Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 517.5

КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА СИСТЕМЫ УОЛША И БАНАХОВЫ ПРЕДЕЛЫ

С. В. Асташкин, Е. М. Семенов

Аннотация. Изучаются свойства констант Лебега системы Уолша $L_n(W)$, $n \in \mathbb{N}$, и приложения полученных результатов к теории банаховых пределов. Показано, что последовательность $\left\{\frac{L_n(W)}{\log_2 n}, n \geq 2\right\}$ не принадлежит пространству почти сходящихся последовательностей ac, обнаруживая тем самым их крайне нерегулярное асимптотическое поведение. Результаты противоположного характера доказаны для некоторых специальных средних этих констант.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.303

Ключевые слова: функции Уолша, функции Радемахера, константы Лебега, банахов предел, почти сходящаяся последовательность.

§ 1. Введение и предварительные сведения

Пусть $\varphi = (\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система функций на $[a, b]$. Ее *функции Лебега* $L_n(\varphi)(s)$, $n \in \mathbb{N}$, определяются соотношением

$$L_n(\varphi)(s) := \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(t)\varphi_k(s) \right| dt.$$

Если эти функции не зависят от $s \in E$ для некоторого $E \subset [a, b]$ с мерой Лебега $m(E) = b - a$, то говорят о *числах Лебега* $L_n(\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$, системы φ.

Хорошо известно [1, гл. 1, § 35], что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(T)}{\ln n} = \frac{4}{\pi},$$

где T — тригонометрическая система. Асимптотическое поведение констант Лебега — важная характеристика системы φ. Например, из неограниченности $L_n(T)$ вытекает существование непрерывной функции с расходящимся тригонометрическим рядом Фурье.

Пусть $r_n(t) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi t$, $n \in \mathbb{N}$, — функции Радемахера. Система Уолша — это система функций $W = \{W_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $W_0(t) = 1$ и $W_{2^k+i}(t) = r_{k+1}(t)W_i(t)$, $0 \leq t \leq 1$, для $k \geq 0$, $0 \leq i \leq 2^k - 1$. Система Уолша — полная в пространстве $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, ортонормированная система. Так как ее функции Лебега $L_n(W)(s)$ не зависят от $s \in [0, 1]$, если $s \neq k2^{-n}$, $n = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots, 2^n$ (см.,

Первый автор поддержан Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания, второй автор поддержан РФФИ (грант 14–01–00141).

например, [2, гл. 4, § 5]), а всякое конечное множество функций Уолша на некотором интервале обращается в 1, константы Лебега системы W определяются равенством

$$L_n(W) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} W_k(t) \right| dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Напомним некоторые результаты о константах Лебега системы Уолша. Во-первых, $L_{2^m}(W) = 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $L_n(W) \le \log_2 n$, если $n \ge 4$, а также

$$L_{n_k}(W) > \frac{1}{4} \log_2 n_k$$

для всех $k = 0, 1, \ldots$, где

$$n_{2k} = \sum_{i=0}^{k} 2^{2i}, \quad n_{2k+1} = \sum_{i=0}^{k} 2^{2i+1}.$$

Приведенные выше результаты содержатся в [2, гл. 4, § 5; 3, § 2.2].

Интересные соотношения для констант Лебега системы Уолша получены в работе Файна [4]. Каждое $n \in \mathbb{N}$ единственным образом может быть представлено в виде

$$n = \sum_{j=1}^{s} 2^{m_j}, \tag{1}$$

где $m_1 > m_2 > \cdots > m_s \ge 0$ ($s = s(n) \le [\log_2 n]$). Как показано в [4], в этих обозначениях справедливо равенство

$$L_n(W) = s(n) - \sum_{1 \le j < i \le s(n)} 2^{m_i - m_j}, \tag{2}$$

используя которое, Файн доказал, что

$$L_{2k}(W) = L_k(W), \tag{3}$$

$$L_{2k+1}(W) = \frac{1}{2}(L_k(W) + L_{k+1}(W) + 1), \tag{4}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} L_k(W) = \frac{1}{4} \log_2 n + O(1), \tag{5}$$

$$\limsup_{k \to \infty} \left(L_k(W) - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 3k \right) \right) = 0. \tag{6}$$

Как отмечено в [4], соотношение (6) было гораздо ранее, в 1921 г., получено (но не опубликовано) Радемахером.

Приведенные результаты показывают достаточно сложное асимптотическое поведение чисел $L_n(W)$. Настоящая работа посвящена их дальнейшему изучению, а также приложению полученных результатов к теории банаховых пределов. В частности, уточняя равенство (6), найдем $\max\limits_{1 \le n \le 2^{2m+1}} L_n(W)$, $m \in \mathbb{N}$ (теорема 2). Применяя затем этот результат и теорему Лоренца [5], покажем, что последовательность $\left\{ \frac{L_n(W)}{\log_2 n}, n \ge 2 \right\}$ не принадлежит пространству ac (следствие 2). Последнее утверждение характеризует асимптотическое поведение констант Лебега системы Уолша как крайне нерегулярное. Напротив, теоремы 4 и 5 показывают определенную регулярность некоторых специальных средних чисел $L_n(W)$, усиливая соотношение (5).

Приведем необходимые сведения о банаховых пределах. Через l_∞ обозначается пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с естественной полуупорядоченностью (т. е. $x \geq 0$, если $x_n \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$) и нормой

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Линейный функционал $B \in l_\infty^*$ называется *банаховым пределом,* если

1) $B \geq 0$, т. е. $Bx \geq 0$ для любого $x \in l_\infty$, $x \geq 0$,

2) $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$,

3) $Bx = BTx$ для всех $x \in l_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество банаховых пределов. Ясно, что $\mathfrak{B}$ есть замкнутое выпуклое множество на единичной сфере пространства l_∞^* и $Bx = \lim\limits_{n\to\infty} Bx_n$ для каждого $B \in \mathfrak{B}$ и любой сходящейся последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$. Лоренц [5] доказал, что для заданных $x \in l_\infty$, $a \in \mathbb{R}$ равенство $Bx = a$ справедливо для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = a$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Ограниченные последовательности, удовлетворяющие этому условию для некоторого $a \in \mathbb{R}$, называются *почти сходящимися*, а их множество обозначается через ac (almost convergent). Сачестон [6] уточнил теорему Лоренца, показав, что для любого $x \in l_\infty$

$$\{Bx : B \in \mathfrak{B}\} = [q(x), p(x)],$$

где

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \quad p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Пусть S — линейный положительный оператор в l_∞, $S\mathbb{1} = \mathbb{1}$. Обозначим через $\mathfrak{B}(S)$ множество $B \in \mathfrak{B}$, инвариантных относительно S, т. е. множество таких $B \in \mathfrak{B}$, что $Bx = BSx$ для всех $x \in l_\infty$. Подробнее об инвариантных банаховых пределах и, в частности, о множестве $\mathfrak{B}(C)$, где

$$(Cx)_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

см. [7]. Некоторые результаты настоящей работы были анонсированы в [8].

§ 2. Вспомогательные результаты

Ввиду соотношения (2) естественно ввести следующее определение. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(m)$ множество последовательностей целых чисел вида $(m_1, m_2, \dots, m_s)$, $s \in \mathbb{N}$, таких, что $m_1 = 2m$, $m_1 > m_2 > \dots > m_s \geq 0$. Будем говорить, что последовательность $(m_{1,0}, m_{2,0}, \dots, m_{s,0}) \in \mathfrak{M}$ *оптимальна*, если при фиксированном m на ней достигается максимум функции

$$Q_m\bigl(\{m_i\}_{i=1}^s\bigr) = s - \sum_{1 \leq j < i \leq s} 2^{m_i - m_j}.$$

Доказательства основных результатов работы существенным образом будут опираться на следующую техническую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\{m_i\}_{i=1}^s \in \mathfrak{M}(m)$ *и выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) $m_s > 0$,

2) $m_k - m_{k+1} \geq 4$ *для некоторого* $1 \leq k \leq s-1$,

3) $m_i - m_{i+1} \geq 2$ *для всех* $1 \leq i \leq s-1$ *и* $m_k - m_{k+1} = 3$ *для некоторого* $1 \leq k \leq s-1$,

4) $m_k - m_{k+1} = 3$ *и* $m_l - m_{l+1} = 1$ *для некоторых* $1 \leq k, l \leq s-1$.

5) $m_i - m_{i+1} \leq 2$ *для всех* $1 \leq i \leq s-1$, $m_k - m_{k+1} = 1$ *для некоторого* $1 \leq k \leq s-1$ *и последовательность* $\{m_i - m_{i+1}\}$ *отлична от последовательности вида* $1, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{r-1}, 1$, *где* $r \geq 1$.

Тогда последовательность $\{m_i\}$ *не оптимальна.*

Доказательство. Все утверждения теоремы доказываются по единой схеме: по заданной последовательности $\{m_i\}_{i=1}^s \in \mathfrak{M}(m)$, удовлетворяющей хотя бы одному из свойств 1–5, строится такая последовательность $\{q_i\}_{i=1}^r \in \mathfrak{M}(m)$, что

$$Q_m\big(\{m_i\}_{i=1}^s\big) < Q_m\big(\{q_i\}_{i=1}^r\big). \tag{8}$$

Рассмотрим каждый из пяти случаев по отдельности.

1. Нетрудно проверить, что (8) выполняется, если

$$q_i = \begin{cases} m_i, & 1 \leq i \leq s-1, \\ 0, & i = s. \end{cases}$$

2. Используя условия, «вставим» между m_k и m_{k+1} в последовательность $\{m_i\}$ еще один элемент, а именно положим

$$q_i = \begin{cases} m_i, & 1 \leq i \leq k, \\ m_k - 2, & i = k+1, \\ m_{i-1}, & k+2 \leq i \leq s+1. \end{cases}$$

Так как $q_{k+1} - q_i \leq i - k - 2$ для $i \leq k$ и $q_i - q_{k+1} \leq k - i$ для $i \geq k+2$, то

$$\sum_{1 \leq j < i \leq s+1} 2^{q_i - q_j} - \sum_{1 \leq j < i \leq s} 2^{m_i - m_j} = \sum_{i=1}^{k} 2^{q_{k+1} - q_i} + \sum_{i=k+2}^{s+1} 2^{q_i - q_{k+1}} < 2 \sum_{i=2}^{\infty} 2^{-i} = 1.$$

Отсюда

$$Q_m(\{q_i\}) = s + 1 - \sum_{1 \leq j < i \leq s+1} 2^{q_i - q_j} > s - \sum_{1 \leq j < i \leq s} 2^{m_i - m_j} = Q_m(\{m_i\}).$$

3. Рассмотрим вспомогательную последовательность

$$p_i = \begin{cases} m_i, & 1 \leq i \leq k, \\ m_i + 1, & k+1 \leq i \leq s, \end{cases} \tag{9}$$

и оценим разность

$$A = \sum_{1 \leq j < i \leq s} 2^{p_i - p_j} - \sum_{1 \leq j < i \leq s} 2^{m_i - m_j}.$$

Так как

$$\sum_{1 \leq j < i \leq k} 2^{p_i - p_j} - \sum_{1 \leq j < i \leq k} 2^{m_i - m_j} = \sum_{k+1 \leq j < i \leq s} 2^{p_i - p_j} - \sum_{k+1 \leq j < i \leq s} 2^{m_i - m_j} = 0,$$

то

$$A = \sum_{1 \le j \le k < i \le s} (2^{p_i - p_j} - 2^{m_i - m_j}) = \sum_{1 \le j \le k < i \le s} 2^{m_i - m_j} = \sum_{i=k+1}^{s} \sum_{j=1}^{k} 2^{m_i - m_j}.$$

Согласно условию $m_i - m_j \le 2(j-i) - 1$, если $1 \le j \le k < i \le s$. Отсюда

$$A \le \sum_{i=k+1}^{s} \sum_{j=1}^{k} 2^{2(j-i)-1} = \frac{1}{8} \sum_{i=k+1}^{s} \sum_{j=1}^{k} 2^{2(j-k)} \cdot 2^{2(k-i+1)} < \frac{1}{8} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} \right)^2 = \frac{2}{9}. \tag{10}$$

Учитывая доказанные утверждения 1 и 2, можно дополнительно предполагать, что $m_s = 0$ и $2 \le m_i - m_{i+1} \le 3$ для всех $i = 1, 2, \ldots, s-1$. Так как в этом случае

$$\sum_{i=1}^{s-1} (m_i - m_{i+1}) = m_1 = 2m,$$

найдется еще один индекс $1 \le l < s$ такой, что $l \ne k$ и $m_l - m_{l+1} = 3$. Без ограничения общности можно считать, что $k < l$. Положим

$$q_i = \begin{cases} m_i, & 1 \le i \le k, \\ m_i + 1, & k+1 \le i \le l, \\ m_i + 2, & l+1 \le i \le s, \\ 0, & i = s+1. \end{cases}$$

Последовательность $\{q_i\}$ получается из последовательности $\{m_i\}$ с помощью двух преобразований вида (9) и добавлением $(s+1)$-го элемента, равного 0. Поэтому в силу (10)

$$\sum_{1 \le j < i \le s+1} 2^{q_i - q_j} - \sum_{1 \le j < i \le s} 2^{m_i - m_j} < 2 \cdot \frac{2}{9} + \sum_{j=1}^{s} 2^{-q_j} < \frac{4}{9} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j} = \frac{7}{9}.$$

Отсюда

$$Q_m(\{q_i\}) = s + 1 - \sum_{1 \le j < i \le s+1} 2^{q_i - q_j} > s - \sum_{1 \le j < i \le s} 2^{m_i - m_j} = Q_m(\{m_i\}),$$

и неравенство (8) снова доказано.

4. Предположим, что наименьшее k, для которого $m_k - m_{k+1} = 3$, меньше, чем наименьшее l, для которого $m_l - m_{l+1} = 1$. Тогда в силу уже рассмотренного случая 2, не ограничивая общности, можно считать, что $m_i - m_{i+1} = 2$ для $k < i < l$. Для доказательства утверждения достаточно проверить, что последовательность

$$q_j = \begin{cases} m_j + 1, & k+1 \le j \le l, \\ m_j & \text{для остальных } j \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству

$$\sum_{1 \le j < i \le s} 2^{q_i - q_j} < \sum_{1 \le j < i \le s} 2^{m_i - m_j}.$$

Если $1 \le j \le k$ и $l < i \le s$ или $k < j < i \le l$, или $1 \le j < i \le k$, или $l < j < i \le s$, то $2^{q_i - q_j} = 2^{m_i - m_j}$. Поэтому осталось показать, что

$$\sum_{\substack{1 \le j \le k < i \le l, \\ k < j \le l < i \le s}} 2^{q_i - q_j} < \sum_{\substack{1 \le j \le k < i \le l, \\ k < j \le l < i \le s}} 2^{m_i - m_j}.$$

В свою очередь, учитывая определение чисел q_j, это неравенство можно переписать следующим образом:

$$2 \sum_{1 \le j \le k < i \le l} 2^{m_i - m_j} + \frac{1}{2} \sum_{k < j \le l < i \le s} 2^{m_i - m_j} < \sum_{1 \le j \le k < i \le l} 2^{m_i - m_j} + \sum_{k < j \le l < i \le s} 2^{m_i - m_j},$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{1 \le j \le k < i \le l} 2^{m_i - m_j} < \frac{1}{2} \sum_{k < j \le l < i \le s} 2^{m_i - m_j}. \tag{11}$$

Согласно предположению $m_k - m_{k+1} = 3$ и $m_i - m_{i+1} = 2$ для $i < l$, $i \ne k$. Следовательно, применяя (10), получим

$$\sum_{1 \le j \le k < i \le l} 2^{m_i - m_j} < \frac{2}{9}.$$

С другой стороны, так как $m_l - m_{l+1} = 1$, то

$$\sum_{k < j \le l < i \le s} 2^{m_i - m_j} \ge 2^{m_{l+1} - m_l} = \frac{1}{2}.$$

В итоге

$$\sum_{1 \le j \le k < i \le l} 2^{m_i - m_j} < \frac{2}{9} < \frac{1}{4} \le \frac{1}{2} \sum_{k < j \le l < i \le s} 2^{m_i - m_j},$$

что и доказывает (11).

В противоположном случае, когда наименьшее l, для которого $m_l - m_{l+1} = 1$, меньше, чем наименьшее k, для которого $m_k - m_{k+1} = 3$, опять можно считать, что $m_i - m_{i+1} = 2$ для $l < i < k$, и совершенно аналогичные рассуждения показывают, что (8) выполняется для последовательности

$$q_j = \begin{cases} m_j - 1, & l + 1 \le j \le k, \\ m_j & \text{для остальных } j. \end{cases}$$

5. Вначале рассмотрим отдельно случай, когда $\{q_j\}, \{m_j\} \in \mathfrak{M}(m)$ и их разностные последовательности $\{q_i - q_{i+1}\}$ и $\{m_i - m_{i+1}\}$ имеют вид

$$(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{s-1}) \quad \text{и} \quad (1, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{s-2}, 1) \tag{12}$$

соответственно, где $2 \le s \le m + 1$. Покажем, что $Q_m(\{m_j\}) = Q_m(\{q_j\})$.

Так как обе разностные последовательности содержат подпоследовательность $(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{s-2})$, имеем

$$\sum_{1 \le j < i \le s} 2^{q_i - q_j} - \sum_{1 \le j < i \le s+1} 2^{m_i - m_j} = \sum_{k=1}^{s-1} 2^{-2k} - \left(2 \sum_{k=1}^{s-1} 2^{-2k+1} + 2^{-2(s-1)} \right) = -1. \tag{13}$$

Отсюда по определению

$$Q_m(\{q_j\}) = s - \sum_{1\le j<i\le s} 2^{q_i-q_j} = s - \sum_{1\le j<i\le s+1} 2^{m_i-m_j} + 1$$
$$= s + 1 - \sum_{1\le j<i\le s+1} 2^{m_i-m_j} = Q_m(\{m_j\}).$$

Как и в доказательстве предыдущего утверждения, можно считать, что $m_s = 0$, и, значит, последовательность $\{m_i - m_{i+1}\}$ содержит четное число единиц. Поэтому существует такое $1 \le l \le s-1$, что $l \ne k$ и $m_l - m_{l+1} = 1$. Таким образом, согласно условиям теоремы разностная последовательность $\{m_j\}$ имеет вид

$$(a_1, a_2, \dots, a_p, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{r-1}, 1, b_1, b_2, \dots, b_l),$$

где $\{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_l\} \ne \varnothing$. Рассмотрим последовательность $\{q_j\}$ из $\mathfrak{M}$ с разностной последовательностью

$$(a_1, a_2, \dots, a_p, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{r}, b_1, b_2, \dots, b_l).$$

Обозначим $(c_k) = (1, 2, \dots, 2, 1)$, $1 \le k \le r+1$, $(d_k) = (2, \dots, 2)$, $1 \le k \le r$. Тогда ввиду симметричности последовательностей (c_k) и (d_k)

$$\sum_{1\le j<i\le p+r+l+1} 2^{q_i-q_j} - \sum_{1\le j<i\le p+r+l+2} 2^{m_i-m_j}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{p} 2^{-\sum_{k=j}^{p} a_k} + \sum_{j=1}^{l} 2^{-\sum_{k=1}^{j} b_k}\right)\left(\sum_{i=1}^{r} 2^{-\sum_{k=1}^{i} d_k} - \sum_{i=1}^{r+1} 2^{-\sum_{k=1}^{i} c_k}\right)$$
$$+ \left(\sum_{1\le j<i\le r} 2^{-\sum_{k=j}^{i} d_k} - \sum_{1\le j<i\le r+1} 2^{-\sum_{k=j}^{i} c_k}\right).$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{r} 2^{-\sum_{k=1}^{i} d_k} - \sum_{i=1}^{r+1} 2^{-\sum_{k=1}^{i} c_k} = \sum_{i=1}^{r} 2^{-2i} - \left(2^{-1} + \sum_{i=1}^{r-1} 2^{-2i-1} + 2^{-2r}\right)$$
$$= -\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{r-1} (2^{-2i} - 2^{-2i-1}) = -\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{r-1} 2^{-2i-1} < 0,$$

а второе слагаемое в предыдущем соотношении в силу (13) равно -1, то

$$\sum_{1\le j<i\le p+r+l+1} 2^{q_i-q_j} - \sum_{1\le j<i\le p+r+l+2} 2^{m_i-m_j} < -1.$$

В итоге, используя определение величины $Q_m(\{m_i\})$, в очередной раз получаем неравенство (8). $\square$

§ 3. Основные результаты

Следующий результат является уточнением соотношения (6), доказанного Файном.

Теорема 2. *Если* $m \in \mathbb{N}$, *то* $\max\limits_{1\le n\le 2^{2m+1}} L_n(W)$ *достигается на числах*

$$n = \sum_{k=0}^{m} 2^{2(m-k)}, \quad 2^{2m} + \sum_{k=1}^{m} 2^{2(m-k)+1} + 1$$

и

$$\max_{1\le n\le 2^{2m+1}} L_n(W) = m + 1 - \sum_{0\le j<i\le m} 2^{2(j-i)} = \frac{2}{3}m + \frac{10}{9} - \frac{1}{9\cdot 4^m}.$$

Доказательство. Прежде всего в силу равенства (3)

$$\max_{1\le n\le 2^{2m+1}} L_n(W) = \max_{2^{2m}\le n\le 2^{2m+1}} L_n(W).$$

Поэтому ввиду (2) этот максимум совпадает со значением $L_n(W) = Q_m(\{m_i\})$, где оптимальная последовательность $\{m_i\}$ и натуральное число n из промежутка $[2^{2m}, 2^{2m+1}]$ связаны соотношением (1).

Итак, пусть $\{m_i\}$ — оптимальная последовательность. Покажем, что она совпадает с одной из последовательностей в (12). Действительно, во-первых, применяя п. 2 теоремы 1, заключаем, что $1 \le m_i - m_{i+1} \le 3$ для всех $1 \le i \le s-1$. Кроме того, ввиду пп. 3, 4 разностная последовательность не может состоять из «двоек» и «троек», а также не может содержать одновременно «единицы» и «тройки». Следовательно, она должна состоять либо только из «двоек», либо из «единиц» и «двоек». П. 5 показывает, что во втором случае в последовательности $\{m_i - m_{i+1}\}$ может быть лишь одна пара «единиц», стоящих по ее краям. Таким образом, $\max\limits_{1\le n\le 2^{2m+1}} L_n(W)$ достигается при подстановке вместо n одного из чисел

$$n_s := \sum_{k=0}^{s-1} 2^{2(m-k)}, \quad n'_s := 2^{2m} + \sum_{k=1}^{s-1} 2^{2(m-k)+1} + 2^{2(m-s+1)}, \quad 2 \le s \le m+1.$$

Как ранее показано (см. начало доказательства п. 5 теоремы 1), $L_{n'_s}(W) = L_{n_s}(W)$, $2 \le s \le m+1$. Следовательно,

$$\max_{1\le n\le 2^{2m+1}} L_n(W) = \max_{2\le s\le m+1} L_{n_s}(W).$$

Согласно (2) для каждого $2 \le s \le m+1$

$$L_{n_s}(W) = s - \sum_{0\le j<i\le s-1} 2^{2(j-i)}.$$

Имеем

$$\sum_{0\le j<i\le s-1} 2^{2(j-i)} = \frac{s-1}{4} + \frac{s-2}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{s-1}}$$
$$= (s-1)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{s-1}}\right) - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \dots + \frac{s-2}{4^{s-1}}\right).$$

Так как

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{s-1}} = \frac{1-4^{-s+1}}{3}$$

и

$$\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\dots+\frac{s-2}{4^{s-1}}=\frac{1}{4^2}\,\frac{d}{dt}\left(t+t^2+\dots+t^{s-2}\right)\Big|_{t=\frac14}$$
$$=\frac{1}{4^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{t-t^{s-1}}{1-t}\right)\Big|_{t=\frac14}=\frac{1}{4^2}\,\frac{1-(s-1)t^{s-2}+(s-2)t^{s-1}}{(1-t)^2}\Big|_{t=\frac14}$$
$$=\frac{1-(s-1)4^{2-s}+(s-2)4^{-s+1}}{9}=\frac{1-(3s-2)4^{-s+1}}{9},$$

то

$$L_{n_s}(W)=s-(s-1)\frac{1-4^{-s+1}}{3}+\frac{1-(3s-2)4^{-s+1}}{9}=\frac{2s}{3}+\frac{4}{9}-\frac{1}{9\cdot 4^{s-1}}.$$

Поскольку последнее выражение возрастает по s, в итоге

$$\max_{1\le n\le 2^{2m+1}} L_n(W)=L_{n_{m+1}}=\frac{2m}{3}+\frac{10}{9}-\frac{1}{9\cdot 4^m},$$

и теорема доказана. $\square$

Применяя теорему 2, получаем

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{L_n(W)}{\log_2 n}=\frac{1}{3}. \tag{14}$$

В то же время так как $L_{2^n}(W)=1$, $n\in\mathbb{N}$, то

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{L_n(W)}{\log_2 n}=0.$$

Для того чтобы выяснить, принадлежит ли последовательность $\big\{\frac{L_n(W)}{\log_2 n}$, $n\ge 2\big\}$ пространству ac, найдем числа $p\big(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\big)$ и $q\big(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\big)$ (определения см. в § 1).

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$q\left(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\right)=0,\quad p\left(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\right)=\frac{1}{3}.$$

Доказательство. Докажем сначала первое равенство. Для любых $r\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon>0$ найдем такое $m\in\mathbb{N}$, что $m>r$ и

$$m>\frac{1}{r\varepsilon}\sum_{i=1}^{r}L_i(W)\ge\frac{1}{\varepsilon}.$$

Из соотношения (2) легко следует, что $L_{2^m+i}(W)\le 1+L_i(W)$ для всех $1\le i\le r$. Отсюда

$$\frac{1}{r}\sum_{n=2^m+1}^{2^m+r}\frac{L_n(W)}{\log_2 n}<\frac{1}{mr}\sum_{i=1}^{r}(1+L_i(W))=\frac{1}{m}+\frac{1}{mr}\sum_{i=1}^{r}L_i(W)<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$q\left(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\right)=\lim_{r\to\infty}\inf_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{r}\sum_{n=k+1}^{k+r}\frac{L_n(W)}{\log_2 n}=0.$$

Докажем второе равенство. Для любых $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ найдем такое $m \in \mathbb{N}$, что $m > r/\varepsilon$. Пусть

$$a := \sum_{k=0}^{m-r} 2^{2(m-k)} \le n < b := \sum_{k=0}^{m-r+1} 2^{2(m-k)}$$

и двоичное разложение числа n имеет вид

$$n = \sum_{k=0}^{m-r} 2^{2(m-k)} + \sum_{i=1}^{s(n)} 2^{m_i},$$

где $2r > m_1 > m_2 > \cdots > m_{s(n)} \ge 0$. Тогда в силу (2)

$$L_n(W) - L_a(W) = s(n) - \sum_{i=1}^{s(n)} \left(\sum_{j=1}^{i-1} 2^{m_i - m_j} + \sum_{k=0}^{m-r} 2^{m_i - 2(m-k)} \right).$$

Так как последовательность $(m_{i-1}, m_{i-2}, \dots, m_1, 2r, 2r+2, \dots, 2m)$ строго возрастает и $m_i - m_{i-1} \le -1$, то

$$\sum_{j=1}^{i-1} 2^{m_i - m_j} + \sum_{k=0}^{m-r} 2^{m_i - 2(m-k)} < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

откуда $L_n(W) > L_a(W)$. Поскольку $L_{2k}(W) = L_k(W)$ (см. (3)), то $L_a(W) = L_{a \cdot 2^{-2r}}$. Кроме того, по теореме 2

$$L_{a \cdot 2^{-2r}} > \frac{2}{3}(m-r) > \frac{2}{3}(1-\varepsilon)m.$$

Из полученного неравенства и очевидной оценки $b < 2^{2m+1}$ вытекает, что

$$\frac{L_n(W)}{\log_2 n} > \frac{\frac{2}{3}(1-\varepsilon)m}{\log_2 b} > \frac{\frac{2}{3}(1-\varepsilon)m}{2m+1}.$$

В итоге отсюда

$$p\left(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\right) = \lim_{j\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{j} \sum_{n=k+1}^{k+j} \frac{L_n(W)}{\log_2 n} \ge \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{2}{3}(1-\varepsilon)m}{2m+1} = \frac{1-\varepsilon}{3}.$$

Таким образом,

$$p\left(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\right) \ge \frac{1}{3}.$$

Противоположное неравенство

$$p\left(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\right) \le \frac{1}{3}$$

следует из (14). $\square$

Отсюда и из теоремы Лоренца [5] получаем

Следствие 2. *Последовательность* $\left\{\frac{L_n(W)}{\log_2 n}, n \ge 2\right\}$ *не принадлежит пространству ac.*

Кроме того, из теоремы 3 и теоремы Сачестона [6] вытекает

Следствие 3. *Для любого банахова предела B справедливы неравенства*

$$0 \le B\left(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\right) \le \frac{1}{3}.$$

При этом для каждого числа $\alpha \in [0, 1/3]$ существует $B \in \mathfrak{B}$ такой, что

$$B\left(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\right) = \alpha.$$

Теорема 3 говорит о нерегулярности асимптотического поведения последовательности $\{L_n(W)\}$. Результатом в противоположном направлении является

Теорема 4. *Для любого $k \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} L_n(W) = 2^k\left(\frac{k}{4}+1\right).$$

Доказательство. Так как согласно формуле (4)

$$L_{2n+1}(W) - L_n(W) = \frac{1}{2}\left(L_{n+1}(W) - L_n(W) + 1\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

и $L_{2n}(W) = L_n(W)$, для всех $k = 0, 1, \dots$

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \left(L_{2n+1}(W) - L_n(W)\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \left(L_{n+1}(W) - L_n(W) + 1\right)$$
$$= 2^{k-1} + \frac{1}{2}\left(L_{2^{k+1}}(W) - L_{2^k}(W)\right) = 2^{k-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} L_{2n+1}(W) = \sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+2}-1} L_n(W) - \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} L_{2n}(W).$$

Поэтому из предыдущего равенства следует, что

$$\sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+2}-1} L_n(W) - 2\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} L_n(W) = 2^{k-1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+2}-1} L_n(W) - \frac{1}{2^k}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} L_n(W) = \frac{1}{4}, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Следовательно, так как $L_2(W) = 1$, то

$$\frac{1}{2^k}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} L_n(W) = \frac{1}{2^k}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} L_n(W) = \frac{k}{4}+1$$

для всех $k = 0, 1, \dots$, и теорема доказана. □

Из теоремы 4 вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{L_n(W)}{\log_2 n} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда и из определения (7) оператора Чезаро C получаем

Следствие 4. *Если $B \in \mathfrak{B}(C)$, то*

$$B\left(\frac{L_n(W)}{\log_2 n}\right) = \frac{1}{4}.$$

Следствия 3 и 4 показывают, что включение $\mathfrak{B}(C) \subset \mathfrak{B}$ строгое.

По константам Лебега $L_n(W)$, $n = 1, 2, \dots$, на отрезке $[0,1]$ построим последовательность ступенчатых функций

$$f_n(t) = \frac{1}{n} L_{[2^n(1+t)]}(W), \quad n \in \mathbb{N},$$

где через $[x]$ обозначается целая часть числа x. Одним из основных результатов работы является

Теорема 5. 1. *Для почти всех $t \in [0,1]$*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \frac{1}{4}.$$

2. *Для всех двоично-рациональных $t \in [0,1]$*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0.$$

3. *Существует такое плотное в $[0,1]$ подмножество $A \subset [0,1]$, что*

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(t) = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n(t) = \frac{1}{3} \tag{15}$$

для всех $t \in A$.

Доказательство. Если $t \in [0,1]$, то $t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e_k(t) 2^{-k}$, где $e_k(t)$ можно считать независимыми бернуллиевскими случайными величинами, принимающими на $[0,1]$ значения 0 и 1 с вероятностью 1/2. Тогда

$$2^n(1+t) = 2^n + \sum_{k=1}^{n} e_k(t) 2^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} e_k(t) 2^{n-k},$$

откуда

$$a_n(t) := [2^n(1+t)] = 2^n + \sum_{k=1}^{n} e_k(t) 2^{n-k}.$$

В силу (2)

$$\begin{aligned} f_n(t) = \frac{1}{n} L_{a_n(t)} &= \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} e_k(t) - \sum_{1\le i<j\le n} e_i(t) e_j(t) 2^{i-j} - \sum_{k=1}^{n} e_k(t) 2^{-k}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k(t) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k(t) 2^{-k} - \frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n} e_i(t) e_j(t) 2^{i-j}. \end{aligned}$$

Ясно, что первое и третье слагаемые всюду стремятся к нулю, а второе согласно усиленному закону больших чисел почти всюду — к 1/2. Осталось рассмотреть последнее слагаемое. Выразим его, используя функции Радемахера.

Так как $e_k(t) = (1-r_k(t))/2$ для всех $t \neq i2^{-m}$, $m = 0, 1, \dots$, $i = 0, 1, \dots, 2^m$, то

$$\sum_{1\le i<j\le n} e_i(t)e_j(t)2^{i-j} = \frac{1}{4}\sum_{1\le i<j\le n}(1-r_i(t))(1-r_j(t))2^{i-j}$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\sum_{1\le i<j\le n} 2^{i-j} - \sum_{1\le i<j\le n}(r_i(t)+r_j(t))2^{i-j} + \sum_{1\le i<j\le n} r_i(t)r_j(t)2^{i-j}\Big).$$

Вычисляя, найдем

$$\sum_{1\le i<j\le n} 2^{i-j} = n-2+2^{1-n}, \qquad \sum_{1\le i<j\le n} r_j(t)2^{i-j} = \sum_{j=2}^{n} r_j(t) - \sum_{j=2}^{n} r_j(t)2^{1-j},$$
$$\sum_{1\le i<j\le n} r_i(t)2^{i-j} = \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t) - \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t)2^{i-n}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}\sum_{1\le i<j\le n} 2^{i-j} = \frac{1}{4}$$

и, как показывают простые вычисления и усиленный закон больших чисел,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}\sum_{1\le i<j\le n}(r_i(t)+r_j(t))2^{i-j} = 0 \quad \text{при } n\to\infty$$

для почти всех $t \in [0,1]$. Тем самым утверждение 1 теоремы будет доказано, если показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n} r_i(t)r_j(t)2^{i-j} = 0 \quad \text{для п. в. } t\in[0,1]. \tag{16}$$

Полагая

$$x_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1\le i<j\le n} r_i(t)r_j(t)2^{i-j}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

заметим, что

$$\sum_{1\le i<j\le n} 2^{2(i-j)} = \frac{1}{3}(n-1) - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n-1} 2^{-2i} \le n.$$

Следовательно, для некоторого $C > 0$ и всех $n = 2, 3, \dots$

$$\|x_n\|_{\mathrm{Exp}\,L} \le C,$$

где $\mathrm{Exp}\,L$ — экспоненциальное пространство Орлича, построенное по функции $e^u - 1$ (см. [9, предложение 6.6.1] или [10, теорема 2]). Иначе говоря [11], для всех $n = 2, 3, \dots$

$$x_n^*(t) \le C\ln(e/t), \quad 0 < t \le 1,$$

где $x^*(t)$ — перестановка функции $|x(t)|$ в убывающем порядке [12, гл. II, § 2]. Отсюда по определению перестановки для любых $\varepsilon > 0$ и $k = 2, 3, \dots$

$$m\{t\in[0,1] : k^{-1/2}|x_k(t)| > \varepsilon\}$$
$$\le m\{t\in[0,1] : \ln(e/t) > k^{1/2}\varepsilon/C\} = \exp(e - k^{1/2}\varepsilon/C).$$

Поэтому

$$m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{t\in[0,1]:\, k^{-1/2}|x_k(t)|>\varepsilon\}\right)\le\sum_{k=n}^{\infty}\exp(e-k^{1/2}\varepsilon/C),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Так как левая часть этого неравенства вместе с правой стремится к нулю при $n\to\infty$, то $n^{-1/2}x_n(t)\to 0$ для п. в. $t\in[0,1]$. Поскольку это эквивалентно (16), п. 1 теоремы доказан.

Как отмечалось в § 1, $L_{2n}(W)=L_n(W)$. Поэтому $L_{[2^n(1+t)]}(W)=\mathrm{const}$ для всех достаточно больших $n\in\mathbb{N}$, если t двоично-рационально, откуда вытекает утверждение 2 теоремы.

Пусть $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная числовая последовательность такая, что

$$t_k=\begin{cases}1, & (2n)!\le k<(2n+1)! \text{ и } k \text{ четно},\\ 0 & \text{для остальных } k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

и $t=\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_k2^{-k}$. Так как для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$

$$\frac{\mathrm{card}\{1\le i\le n_k: t_i=0\}}{n_k}\to 1\quad\text{при } k\to\infty,$$

ввиду равенства

$$[2^n(1+t)]=2^n+\sum_{k=1}^{n}t_k2^{n-k},$$

соотношения (3) и теоремы 2 имеем $\liminf\limits_{n\to\infty}f_n(t)=0$. Совершенно аналогично, используя наличие в последовательности $\{t_k\}$ длинных массивов вида $(1,0,1,0,\dots,1,0)$ и применяя теорему 2, заключаем, что

$$\limsup_{n\to\infty}f_n(t)=\frac{1}{3}.$$

Обозначим через A множество всех $s\in[0,1]$, которые получаются из точки t за счет сдвига на некоторое двоично-рациональное число. Тогда, так как для любого $s\in A$ при достаточно больших $n\in\mathbb{N}$ справедливо равенство $[2^n(1+s)]=[2^n(1+t)]$ (см. утверждение 2 теоремы), то

$$\liminf_{n\to\infty}f_n(s)=0,\quad \limsup_{n\to\infty}f_n(s)=\frac{1}{3}.\quad\square$$

Пп 2, 3 теоремы 5 показывают поточечную нерегулярность асимптотического поведения $L_n(W)$, а п. 1 — регулярность по мере.

Авторы искренне признательны Б. И. Голубову и С. Ф. Лукомскому за полезное обсуждение вопросов, рассматриваемых в статье. Кроме того, они благодарны рецензенту за отмеченные им недочеты, устранение которых улучшило качество работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

2. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.

3. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
4. *Fine N. J.* On the Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 65, N 3. P. 372–414.
5. *Lorentz G. G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Math. 1948. V. 80, N 1. P. 167–190.
6. *Sucheston L.* Banach limits // Amer. Math. Monthly. 1967. V. 74. P. 308–311.
7. *Semenov E. M., Sukochev F. A.* Invariant Banach limits // J. Func. Anal. 2010. V. 259, N 6. P. 1517–1541.
8. *Асташкин С. В., Семенов Е. М.* Константы Лебега системы Уолша // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 5. С. 5090–511.
9. *Kwapien S., Woyczijnski W. A.* Random series and stochastic integrals. Single and multiple. Boston: Birkhäuser, 1992.
10. *Astashkin S. V.* Rademacher chaos in symmetric spaces. 2 // East J. Approx. 2000. V. 6, N 1. P. 71–86.
11. *Lorentz G. G.* Relations between function spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12, N 1. P. 127–132.
12. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 28 мая 2015 г.

Асташкин Сергей Владимирович
Самарский гос. университет,
ул. Академика Павлова, 1, Самара 443011;
Самарский гос. аэрокосмический университет
им. академика С. П. Королева,
Московское шоссе, 34, Самара 443086
astash@samsu.ru

Семенов Евгений Михайлович
Воронежский гос. университет,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru