Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 512.543

КРИТЕРИЙ $\mathscr{F}_\pi$–АППРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С ОБЪЕДИНЕННОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПОДГРУППОЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП КОНЕЧНЫХ РАНГОВ

Д. Н. Азаров

Аннотация. Пусть G — свободное произведение нильпотентных групп A и B конечного ранга с циклической объединенной подгруппой H, $H \neq A$ и $H \neq B$. Пусть для некоторого множества π простых чисел группы A и B $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемы, где $\mathscr{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп. Доказано, что группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathscr{F}_\pi$-отделима в группах A и B.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.301

Ключевые слова: обобщенное свободное произведение, нильпотентная группа, финитная аппроксимируемость, конечная p-группа.

1. Введение

Пусть $\mathscr{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется *аппроксимируемой группами из класса* $\mathscr{K}$ (или, короче, $\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1.

Если $\mathscr{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathscr{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается более тонкое свойство $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости, где p — некоторое простое число, $\mathscr{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Изучается также более универсальное свойство $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — некоторое множество простых чисел, $\mathscr{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп.

Исследования аппроксимируемости нильпотентных групп различными классами конечных групп были начаты Грюнбергом в работе [1], где доказано, в частности, что любая конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема, а любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p. С помощью этих результатов легко доказать следующее более общее утверждение.

Конечно порожденная нильпотентная группа $\mathscr{F}_\pi$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее конечная часть является* π*-группой.*

Для нильпотентных групп одним из обобщений конечной порожденности является конечность ранга. Напомним, что группа G называется *группой конечного ранга* (или, в другой терминологии, *группой конечного ранга Прюфера*), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Это понятие введено А. И. Мальцевым в [2].

Для нильпотентных групп конечного ранга свойство $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости может быть легко охарактеризовано с помощью следующего понятия. Элемент a группы G называется *π-полным*, если для любого π-числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G (здесь под π-числом понимается любое целое положительное число, все простые делители которого принадлежат множеству π). Если π — множество всех простых чисел, то понятие π-полного элемента совпадает с классическим понятием полного элемента. В [3] доказано следующее утверждение.

Нильпотентная группа конечного ранга $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда в ней нет неединичных π-полных элементов.

Это утверждение не может быть распространено на произвольные нильпотентные группы. Соответствующий пример был подсказан автору А. Л. Шмелькиным и представляет собой обобщенное прямое произведение бесконечного числа экземпляров группы кватернионов с объединенными центрами. Такая группа не финитно аппроксимируема, но при этом в ней нет полных элементов, кроме 1.

В упомянутой выше работе Грюнберга было доказано, что свободное произведение двух $\mathscr{F}$-аппроксимируемых групп само является $\mathscr{F}$-аппроксимируемой группой. Там же аналогичные утверждения доказаны для $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости и для $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости.

Изучение свойств $\mathscr{F}$-аппроксимируемости и $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп было начато Баумслагом и соответственно Хигманом.

В 1963 г. Баумслаг в [4] доказал, что свободное произведение двух конечных групп с объединенной подгруппой является почти свободной, и, следовательно, $\mathscr{F}$-аппроксимируемой группой. Эта теорема лежит в основе доказательств многих известных результатов о финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп.

В 1964 г. Хигман в [5] получил необходимое и достаточное условие $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения двух конечных p-групп с объединенными подгруппами. В качестве важного следствия из этого результата в [5] приводится следующее утверждение.

Свободное произведение двух конечных p-групп с циклическими объединенными подгруппами является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой.

Это утверждение лежит в основе доказательств большинства известных теорем об $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением.

Одним из первых результатов о финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением является следующая теорема Баумслага [4].

Свободное произведение двух конечно порожденных нильпотентных групп *с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

Обобщениям этого результата посвящен ряд работ. Так, например, Дайер в [6] доказала финитную аппроксимируемость свободного произведения двух полициклических групп с циклическим объединением. В [7] получен следующий еще более общий результат.

Теорема 1. *Пусть G — свободное произведение конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп A и B конечного ранга с объединенными циклическими подгруппами H и K, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.*

Условие конечной порожденности, накладываемое на группы A и B в теореме 1, может быть в некоторой степени ослаблено, но тем не менее пока не удается полностью отказаться от этого условия в формулировке теоремы 1. Значительно проще дело обстоит в случае, когда A и B — нильпотентные группы конечного ранга. В этом случае утверждение теоремы 1 остается верным и без предположения о конечной порожденности групп A и B. Более того, в этом случае наряду с финитной аппроксимируемостью для группы G удается также исследовать и более тонкое свойство $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости. Соответствующий критерий является основным результатом настоящей работы и формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть π — непустое множество простых чисел, G — свободное произведение $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с объединенными циклическими подгруппами H и K, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K $\mathscr{F}_\pi$-отделимы в группах A и B соответственно.*

В связи с формулировкой теоремы 2 напомним, что подгруппа H группы A называется *$\mathscr{F}_\pi$-отделимой*, если для каждого элемента a группы A, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы A на конечную π-группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H. Понятие $\mathscr{F}$-отделимой подгруппы совпадает с классическим понятием финитно отделимой подгруппы.

Так как конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема, имеет конечный ранг и в ней все подгруппы финитно отделимы, непосредственным следствием теоремы 2 является сформулированный выше результат Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением. Результат Хигмана об $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения двух конечных p-групп с циклическим объединением также является следствием теоремы 2. Другие известные результаты, являющиеся следствиями теоремы 2, будут отмечены ниже.

Заметим, что конечность ранга групп A и B несущественна при доказательстве необходимости в теореме 2. Однако достаточность в этой теореме уже не может быть доказана без предположения о конечности ранга групп A и B. Действительно, свободное произведение G финитно аппроксимируемых абелевых групп A и B с циклическими финитно отделимыми подгруппами H и K не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Для построения соответствующего примера разобьем множество всех простых чисел на два непустых непересекающихся подмножества π_1 и π_2. Пусть A — обобщенное прямое произведение бесконечного семейства бесконечных циклических групп A_i с одной объединенной подгруппой H, причем индексы подгруппы H в группах A_i «пробегают» множество всех π_1-чисел. Аналогично пусть B — обобщенное прямое произведение бесконечных циклических групп B_j с одной объединенной подгруппой K, причем индексы подгруппы K в группах B_j «пробегают» множество всех π_2-чисел. Очевидно, что A и B — финитно аппроксимируемые абелевы группы, а их подгруппы H и K финитно отделимы. При этом группа G не является финитно аппроксимируемой, так как в ней из порождающего элемента объединенной подгруппы извлекаются корни любой π_1-степени и любой π_2-степени, поэтому данный элемент переходит в 1 при любом гомоморфизме группы G на конечную группу.

Таким образом, если π — произвольное множество простых чисел, то свободное произведение двух $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемых групп с $\mathscr{F}_\pi$-отделимыми циклическими подгруппами не обязано быть $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой группой. Иначе дело обстоит в случае, когда множество π состоит из одного простого числа p. В этом случае имеет место следующее простое утверждение.

Предложение 1. *Свободное произведение двух $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемых групп с $\mathscr{F}_p$-отделимыми циклическими подгруппами является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой.*

Примеры, показывающие необратимость предложения 1, легко найти среди свободных произведений двух свободных групп с циклической объединенной подгруппой, изолированной в одном из свободных множителей. Такие свободные произведения $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемы для каждого простого числа p [8], но $\mathscr{F}_p$-отделимость объединенной подгруппы гарантирована лишь в том свободном множителе, в котором эта подгруппа изолирована.

В случае, когда A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, теорема 2 позволяет получить очень простой критерий $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G. Действительно, пусть A — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $H = (h)$ — ее неединичная циклическая подгруппа, m — наибольшее целое положительное число такое, что уравнение $x^m = h$ разрешимо в группе A. Легко видеть (доказательство приведено ниже), что подгруппа H $\mathscr{F}_\pi$-отделима в A тогда и только тогда, когда m — π-число. Поэтому из теоремы 2 вытекает следующее очень простое утверждение, которое обобщает некоторые известные результаты, доказанные в [9, 10].

Теорема 3. *Пусть π — непустое множество простых чисел, A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, G — свободное произведение групп A и B с объединенными неединичными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Пусть m и n — наибольшие целые положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно. Группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда числа m и n являются π-числами.*

В аналогичных терминах (но с существенными отличиями) формулируется и критерий $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением [8]. Заметим еще, что свободное произведение с циклическим объединением двух групп, аппроксимируемых конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, содержит подгруппу конечного индекса, которая $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p [11].

Очевидно, что любая $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемая группа нильпотентно аппроксимируема. Заметим еще, что нильпотентная аппроксимируемость группы G из теоремы 3 равносильна ее $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости для подходящего простого p, т. е. тому, что числа m и n являются степенями числа p. Это вытекает из следующего общего утверждения, доказанного в [12].

Пусть G — свободное произведение локально нильпотентных групп A и B с объединенными подгруппами H и K, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Если группа G аппроксимируема нильпотентными группами, то существует простое число p такое, что подгруппы H и K p'-изолированы в группах A и B соответственно.

Напомним, что подгруппа H группы A называется *p'-изолированной*, если для каждого элемента a группы A и для каждого простого числа q, отличного от p, из того, что $a^q \in H$, следует, что $a \in H$.

Наряду с нильпотентной аппроксимируемостью групп изучается также свойство аппроксимируемости разрешимыми группами. Отметим следующее простое утверждение.

Предложение 2. *Для свободного произведения двух нильпотентных групп с циклическим объединением свойство аппроксимируемости конечными разрешимыми π-группами равносильно свойству $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости.*

Перейдем теперь к доказательствам теорем 2 и 3. Для доказательства теоремы 2 потребуются вспомогательные утверждения о разрешимых и нильпотентных группах, которым посвящен разд. 2 настоящей работы. В разд. 3 приводятся доказательства теорем 2 и 3. Там же доказаны предложения 1 и 2.

2. Предварительные утверждения

Лемма 1. *Пусть T — финитно аппроксимируемая разрешимая p-группа конечного ранга. Тогда группа T конечна.*

Доказательство. Пусть $1 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n = T$ — нормальный ряд группы T с абелевыми факторами. Группа $A = T_1$ является абелевой p-группой. Для каждого целого положительного числа k через A_k будем обозначать множество всех элементов a группы A таких, что $a^{p^k} = 1$. Это множество конечно за счет конечности ранга группы A. Поэтому группа A не более чем счетна. Так как A финитно аппроксимируема, в ней нет элементов бесконечной p-высоты, отличных от единицы, т. е. таких неединичных элементов a, из которых в группе A извлекается корень степени p^k для любого целого положительного k. Из последних двух обстоятельств по второй теореме Прюфера следует, что группа A раскладывается в прямое произведение циклических p-групп. Отсюда и из конечности ранга группы A вытекает, что группа A конечна. Так как группа T финитно аппроксимируема и A — ее конечная нормальная подгруппа, фактор-группа T/A также финитно аппроксимируема. Таким образом, T/A — финитно аппроксимируемая разрешимая p-группа конечного ранга, причем она обладает нормальным рядом с абелевыми факторами длины, меньшей n. Поэтому в силу индуктивных соображений группа T/A конечна. Отсюда и из конечности группы A следует конечность группы T. Лемма доказана.

Индукцией по длине ряда коммутантов легко доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть T — периодическая разрешимая группа конечного ранга и порядки элементов группы T ограничены. Тогда группа T конечна.*

Для разрешимых групп конечного ранга вопрос о финитной аппроксимируемости решается следующей теоремой Робинсона (см., например, [13, п. 5.3.2]).

Лемма 3. *Разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Напомним, что группа называется *редуцированной*, если она не содержит неединичных полных подгрупп, т. е. таких неединичных подгрупп, в которых из каждого элемента можно извлечь корень любой натуральной степени. Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа редуцирована.

Очевидно также, что в финитно аппроксимируемой группе любая конечная подгруппа финитно отделима. С другой стороны, простые примеры показывают, что наличие в группе финитно отделимой конечной подгруппы не гарантирует финитную аппроксимируемость этой группы. Иначе ведут себя в этом отношении разрешимые группы конечного ранга. Для них имеет место следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть S — разрешимая группа конечного ранга и T — ее конечная подгруппа. Если подгруппа T финитно отделима в S, то группа S финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть A — полная подгруппа группы S. Очевидно, что A содержится в любой подгруппе конечного индекса группы S. Так как T финитно отделима в S, то T совпадает с пересечением некоторого множества подгрупп конечного индекса группы S. Из последних двух обстоятельств следует, что A содержится в T. Таким образом, A — конечная полная группа, поэтому она единичная. Видим, что группа S редуцирована. Тем самым в силу леммы 3 она финитно аппроксимируема. Лемма доказана.

Напомним, что если S — произвольная группа и n — целое положительное число, то можно рассматривать степенную подгруппу S^n, т. е. подгруппу группы S, порожденную n-ми степенями всех ее элементов. Следующее утверждение принадлежит А. И. Мальцеву [14].

Лемма 5. *Пусть N — нильпотентная группа ступени c и n — целое неотрицательное число. Тогда из любого элемента степенной подгруппы N^{n^c} в группе N можно извлечь корень степени n.*

Нам потребуется также следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть N — нильпотентная группа конечного ранга и $H = (h)$ — бесконечная циклическая финитно отделимая подгруппа группы N. Тогда для каждого неединичного элемента a подгруппы H и для каждого простого числа p существует целое положительное число s такое, что уравнение $x^{p^s} = a$ не разрешимо в группе N.*

Доказательство. Пусть a — неединичный элемент подгруппы H, p — простое число и C — централизатор подгруппы $A = (a)$ в группе N. Так как H финитно отделима в N и H содержится в C, то H финитно отделима C, поэтому H/A финитно отделима в C/A. Отсюда и из конечности H/A по лемме 4 следует финитная аппроксимируемость группы C/A. Тем же свойством обладает и p-компонента P/A группы C/A. Поэтому в силу леммы 1 группа P/A конечна. Если предположить, что в группе N выполняется равенство $g^{p^l} = a$, то элемент

g принадлежит C и имеет по модулю A порядок p^l. Поэтому gA принадлежит конечной p-группе P/A и, следовательно, его порядок p^l ограничен порядком группы P/A. Таким образом, уравнение $x^{p^s} = a$ не разрешимо в группе N, если p^s больше, чем порядок группы P/A. Лемма доказана.

Элемент h бесконечного порядка группы G называется *мощным*, если для любого целого положительного числа l в группе G существует нормальная подгруппа L конечного индекса такая, что порядок элемента h по модулю подгруппы L равен l (т. е. такая, что $H \cap L = H^l$, где $H = (h)$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом h). Этим свойством обладают, например, все элементы бесконечного порядка конечно порожденной нильпотентной группы. В действительности, имеет место следующее более общее утверждение.

Лемма 7. *Пусть N — нильпотентная группа конечного ранга и $H = (h)$ — бесконечная циклическая финитно отделимая подгруппа группы N. Тогда элемент h группы N является мощным.*

Доказательство. Покажем, что для любого целого положительного числа l в группе N существует нормальная подгруппа L конечного индекса такая, что $H \cap L = H^l$. Рассмотрим сначала частный случай, когда $l = p^k$ — степень простого числа p. Обозначим через h_1 элемент $h^{p^{k-1}}$. По лемме 6 существует число s, для которого уравнение $x^{p^s} = h_1$ не разрешимо в группе N. Рассмотрим степенную подгруппу $V = N^{p^{sc}}$, где c — ступень нильпотентности группы N. По лемме 5 $h_1 \notin V$. По лемме 2 фактор-группа N/V является конечной p-группой. Из элементарных свойств конечных p-групп следует, что существует последовательность $N = N_1 \geq N_2 \geq \cdots \geq N_r = V$ нормальных подгрупп группы N с факторами порядка p. Так как $h_1 \notin V$, найдется число j такое, что $h_1 \in N_j$ и $h_1 \notin N_{j+1}$. Поэтому из того, что группа N_j/N_{j+1} имеет порядок p, следует, что $| h_1 N_{j+1} | = p$. Отсюда и из того, что $h_1 = h^{p^{k-1}}$, вытекает, что $|hN_{j+1}| = p^k$, т. е. $H \cap N_{j+1} = H^{p^k}$. Кроме того, подгруппа N_{j+1} нормальна в N и имеет в N конечный индекс. Таким образом, в качестве искомой подгруппы L можем взять подгруппу N_{j+1}.

Рассмотрим общий случай, когда разложение числа l на простые множители имеет вид $l = \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$. В силу рассмотренного выше частного случая для каждого $i = 1, \ldots, n$ в группе N существует нормальная подгруппа L_i конечного индекса такая, что $H \cap L_i = H^{p_i^{k_i}}$. Тогда подгруппа $L = \bigcap_{i=1}^{n} L_i$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы L и $H \cap L = H^l$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть N — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $H = (h)$ — ее неединичная циклическая подгруппа и m — наибольшее целое положительное число такое, что уравнение $x^m = h$ разрешимо в группе N. Подгруппа H $\mathscr{F}_\pi$-отделима в N тогда и только тогда, когда m — π-число.*

Доказательство. Если m не является π-числом, то найдутся простое число q, не принадлежащее π, и элемент g группы N такие, что $g^q = h$. Тогда очевидно, что при любом гомоморфизме группы N на конечную π-группу образ элемента g принадлежит образу подгруппы H, поэтому H не будет $\mathscr{F}_\pi$-отделимой в N.

Предположим, что m — π-число. Обозначим через c элемент группы N такой, что $c^m = h$. Тогда подгруппа $C = (c)$ изолирована в группе N. Хорошо известно и легко проверяется, что в конечно порожденной нильпотентной группе любая изолированная подгруппа $\mathscr{F}_p$-отделима для каждого простого p (см., например, [15, п. 4]). Поэтому C $\mathscr{F}_\pi$-отделима в N. Как отмечалось выше, в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения все неединичные элементы мощные. Отсюда следует, что в группе N существует нормальная подгруппа L конечного индекса такая, что $C \cap L = C^m = H$, причем в силу элементарных свойств конечных нильпотентных групп можно считать, что N/L — конечная π-группа. Покажем, что для каждого элемента a группы N, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы N на конечную π-группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H. Если a не принадлежит C, то существование такого гомоморфизма следует из того, что C $\mathscr{F}_\pi$-отделима в N. Если же a принадлежит C, то в качестве искомого гомоморфизма выступает естественный гомоморфизм группы N на группу N/L. Лемма доказана.

3. Доказательства теорем 2 и 3

Пусть A и B — произвольные группы, h и k — элементы групп A и B соответственно и порядки этих элементов совпадают. Рассмотрим свободное произведение $G = (A * B,\ h = k)$ групп A и B с объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Нам потребуется следующая конструкция, принадлежащая Баумслагу [4]. Пусть P и Q — нормальные подгруппы групп A и B такие, что порядки элементов $hP \in A/P$ и $kQ \in B/Q$ совпадают. Тогда можно рассмотреть свободное произведение $G_{PQ} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ и гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$.

С помощью этой конструкции докажем следующее утверждение, обобщающее упомянутый выше результат Хигмана о $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости произвольного свободного произведения двух конечных p-групп с циклическим объединением.

Лемма 9. *Пусть $G = (A * B,\ h = k)$ — свободное произведение конечных нильпотентных π-групп A и B с объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Тогда группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Более того, группа G аппроксимируема конечными разрешимыми π-группами.*

Доказательство. Пусть c — неединичный элемент, принадлежащий одному из свободных множителей A или B. Обозначим через p какой-нибудь простой делитель порядка элемента c, а через P и Q — подгруппы групп A и B, состоящие из всех элементов этих групп, порядки которых взаимно просты с p. Тогда можно рассмотреть свободное произведение $G_{PQ} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ конечных p-групп A/P и B/Q с циклическим объединением и гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$. Так как элемент $c\rho_{PQ}$ отличен от 1 и в силу результата Хигмана группа G_{PQ} $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема, существует гомоморфизм ρ группы G_{PQ} на конечную p-группу такой, что элемент $c\rho_{PQ}\rho$ отличен от 1. Ядро гомоморфизма $\rho_{PQ}\rho$ обозначим через F_c. Тогда F_c — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G, не содержащая c, причем $p \in \pi$. Пусть F — пересечение подгрупп F_c по всем неединичным элементам c из объединения подгрупп A и B. Тогда G/F — конечная нильпотентная π-группа и F тривиально пересекает свободные множители A и B. В силу последнего обстоятельства F — свободная группа, поэтому она $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для любого простого p. В частности, группа F аппроксимируема конечными разрешимыми π-группами. Таким образом, группа G является расширением группы, аппроксимируемой конечными разрешимыми π-группами, с помощью конечной разрешимой π-группы. Поэтому, как легко видеть, группа G аппроксимируема конечными разрешимыми π-группами (см., например, [16, п. 6.5]). Лемма доказана.

Пусть $G = (A * B,\ h = k)$ — свободное произведение нильпотентных групп A и B с объединенными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$ и F — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G. Обозначим через P и Q пересечения подгрупп A и B с F. Тогда G_{PQ} — свободное произведение конечных нильпотентных π-групп A/P и B/Q с циклическим объединением. По лемме 9 группа G_{PQ} аппроксимируема конечными разрешимыми π-группами. Заметим еще, что ядро гомоморфизма $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$ содержится в F. Таким образом, любая нормальная подгруппа F конечного π-индекса группы G содержит в себе ядро некоторого гомоморфизма группы G на группу, аппроксимируемую конечными разрешимыми π-группами. Поэтому из $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G следует ее аппроксимируемость конечными разрешимыми π-группами. Очевидно и обратное утверждение. Тем самым доказано сформулированное в разд. 1 предложение 2.

Лемма 10. *Пусть $G = (A * B,\ h = k)$ — свободное произведение $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B с объединенными конечными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Тогда группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема.*

Доказательство. Так как группы A и B $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемы, а их подгруппы H и K конечны, в группах A и B существуют нормальные подгруппы P и Q конечных π-индексов, тривиально пересекающие H и K. Тогда группа $G_{PQ} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема в силу леммы 9. Поэтому существует гомоморфизм τ группы G_{PQ} на конечную π-группу, инъективный на объединяемых подгруппах. Очевидно, что гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$, инъективен на подгруппах H и K. Получаем, таким образом, гомоморфизм $\rho_{PQ}\tau$ группы G на конечную π-группу, инъективный на подгруппах H и K. Его ядро F является нормальной подгруппой конечного π-индекса группы G, тривиально пересекающей H и K. Из последнего обстоятельства по хорошо известной теореме Нейман [17, гл. 1, п. 11, предложение 11.22] следует, что F — свободное произведение некоторой свободной группы и некоторого числа сопряжений к подгруппам групп A и B. Поэтому группа F $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что G/F — конечная π-группа, следует $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $G = (A * B,\ h = k)$ — свободное произведение $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B с объединенными бесконечными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. Пусть выполняются следующие два условия.*

1. *Подгруппы H и K $\mathscr{F}_\pi$-отделимы в группах A и B.*
2. *Элементы h и k групп A и B мощные.*

Тогда группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема.

Доказательство. Пусть g — неединичный элемент группы G. Покажем, что существует гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу, переводящий элемент g в неединичный элемент. Пусть $g = x_1 x_2 \dots x_r$ — несократимая запись элемента g.

Предположим сначала, что $r = 1$. В этом случае $g \in A$ или $g \in B$. Пусть для определенности $g \in A$. Так как группа A $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема, существует нормальная подгруппа P конечного π-индекса группы A, не содержащая элемента g. Поскольку элемент k группы B мощный, существует нормальная подгруппа Q конечного индекса группы B такая, что $|hP| = |kQ|$, причем без потери общности можно считать, что Q имеет π-индекс в B. Группа $G_{PQ} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ является свободным произведением двух конечных нильпотентных π-групп с циклическим объединением и, следовательно, по лемме 9 $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Рассмотрим гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$. Так как $g\rho_{PQ} \neq 1$ и G_{PQ} $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема, существует гомоморфизм τ группы G_{PQ} на конечную π-группу такой, что $g\rho_{PQ}\tau \neq 1$.

Пусть $r > 1$. Для определенности предположим, что $x_1, x_3, \dots \in A \setminus H$ и $x_2, x_4, \dots \in B \setminus K$. Пусть $X = \{x_1, x_3, \dots\}$ и $Y = \{x_2, x_4, \dots\}$. В силу того, что $X \cap H = \varnothing = Y \cap K$ и подгруппы H и K $\mathscr{F}_\pi$-отделимы в группах A и B, существуют нормальные подгруппы P_0 и Q_0 конечных π-индексов в группах A и B такие, что $X \cap HP_0 = \varnothing$ и $Y \cap KQ_0 = \varnothing$. Пусть m — наибольший общий делитель π-чисел $|hP_0|$ и $|kQ_0|$. Так как h и k — мощные элементы групп A и B, существуют нормальные подгруппы P_1 и Q_1 конечных индексов в группах A и B такие, что $|hP_1| = m = |kQ_1|$. Без потери общности можно считать, что подгруппы P_1 и Q_1 имеют π-индексы в A и B. Пусть $P = P_0 \cap P_1$ и $Q = Q_0 \cap Q_1$. Тогда P и Q — нормальные подгруппы в A и B, удовлетворяющие следующим условиям: $X \cap HP = \varnothing$, $Y \cap KQ = \varnothing$, A/P и B/Q — конечные нильпотентные π-группы. Рассмотрим их свободное произведение $G_{PQ} = (A/P * B/Q,\ hP = kQ)$ и гомоморфизм $\rho_{PQ} : G \to G_{PQ}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/P$ и $B \to B/Q$. По лемме 9 группа G_{PQ} $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Так как $X \cap HP = \varnothing$ и $Y \cap KQ = \varnothing$, то

$$x_1P \notin HP/P, \quad x_2Q \notin KQ/Q, \quad x_3P \notin HP/P, \quad x_4Q \notin KQ/Q, \dots.$$

Поэтому элемент $g\rho_{PQ}$ группы G_{PQ} имеет несократимую запись

$$g\rho_{PQ} = x_1\rho_{PQ} x_2\rho_{PQ} \dots x_r\rho_{PQ} = x_1P \cdot x_2Q \cdot x_3P \cdot x_4Q \cdot \dots$$

длины $r > 1$. Следовательно, $g\rho_{PQ} \neq 1$. Отсюда и из того, что группа G_{PQ} $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема, следует существование гомоморфизма τ группы G_{PQ} на конечную π-группу такого, что $g\rho_{PQ}\tau \neq 1$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $G = (A*B, H)$ — свободное произведение нильпотентных групп A и B с объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Пусть группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Тогда подгруппа H $\mathscr{F}_\pi$-отделима в группах A и B.*

Доказательство. Предположим от противного, что существует элемент a группы A, не принадлежащий H и такой, что для любого гомоморфизма ψ группы A на конечную π-группу $a\psi \in H\psi$. Так как группа B нильпотентна, существует такое натуральное n, что для произвольного простого коммутатора веса n, составленного из элементов группы B, выполняется тождество $[x_1, [x_2, [\dots, [x_{n-1}, x_n] \dots]]] = 1$. Пусть b — элемент группы B, не принадлежащий H. Рассмотрим в группе G простой коммутатор веса n следующего вида: $c = [a, [a, [\dots, [a, b] \dots]]]$. Заметим, что элемент c имеет в группе G несократимую запись длины 2^n, поэтому $c \neq 1$. Отсюда и из того, что группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема, следует, что в G существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса, не содержащая c.

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varepsilon : G \to G/N$ и обозначим через ψ его ограничение на подгруппу A. Тогда ψ — гомоморфизм группы A на конечную π-группу AN/N. В силу выбора элемента a имеем $a\psi \in H\psi$, т. е. существует элемент $h \in H$ такой, что $a\psi = h\psi$ или, что то же самое, $a\varepsilon = h\varepsilon$. Тогда

$$c\varepsilon = [a\varepsilon, [a\varepsilon, [\dots, [a\varepsilon, b\varepsilon] \dots]]] = [h\varepsilon, [h\varepsilon, [\dots, [h\varepsilon, b\varepsilon] \dots]]] = [h, [h, [\dots, [h, b] \dots]]]\varepsilon,$$

причем $[h, [h, [\dots, [h, b] \dots]]] = 1$, так как $h \in B$ и $b \in B$. Следовательно, $c\varepsilon = 1$. Но, с другой стороны, $c \notin N = \operatorname{Ker} \varepsilon$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Докажем теорему 2. Пусть G — свободное произведение $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с объединенными циклическими подгруппами H и K, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Покажем, что группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K $\mathscr{F}_\pi$-отделимы в группах A и B соответственно. Необходимость в этом утверждении обеспечивается леммой 12. Лемма 10 обеспечивает достаточность в случае, когда H и K конечны. В случае бесконечных H и K достаточность в доказываемой теореме обеспечивается леммами 7 и 11. В самом деле, пусть G — свободное произведение $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемых нильпотентных групп A и B конечного ранга с объединенными бесконечными циклическими $\mathscr{F}_\pi$-отделимыми подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$. По лемме 7 элементы h и k групп A и B мощные, поэтому в силу леммы 11 группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Теорема 2 доказана.

Теорема 3 является непосредственным следствием теоремы 2 и леммы 8. В самом деле, пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, G — свободное произведение групп A и B с объединенными нееденичными циклическими подгруппами $H = (h)$ и $K = (k)$, причем $H \neq A$ и $K \neq B$. Пусть m и n — наибольшие целые положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах A и B соответственно. По теореме 2 группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда H и K $\mathscr{F}_\pi$-отделимы в A и B, а это силу леммы 8 равносильно тому, что m и n являются π-числами. Теорема 3 доказана.

Значительно проще (по сравнению с теоремой 2) доказывается сформулированное в разд. 1 предложение 1. В случае конечных объединенных подгрупп предложение 1 доказано в [9] и оно почти очевидно с учетом отмеченного выше результата Хигмана. Если объединяемые подгруппы бесконечны, предложение 1 легко доказывается по аналогии с леммой 11 с учетом следующего очевидного утверждения: если a — элемент бесконечного порядка $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы A, то элемент a p-мощный, т. е. для любого целого положительного p-числа m существует гомоморфизм группы A на конечную p-группу, при котором порядок образа элемента a равен m.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.

2. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 351–352.
3. *Азаров Д. Н.* Некоторые аппроксимационные свойства групп конечного ранга // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 2. С. 50–55.
4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
5. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.
6. *Dyer J.* On the residual finiteness of generalized free products // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 133, N 1. P. 131–143.
7. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485–493.
8. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 3–8.
9. *Kim G., McCarron J.* On amalgamated free products of residually p-finite groups // J. Algebra. 1993. V. 162. P. 1–11.
10. *Kim G., Tang C. Y.* On generalized free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1998. V. 201. P. 317–327.
11. *Azarov D.* Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation // Commun. Algebra. 2015. V. 43. P. 1464–1471.
12. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. Иван. гос. пед. ин-та. 1999. Вып. 2. С. 5–7.
13. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon Press, 2004.
14. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60.
15. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.
16. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
17. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

Статья поступила 11 мая 2015 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский гос. университет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Ермака, 37, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru