty$, легко получаем (6) в случае $\beta\ge 1$. Лемма доказана.

Лемма 5. 1. *Пусть $\alpha>0$ и $f\in C(G)$ такова, что существует $f^{[\alpha]}\in C(G)$. Тогда $\omega_n(f)_\infty \le C\omega_n(f^{[\alpha]})_\infty m_n^{-\alpha}$.*

2. *Пусть $\alpha>0$ и $f\in C(G)$ такова, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}E_n(f)_\infty$. Тогда существует $f^{[\alpha]}\in C(G)$ и*
$$E_n(f^{[\alpha]})_\infty \le C(n^\alpha E_n(f)_\infty + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\alpha-1}E_k(f)_\infty).$$

П. 1 леммы 5 установлен в [4], п. 2 доказывается аналогично доказательству теоремы 3 в [13].

Лемма 6. *Пусть* $\beta > 0$, $r \geq 1$, $f \in C(G)$. *Тогда* $E_n(f)_\infty \leq C\|\sigma_n(f,r,\beta)\|_\infty$.

Доказательство. Ясно, что

$$E_n(f)_\infty \leq \left\| f - \sum_{k=[n/2]+1}^{n} S_k(f)/(n-[n/2]) \right\|_\infty \leq \left\| \frac{2}{n} \sum_{k=[n/2]+1}^{n} |f - S_k(f)| \right\|_\infty$$
$$\leq C_1 \left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=[n/2]+1}^{n} |f - S_k(f)|^r \right)^{1/r} \right\|_\infty =: \gamma_n.$$

Но $1/n \leq C_2 k^{\beta-1}/n^\beta$ при $[n/2]+1 \leq k \leq n$, поэтому

$$\gamma_n \leq C_3 \left\| \left(n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} |f - S_k(f)|^r \right)^{1/r} \right\|_\infty,$$

откуда следует неравенство леммы. Лемма доказана.

3. Неравенства типа Сидона

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\{a_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{C}$. *Тогда для любых* $r, n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{G\setminus G_r} \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k D_{k+1}(x) \right| d\mu(x) \leq C(p) m_r^{1/q} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Доказательство. Запишем

$$\int\limits_{G\setminus G_r} \left| \sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} a_k D_{k+1}(x) \right| d\mu(x) = \sum_{s=0}^{r-1} \int\limits_{G_s\setminus G_{s+1}} \left| \sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} a_k D_{k+1}(x) \right| d\mu(x) =: \sum_{s=0}^{r-1} F_s.$$

Если $r \geq j+1$, то в силу очевидного неравенства $|D_{k+1}(t)| \leq k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $t \in G$, и неравенства Гёльдера находим

$$R_j := \sum_{s=j}^{r-1} F_s = \sum_{s=j}^{r-1} \int\limits_{G_s\setminus G_{s+1}} \left| \sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} a_k D_{k+1}(x) \right| d\mu(x)$$
$$\leq \sum_{s=j}^{r-1} m_s^{-1} \sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} |a_k|(k+1) \leq \frac{2}{m_j} m_{j+1} \sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} |a_k|$$
$$\leq 2N m_{j+1}^{1-1/p} \left(\sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p}. \quad (7)$$

Для $s < j$ на $G_s \setminus G_{s+1}$ в силу леммы 1 имеем $D_{m_{i-1}}(t) = m_{i-1}$ при $i \leq s+1$ и $D_{m_{i-1}}(t) = 0$ при $i > s+1$. Кроме того, $\chi_{m_{i-1}}(t)$ равно 1 на G_s при $i \leq s$. Используя запись

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}(p_i),$$

аналогичную (1), согласно п. 3 леммы 1 при $s < j$ получаем

$$F_s = \int\limits_{G_s\setminus G_{s+1}} \left|\sum_{k=1}^{m_s} a_{k-1}D_k(t) + \sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}} a_{k-1}D_k(t)\right| d\mu(t) \le m_s^{-1}\sum_{k=1}^{m_s}|a_{k-1}|m_s$$
$$+ \int\limits_{G_s\setminus G_{s+1}} \left|\sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}} a_{k-1}\chi_k(t)\left(\sum_{i=1}^{s} + \sum_{i=s+1}^{j+2}\right) D_{m_{i-1}}(t)\sum_{\alpha=1}^{k_i}\chi_{m_{i-1}}^{-\alpha}(t)\right| d\mu(t)$$
$$\le m_s^{1-1/p}\left(\sum_{k=0}^{m_s-1}|a_k|^p\right)^{1/p} + \int\limits_{G_s\setminus G_{s+1}} \left|\sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}} a_{k-1}\sum_{i=1}^{s} k_i m_{i-1}\chi_k(t)\right| d\mu(t)$$
$$+ \int\limits_{G_s\setminus G_{s+1}} \left|\sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}} a_{k-1}\chi_k(t)D_{m_s}(t)\sum_{\alpha=1}^{k_{s+1}}\chi_{m_s}^{-\alpha}(t)\right| d\mu(t) =: F_s^{(1)} + F_s^{(2)} + F_s^{(3)}. \quad (8)$$

По неравенству Гёльдера и теореме Ф. Рисса — Хаусдорфа — Юнга [14, гл. II, § 4] находим, что

$$F_s^{(2)} = \int\limits_{G_s\setminus G_{s+1}} \left|\sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}}\left(a_{k-1}\sum_{i=1}^{s}k_i m_{i-1}\right)\chi_k(t)\right| d\mu(t)$$
$$\le m_s^{-1/p}\left\|\sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}}\left(a_{k-1}\sum_{i=1}^{s}k_i m_{i-1}\right)\chi_k(t)\right\|_q$$
$$\le m_s^{-1/p}\left(\sum_{k=m_s}^{m_{j+1}-1}|a_k|^p m_s^p\right)^{1/p} \le m_s^{1-1/p}\left(\sum_{k=m_s}^{m_{j+1}-1}|a_k|^p\right)^{1/p}. \quad (9)$$

Здесь использовано неравенство $\sum\limits_{i=1}^{s} k_i m_{i-1} < m_s$.

Так как

$$G_s \setminus G_{s+1} = \bigcup_{l=1}^{p_{s+1}-1}(lx^{(s)} + G_{s+1}),$$

где $x^{(s)} = (0,\dots,0,1,0,\dots) \in G_s\setminus G_{s+1}$ (сначала s нулей), и компоненты правой части не пересекаются, кроме того, $\chi_{m_s}(t)$ равна γ_{s+1}^l на $lx_s + G_{s+1}$, $1 \le l \le p_{s+1}-1$, $\gamma_{s+1} = \exp(2\pi i/p_{s+1})$, в силу (2) и инвариантности интеграла относительно сдвига имеем

$$F_s^{(3)} = \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1}\int\limits_{lx^{(s)}+G_{s+1}}\left|\sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}} a_{k-1}\chi_k(t)m_s\sum_{\alpha=1}^{k_{s+1}}\chi_{m_s}^{-\alpha}(t)\right| d\mu(t)$$
$$= \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1}\int\limits_{G_{s+1}}\left|\sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}}\left(a_{k-1}m_s\sum_{\alpha=1}^{k_{s+1}}\gamma_{s+1}^{-\alpha l}\chi_k(lx_s)\right)\chi_k(u)\right| d\mu(u)$$
$$=: \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1}\int\limits_{G_{s+1}}\left|\sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}} a_{k,s,l}\chi_k(t)\right| d\mu(t).$$

Поскольку $a_{k,s,l} \le k_{s+1}|a_{k-1}|m_s \le m_{s+1}|a_{k-1}|$, снова применяя неравенство Гёльдера и теорему Ф. Рисса — Хаусдорфа — Юнга, получаем

$$F_s^{(3)} \le \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1} m_{s+1}^{-1/p} \left\| \sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}} a_{k,s,l}\chi_k \right\|_q$$
$$\le \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1} m_{s+1}^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_s+1}^{m_{j+1}} |a_{k-1}|^p \right)^{1/p} \le C_1 m_s^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_s}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p}. \quad (10)$$

Из оценок (7)–(10) выводим, что при $r \ge j+1$

$$\int\limits_{G\setminus G_r} \left| \sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} a_k D_{k+1}(t) \right| d\mu(t) = R_j + \sum_{s=0}^{j-1} F_s$$
$$\le C_2 \left[m_{j+1}^{1-1/p} \left(\sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p} + \sum_{s=0}^{j-1} m_s^{1-1/p} \left(\left(\sum_{k=0}^{m_s-1} |a_k|^p \right)^{1/p} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\sum_{k=m_s}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p} \right) \right] \le C_3 m_r^{1-1/p} \left(\sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p}, \quad (11)$$

поскольку $a^{1/p} + b^{1/p} \le 2^{(p-1)/p}(a+b)^{1/p}$, $a, b \ge 0$. При $r \le j$ также из (8)–(10) следует, что

$$\int\limits_{G\setminus G_r} \left| \sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} a_k D_{k+1}(t) \right| d\mu(t) = \sum_{s=0}^{r-1} F_s \le C_3 m_r^{1-1/p} \left(\sum_{k=0}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p}. \quad (12)$$

Пусть $n \in (m_j, m_{j+1}]$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Полагая $a_i = 0$ при $i \ge n$, сводим неравенство теоремы к (11) или (12). Теорема доказана.

Следствие 1. *Справедлива теорема* A.

Доказательство. Пусть $n \in [m_k, m_{k+1}) \cap \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда на G_{k+1} верно равенство $D_{i+1} = i+1$ при всех $0 \le i \le n-1$ и по неравенству Гёльдера

$$\int\limits_{G_{k+1}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_{i+1}(t) \right| d\mu(t) \le n m_{k+1}^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \le n^{1/q} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p \right)^{1/p}. \quad (13)$$

По теореме 1

$$\int\limits_{G\setminus G_{k+1}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_{i+1}(t) \right| d\mu(t) \le C_1 m_{k+1}^{1/q} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p \right)^{1/p}. \quad (14)$$

Так как $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограничена N, то $m_{k+1} \le Nn$ и из (13), (14) вытекает неравенство теоремы A. Следствие доказано.

Получим вариант теоремы A для случая, когда число $a_k \ne 0$ гораздо меньше n.

Теорема 2. *Пусть* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C$, $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел,* $1 < p \le 2$. *Тогда*

$$\left\| \sum_{i=0}^{r} a_i D_{k_i}(t) \right\|_1 \le C(p) r^{1-1/p} \left(\sum_{i=0}^{r} |a_i|^p \right)^{1/p} \ln(2k_r/r), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $r \in [m_l, m_{l+1}) \cap \mathbb{N}$, $k_r \in [m_{j-1}, m_j)$, $j \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда на G_j все D_{k_i} равны $k_i = D_{k_i}(0)$. Поэтому

$$\int\limits_{G_j} \left| \sum_{i=1}^{r} a_i D_{k_i}(t) \right| d\mu(t) \le \mu(G_j) \sum_{i=1}^{r} |a_i| k_i$$

$$\le m_j^{-1} m_j \sum_{i=1}^{r} |a_i| \le r^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^{r} |a_i|^p \right)^{1/p}. \quad (15)$$

Применяя п. 1 леммы 1, с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\int\limits_{G_{l-1} \setminus G_j} \left| \sum_{i=1}^{r} a_i D_{k_i}(t) \right| d\mu(t) = \sum_{s=l}^{j} \int\limits_{G_{s-1} \setminus G_s} \left| \sum_{i=1}^{r} a_i D_{k_i}(t) \right| d\mu(t)$$

$$C_1 \sum_{i=1}^{r} |a_i| \sum_{s=l}^{j} m_{s-1}^{-1} m_s \le C_2 r^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^{r} |a_i|^p \right)^{1/p} (j - l + 1)$$

$$\le C_3 r^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^{r} |a_i|^p \right)^{1/p} \ln(2k_r/r). \quad (16)$$

Наконец, по теореме 1 находим, что

$$\int\limits_{G \setminus G_{l-1}} \left| \sum_{i=1}^{r} a_i D_{k_i}(t) \right| d\mu(t) \le C_4 m_{l-1}^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^{r} |a_i|^p \right)^{1/p} \le C_4 r^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^{r} |a_i|^p \right)^{1/p}. \quad (17)$$

Объединяя оценки (15)–(17), доказываем теорему 2.

4. Приложения к вопросам сильной аппроксимации

С помощью теоремы 2 получим аналог результата Тотика [10] (см. (5)).

Теорема 3. *Пусть* $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел,* $r \ge 1$, $f \in C(G)$. *Тогда*

$$\left\| \left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} |S_{k_i}(f)(x)|^r \right)^{1/r} \right\|_{\infty} \le C \ln(2k_n/n) \|f\|_{\infty}, \quad x \in G, \ n \in \mathbb{N}; \quad (18)$$

$$\left\| \left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} |f(x) - S_{k_i}(f)(x)|^r \right)^{1/r} \right\|_{\infty} \le C \ln(2k_n/n) E_{k_1}(f)_{\infty}, \quad x \in G, \ n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Доказательство. Так как по неравенству Гёльдера левые части (18) и (19) возрастают с ростом r, считаем, что $r \geq 2$. Пусть $n \in [m_{l-1}, m_l)$. Тогда

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|S_{k_i}(f)(x)|^r \leq N m_l^{-1}\sum_{i=1}^{n}|S_{k_i}(f)(x)|^r = N\|h_n\|_r^r,$$

$h_n(t)$ равно $S_{k_i}(f)(x)$ на $x_i + G_l$, $1 \leq i \leq n$, где $\{x_i + G_l\}_{i=1}^{m_l}$ — совокупность всех элементов G/G_l, и $h_n(t) = 0$ на остальных $x_i + G_l$. Ясно, что

$$\|h_n\|_r = \sup\left|\int_G h_n(t)g(t)\,d\mu(t)\right|,$$

где sup берется по $g(t)$, постоянным на каждом смежном классе $x_i + G_l$, $1 \leq i \leq n$, со свойством $\|g(t)\|_{r'} \leq 1$, $1/r + 1/r' = 1$. Другими словами, если $g(t) = a_i$ при $t \in x_i + G_l$, $1 \leq i \leq n$, то

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{r'}\right)^{1/r'} \leq m_l^{1/r'} \quad (\sup_{1\leq i\leq n}|a_i| \leq 1 \text{ при } r = 1). \tag{20}$$

Благодаря теореме 2 и (20) имеем

$$\left|\int_G h_n(t)g(t)\,d\mu(t)\right| = m_l^{-1}\left|\int_G \sum_{i=1}^{n} a_i D_{k_i}(t) f(x\ominus t)\,d\mu(t)\right| \leq m_l^{-1}\|f\|_\infty \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i D_{k_i}\right\|_1$$

$$\leq C_1 m_l^{-1/r'}\ln(2k_n/n)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{r'}\right)^{1/r'}\|f\|_\infty \leq C_2\ln(2k_n/n)\|f\|_\infty,$$

что дает (18). Для доказательства (19) надо взять $t_{k_1} \in \mathscr{P}_{k_1}$ такой, что $\|f - t_{k_1}\|_\infty = E_{k_1}(f)_\infty$, учесть равенство $S_{k_i}(t_{k_1}) = t_{k_1}$ $(k_i \geq k_1)$ и подставить в (18) $f - t_{k_1}$ вместо f (см., например, доказательство леммы 8 в [10]). Теорема доказана.

Пусть $\Phi(x)$ — неотрицательная монотонно возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция такая, что

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(t) \leq e^{A_1 t},\ t \in (0,\infty), \quad \Phi(2t) \leq A_2\Phi(t),\ t \in (0,1). \tag{21}$$

Следуя [11], докажем аналог достаточности из теоремы C для систем характеров группы G.

Теорема 4. *Пусть $f \in C(G)$, $\Phi(x)$ — неотрицательная монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию* (21). *Тогда*

$$n^{-1}\sum_{k=n+1}^{2n}|\Phi(S_k(f)(x) - f(x))| \leq C(\Phi, f)\Phi(E_n(f)_\infty), \quad x \in G,\ n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Из теоремы 3 вытекает неравенство

$$r^{-1}\sum_{k=1}^{r}|S_{k_i}(f)(x) - f(x)| \leq C_1 E_n(f)_\infty \ln(2n/r), \tag{22}$$

где $1 \leq r \leq n$, $n < k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq 2n$. Если $\lambda > 0$, $x \in G$, то через $\mu_{n,\lambda}(x)$ обозначим число $k \in [n+1, 2n] \cap \mathbb{Z}$, для которого $|S_k(f)(x) - f(x)| \geq \lambda E_n(f)_\infty$.

Полагая в (22) $r=\mu_{n,\lambda}(x)$ и беря k_i такие, что $|S_{k_i}(f)(x)-f(x)|\ge\lambda E_n(f)_\infty$, получаем $\lambda\le C_1\ln(2n/\mu_{n,\lambda}(x))$, откуда $\mu_{n,\lambda}(x)\le 2ne^{-\lambda/C_1}$. В силу Δ_2-условия $\Phi(2t)\le A_2\Phi(t)$ имеем $\Phi(1)\le A_2^{\log_2(1/t)+1}\Phi(t)$, $t>0$, откуда $\Phi(t)\ge C_2t^\beta$, $\beta=\log_2 A_2$ при $0<t\le 1$.

Считая A_1 достаточно большим и используя первое условие (21), находим, что для $y\in(0,(2A_1C_1)^{-1})$

$$\sum_{k>2/y}\Phi(yk)e^{-k/C_1}\le\sum_{k>2/y}e^{k(A_1y-C_1^{-1})}\le\sum_{k>2/y}e^{-k/2C_1}\le C_3e^{-(yC_1)^{-1}}\le C_4\Phi(y), \tag{23}$$

так как функция $t^{|\beta|}/e^t$, $\beta\in\mathbb{R}$, ограничена на любом $[a,+\infty)$, $a>0$. В силу Δ_2-условия из (21) также выводим

$$\sum_{k\le 2/y}\Phi(yk)e^{-k/C_1}\le\Phi(y)\sum_{k\le 2/y}e^{-k/C_1}A_2^{\log_2 k+1}\le C_5\Phi(y)\sum_{k=1}^\infty k^\beta e^{-k/C_1}=C_6\Phi(y). \tag{24}$$

Объединяя (23) и (24), имеем

$$\sum_{k=1}^\infty\Phi(yk)e^{-k/C_1}\le(C_4+C_6)\Phi(y).$$

Пусть для $n,k\in\mathbb{N}$

$$M_{n,k}(x)=\{i\in\mathbb{N}\cap[n+1,2n]:(k-1)E_n(f)_\infty\le|S_i(f)(x)-f(x)|\le kE_n(f)_\infty\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac1n\sum_{k=n+1}^{2n}\Phi(|S_k(f)(x)-f(x)|)&=\frac1n\sum_{k=1}^\infty\sum_{i\in M_{n,k}}\Phi(|S_i(f)(x)-f(x)|)\\&\le\frac1n\sum_{k=1}^\infty\Phi(kE_n(f)_\infty)\mu_{n,k-1}(x)\\&\le\frac{2n}{n}\sum_{k=1}^\infty\Phi(kE_n(f)_\infty)e^{-k/C_1}\le 2(C_4+C_6)\Phi(E_n(f)_\infty)\end{aligned}$$

при условии, что $E_n(f)_\infty<(2A_1C_1)^{-1}$. Для остальных n ($n<n_0$) имеем $|S_k(f)(x)-f(x)|\le C_7\ln(2n_0)E_n(f)_\infty$ (см. неравенство и оценку константы Лебега в [1, гл. 4, § 4]) и неравенство теоремы легко получается с постоянной, зависящей от n_0, т. е. от f. Теорема доказана.

Для последовательности $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty\downarrow 0$ с помощью построенной по ней функции ω введем класс

$$H(\beta,r,\omega)=\{f\in C(G):\|\sigma_n(f,r,\beta)\|_\infty=O(\omega(1/n)),\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Его подкласс $H_+(\beta,r,\omega)$ состоит из $f\in H(\beta,r,\omega)$ со свойством $\hat f(k)\ge 0$. Аналогично определяется класс H_+^ω.

Теорема 5. 1. *Пусть* $\beta>0$, $r\ge 1$, $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ *убывает к* 0 *и* $\omega_n\le C\omega_{n+1}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. *Тогда* $H_+(\beta,r,\omega)\subset H_+^\omega$.

2. *Пусть* $\beta > r \geq 0$, $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ *такова, что* $\omega^r(t) \in B_\beta$. *Тогда* $H_+^\omega \subset H_+(\beta, r, \omega)$.

Доказательство. 1. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) \in H_+(\beta, r, \omega),$$

т. е. $\hat{f}(k) = a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Подставляя $x = 0$, получаем

$$\left(n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_i\right)^r\right)^{1/r} \leq C_1 \omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Используя неравенство $\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i \geq \sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i$ при $1 \leq k \leq n$ и тот факт, что

$$n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} \geq n^{-\beta} \int\limits_0^n x^{\beta-1} dx = \beta^{-1} \quad \text{при } \beta \geq 1$$

и аналогичное неравенство верно при $0 < \beta < 1$, находим, что $\sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i \leq C_2 \omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. По п. 1 леммы 3 видим, что $f \in H_+^\omega$.

2. Пусть $f \in H_+^\omega$. Как и при доказательстве леммы 3, имеем $|f(x) - S_k(f)(x)| \leq \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i$. Поэтому согласно п. 2 леммы 3

$$\left\| \left(n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} |S_k(f)(x) - f(x)|^r\right)^{1/r} \right\|_\infty \leq \left(n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_i\right)^r\right)^{1/r}$$
$$\leq C_3 \left(n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} \omega^r(k^{-1})\right)^{1/r}.$$

Если $\omega^r \in B_\beta$, то правая часть последнего неравенства не превосходит $C_4 \omega(1/n)$. Здесь использован тот факт, что условие $\omega^r \in B_\beta$ влечет выполнение Δ_2-условия для ω^r и ω (см. [15, лемма 3]), поэтому лемму 3 применять можно. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 5 является аналогом результата Немета [16].

Теорема 6. *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r \geq 1$, $\beta > \alpha r$, $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ *принадлежит классу* B, *а* $\omega^r(x) \in B_{\beta - \alpha r}$. *Тогда условия* $f \in W^\alpha H^\omega$ *и* $\|\sigma_n(f, r, \beta)\|_\infty = O(n^{-\alpha} \omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$, *равносильны.*

Доказательство. Пусть $f \in W^\alpha H^\omega$. Тогда по лемме 5

$$\omega_n(f)_\infty \leq C_1 m_n^{-\alpha} \omega_n(f^{[\alpha]})_\infty \leq C_2 m_n^{-\alpha} \omega_n.$$

Известно (см. условие (S_k) в лемме 3 из [17] или лемму 3 в [15]), что $\omega \in B_{\beta - \alpha r}$ удовлетворяет Δ_2-условию $\omega_n \leq C_3 \omega_{n+1}$, откуда в силу неравенства (4) легко получить неравенство $E_n(f)_\infty \leq C_4 n^{-\alpha} \omega(1/n)$.

По лемме 4 имеем

$$\|\sigma_n(f, r, \beta)\|_\infty \leq C_5 \left(n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1-\alpha r} \omega^r(1/k)\right)^{1/r}$$
$$\leq C_6 n^{-\alpha} \left(n^{-(\beta - \alpha r)} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1-\alpha r} \omega^r(1/k)\right)^{1/r} \leq C_7 n^{-\alpha} \omega(1/n)$$

согласно условию $\omega^r \in B_{\beta-\alpha r}$.

Обратно, пусть $\|\sigma_n(f,r,\beta)\|_\infty \le C_8 n^{-\alpha}\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу леммы 6 получаем $E_n(f)_\infty \le C_9 n^{-\alpha}\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, и по лемме 5 и условию $\omega \in B$ находим, что существует $f^{[\alpha]} \in C(G)$, причем

$$E_n(f^{[\alpha]})_\infty \le C_{10}\left(\omega(1/n) + \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\omega(1/k)\right) \le C_{11}\omega(1/n).$$

Из последнего соотношения и неравенства (4) следует, что $f \in W^\alpha H^\omega$. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема 6 является аналогом результатов Лейндлера (см. [9, теорема 9.2]).

Для обобщенных сильных средних Валле-Пуссена получить критерий принадлежности функции f пространству $W^\alpha H^\omega$ оказывается возможным при более слабых условиях на ω. Следующая теорема является аналогом результата Сиддики [18], обобщившего теорему Алексича — Кралика [19]. Следует отметить, что в [18] отсутствуют условия $an \le \nu_n \le bn$, хотя по сути доказательства они должны использоваться.

Теорема 7. *Пусть* $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, $0 < an \le \nu_n \le bn$, $n \in \mathbb{N}$, $r \ge 1$, $\alpha > 0$, $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty \in B$ *и* $\omega_n \le C\omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда* $f \in W^\alpha H^\omega$ *в том и только том случае, когда*

$$\left\|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=\nu_n}^{n+\nu_n-1} |S_k(f) - f|^r\right)^{1/r}\right\|_\infty = O\big(\nu_n^{-\alpha}\omega\big(\nu_n^{-1}\big)\big). \tag{25}$$

Доказательство. По теореме 3 имеем

$$\left\|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=\nu_n}^{n+\nu_n-1} |S_k(f) - f|^r\right)^{1/r}\right\|_\infty \le C_1 E_{\nu_n}(f)_\infty.$$

По лемме 5 для $f \in W^\alpha H^\omega$ верно неравенство $E_{m_n}(f)_\infty \le \omega_n(f)_\infty \le C_2 m_n^{-\alpha}\omega_n$ и в силу условия $\omega_n \le C_3\omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и ограниченности $\{m_{n+1}/m_n\}_{n=0}^\infty$ легко получаем $E_{\nu_n}(f)_\infty \le C_4 \nu_n^{-\alpha}\omega\big(\nu_n^{-1}\big)$, откуда следует (25).

Пусть верно (25). Тогда в силу определения и неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} E_{n+\nu_n-1}(f)_\infty &\le \left\|f - \frac{1}{n}\sum_{k=\nu_n}^{n+\nu_n-1} S_k(f)\right\|_\infty \le \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=\nu_n}^{n+\nu_n-1} |f - S_k(f)|\right\|_\infty \\ &\le \left\|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=\nu_n}^{n+\nu_n-1} |f - S_k(f)|^r\right)^{1/r}\right\|_\infty \le C_5\nu_n^{-\alpha}\omega\big(\nu_n^{-1}\big) \le C_6 n^{-\alpha}\omega(1/n). \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использовано условие $\nu_n^{-1} \le a^{-1}n^{-1}$. С другой стороны, $\nu_n \le ([b]+1)n =: ln$, $n \in \mathbb{N}$. Если $N \in \mathbb{N}$ и $N \ge l+1$, то найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $(l+1)n \le N \le (n+1)(l+1) \le 4ln$. Тогда

$$E_N(f)_\infty \le E_{n+ln}(f)_\infty \le E_{n+\nu_n-1}(f)_\infty \le C_6 n^{-\alpha}\omega(1/n) \le C_7(l)N^{-\alpha}\omega(1/N). \tag{26}$$

Увеличивая C_7, можно считать, что (26) верно для всех $N \in \mathbb{N}$. Аналогично доказательству теоремы 6 из (26) с помощью (4) получаем $f \in W^\alpha H^\omega$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: Элм, 1981.
2. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Budapest: Akad. Kiado, 1990.
3. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.
4. *Zelin H.* The derivatives and integrals of fractional order in Walsh–Fourier analysis with application to approximation theory // J. Approx. Theory. 1983. V. 39, N 3. P. 261–273.
5. *Fridli S.* Integrability and L^1-convergence of trigonometric and Walsh series // Ann. Univ. Sci. Budap. Sect. Comp. 1996. V. 16. P. 149–172.
6. *Móricz F., Schipp F.* On the integrability and L^1-convergence of Walsh series with coefficients of bounded variation // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 146, N 1. P. 99–109.
7. *Avdispahic M., Pepic M.* Summability and integrability of Vilenkin series // Collect. Math. 2000. V. 51, N 3. P. 237–354.
8. *Móricz F.* On L^1-convergence of Walsh–Fourier series. II // Acta Math. Hung. 1991. V. 58, N 1–2. P. 203–210.
9. *Leindler L.* Strong approximation by Fourier series. Budapest: Akad. Kiado, 1985.
10. *Iofina T. V., Volosivets S. S.* The strong approximation of functions by Fourier–Vilenkin series in uniform and Hölder metrics // Analysis Theory Appl. 2015. V. 31, N 1. P. 1–12.
11. *Totik V.* On the strong approximation of Fourier series // Acta Math. Hung. 1980. V. 35, N 1–2. P. 151–172.
12. *Totik V.* Notes of Fourier series: strong approximation // J. Approx. Theory. 1985. V. 45, N 1. P. 105–111.
13. *Волосивец С. С.* Приближение функций ограниченной p-флуктуации полиномами по мультипликативным системам // Analysis Math. 1995. V. 21, N 1. P. 61–77.
14. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
15. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
16. *Németh J.* Strong approximation and classes H^ω // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. 1990. V. 58. P. 537–548.
17. *Бари Н. К.* О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1955. Т. 19, № 3. С. 285–302.
18. *Siddiqi R. N.* A note on a theorem of Alexits and Králik // Acta Math. Hung. 1976. V. 27, N 1–1. P. 77–79.
19. *Alexits G., Králik D.* Über die Approximation mit starken de la Vallee Poussinchen Mitteln // Acta Math. Hung. 1965. V. 16, N 1–2. P. 43–49.

Статья поступила 30 мая 2015 г.

Волосивец Сергей Сергеевич, Лихачева Татьяна Владимировна
Саратовский гос. университет,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410012
VolosivetsSS@mail.ru, iofinat@mail.ru